

ALEXANDER ALLDRIDGE

C^* -ALGEBREN UND
K-THEORIE

Inhaltsverzeichnis

1	<i>C*</i> -Algebren: Die Grundlagen	5
1.1	Der Spektralradius und der Funktionalkalkül	5
1.2	Positive Elemente	14
1.3	Fasteinsen und Faktorisierung	18
1.4	Ideale und Quotienten	20
1.5	Positive Linearformen	22
1.6	Darstellungen und die GNS-Konstruktion	24
1.7	Von Neumann-Algebren	29
1.8	Irreduzible *-Darstellungen	37
1.9	Reelle <i>C*</i> -Algebren	39
1.10	Bibliographische Notizen zu Kapitel 1	47
2	Beispiele von <i>C*</i> -Algebren	49
2.1	Die Algebra der kompakten Operatoren	49
2.2	AF-Algebren	53
2.3	Durch Erzeuger und Relationen definierte <i>C*</i> -Algebren	64
2.4	Die Toeplitzalgebra	66
2.5	Die irrationale Rotationsalgebra	70
2.6	Bibliographische Notizen zu Kapitel 2	72
3	<i>K</i> -Theorie von <i>C*</i> -Algebren	73
3.1	Lokale <i>C*</i> -Algebren	73
3.2	Äquivalenz von Idempotenten und Projektionen	76
3.3	Die K_0 -Gruppe	83

3.4	<i>K₁ und höhere K-Gruppen</i>	90
3.5	<i>Lange exakte Sequenz</i>	93
3.6	<i>Bott-Periodizität</i>	97
3.7	<i>Bibliographische Notizen zu Kapitel 3</i>	103

A *Grundlagen aus der Funktionalanalysis* 105

A.1	<i>Lokal-konvexe Vektorräume</i>	105
A.2	<i>Satz von Stone-Weierstrass</i>	107
A.3	<i>Banach- und Hilberträume</i>	107

Stichwortverzeichnis 111

Symbolverzeichnis 113

Verzeichnis der Definitionen 115

Verzeichnis der Sätze 117

*Verzeichnis der Beispiele und
Bemerkungen* 119

Literaturverzeichnis 121

1

C^* -Algebren: Die Grundlagen

1.1 Der Spektralradius und der Funktionalkalkül

Definition 1.1.1 (C^* -Algebren). Eine assoziative Algebra (über \mathbb{C})¹ A heißt $*$ -Algebra, falls zusätzlich eine antilineare Anti-Involution $*$: $A \rightarrow A$ gegeben ist, d.h.

$$(a + zb)^* = a^* + \bar{z}b^*, \quad (ab)^* = b^*a^*, \quad (a^*)^* = a, \quad \forall a, b \in A, z \in \mathbb{C}.$$

Eine vollständig normierte assoziative Algebra A über \mathbb{C} heißt *Banach-Algebra*, falls

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|, \quad \forall a, b \in A.$$

Sie heißt *Banach- $*$ -Algebra*, falls sie eine $*$ -Algebra ist und

$$\|a^*\| = \|a\|, \quad \forall a \in A.$$

Eine $*$ -Algebra A , die gleichzeitig eine Banach-Algebra ist, heißt *C^* -Algebra*, falls

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in A.$$

Ein Algebromorphismus $\phi : A \rightarrow B$, so dass $\phi(a^*) = \phi(a)^*$ für alle a heißt *$*$ -Morphismus*.

Ein Element $a \in A$ einer Banach- $*$ -Algebra heißt *selbstadjungiert*, falls $a^* = a$, und *normal*, falls a und a^* kommutieren. Allgemein ist

$$a = \frac{1}{2}(a + a^*) + i \cdot \frac{1}{2i}(a - a^*),$$

also ist jeder $*$ -invariante Unterraum von A der Aufspann seiner selbstadjungierten Elemente. Ist A eine *unitale* Banach- $*$ -Algebra, so heißt $u \in A$ *unitär*, falls $u^*u = uu^* = 1$. Unitäre Elemente sind normal.

¹Eine *assoziative Algebra* (über \mathbb{C}) ist ein Ring A (im allgemeinen ohne Eins), der gleichzeitig ein Vektorraum über \mathbb{C} ist, so dass folgendes gilt: Die Ringaddition ist die Vektorraumaddition und die Ringmultiplikation ist bilinear.

Bemerkung 1.1.2. Ist A eine C^* -Algebra ist eine Banach- $*$ -Algebra:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\| \implies \|a\| \leq \|a^*\|,$$

Ersetzt man a durch a^* , folgt die umgekehrte Ungleichung. Ist A unital, ist 1^* eine Eins, da $*$ eine Anti-Involution ist. Es folgt $1 = 1^*$. Weiter gilt

$$\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1^*\| = \|1\| \neq 0,$$

also $\|1\| = 1$ (falls $A \neq 0$). Für unitäres u folgt

$$\|u\|^2 = \|u^*u\| = \|1\| = 1 \implies \|u\| = 1.$$

Beispiel 1.1.3. Sei X ein lokal-kompakter Hausdorff-Raum. Sei $C_0(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, die im Unendlichen verschwinden, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq X$ mit

$$|f|_{X \setminus K} \leq \varepsilon.$$

Dann ist $C_0(X)$ eine C^* -Algebra mit der punktweisen Multiplikation, der Involution $f^*(x) := \overline{f(x)}$ und der Supremumsnorm

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}.$$

Beispiel 1.1.4. Sei \mathcal{H} ein komplexer Hilbertraum, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ die Menge der beschränkten Operatoren auf \mathcal{H} mit der Operatornorm und $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine abgeschlossene Unter algebra, die unter dem Bilden des Adjungierten Operators a^* invariant ist. Dann ist A eine C^* -Algebra. Beispiele sind $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ selbst und die Menge $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ der kompakten Operatoren auf \mathcal{H} .

Proposition 1.1.5. Für jede C^* -Algebra A gibt es eine unitale C^* -Algebra \tilde{A} , die A als ein abgeschlossenes Ideal enthält. Ist A nicht unital, so ist A ein maximales Ideal in \tilde{A} von Codimension 1.

Beweis. Sei $\mathcal{L}(A)$ die Algebra der beschränkten Endomorphismen von A mit der Operatornorm und $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(A)$ gegeben durch $\pi(a)b := ab$. Dann ist π ein Algebra-Morphismus und

$$\|\pi(a)\| = \sup_{\|b\| \leq 1} \|\pi(a)b\| \leq \|a\|.$$

Andererseits gilt

$$\|a\|^2 = \|aa^*\| = \|\pi(a)a^*\| \leq \|\pi(a)\| \|a^*\| = \|\pi(a)\| \|a\|,$$

also ist π eine Isometrie und insbesondere injektiv. Weiterhin ist $\pi(A)$ abgeschlossen, da A vollständig ist.

Sei \tilde{A} die Menge aller Elemente der Form $\pi(a) + z \text{id}_A$, $a \in A, z \in \mathbb{C}$. Dann ist \tilde{A} eine Unteralgebra von $\mathcal{L}(A)$ und $\pi(A)$ ein Ideal in \tilde{A} . Weiter gilt $\tilde{A}/\pi(A) = 0$ oder $\tilde{A}/\pi(A) = \mathbb{C}$, also ist \tilde{A} abgeschlossen. Mit der Involution

$$(\pi(a) + z \text{id}_A)^* := \pi(a^*) + \bar{z} \text{id}_A$$

wird \tilde{A} zu einer Banach-*-Algebra.

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $b \in A, \|b\| \leq 1$, mit

$$\begin{aligned} \|\pi(a) + z \text{id}_A\|^2 &\leq \varepsilon + \|ab + zb\|^2 = \varepsilon + \|b^*(\pi(a^*) + \bar{z} \text{id}_A)(\pi(a) + z \text{id}_A)b\| \\ &\leq \varepsilon + \|(\pi(a^*) + \bar{z} \text{id}_A)(\pi(a) + z \text{id}_A)b\| \\ &\leq \varepsilon + \|(\pi(a) + z \text{id}_A)^*(\pi(a) + z \text{id}_A)\|. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt C*-Norm-Eigenschaft und somit die Behauptung. \square

17.10.2016

Definition 1.1.6 (Spektrum und Spektralradius). Sei A eine unitale Algebra und $a \in A$. Das Spektrum von a ist

19.10.2016

$$\sigma(a) := \sigma_A(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid z - a \text{ nicht invertierbar in } A\}$$

und der Spektralradius

$$\varrho(a) := \varrho_A(a) := \sup \sigma_A(a).$$

Für eine (nicht notwendig unitale) C*-Algebra definiert man

$$\sigma(a) := \sigma_A(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a), \quad \varrho(a) := \varrho_A(a) := \varrho_{\tilde{A}}(a).$$

Proposition 1.1.7. Sei A eine unitale Banachalgebra (oder eine nicht notwendig unitale C*-Algebra). Für alle $a \in A$ ist $\sigma(a) \neq \emptyset$ kompakt und die Resolvente R_a , definiert durch

$$R_a(z) := (z - a)^{-1}, \quad \forall z \notin \sigma(a),$$

eine holomorphe Funktion $\mathbb{C} \setminus \sigma(a) \rightarrow A$.² Weiter gilt $\varrho(a) \leq \|a\|$.

Beweis. Aus der geometrischen Summenformel folgt

$$R_a(z) = (z - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n-1}, \quad \forall z: |z| > \|a\|,$$

mit absoluter Konvergenz der Reihe. Damit ist R_a holomorph auf $\{|z| > \|a\|\}$, $\sigma(a)$ in der Kugel um 0 mit Radius $\|a\|$ enthalten und $\varrho(a) \leq \|a\|$.

²Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und E ein Banachraum, so heißt $f : U \rightarrow E$ holomorph, falls es für jedes $z_0 \in U$ Vektoren $f_n \in E$ gibt, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$ positiven Konvergenzradius $r > 0$ hat und für $|z - z_0| < r$ und $z \in U$ gilt $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z - z_0)^n$. Für die Theorie der holomorphen (analytischen) Funktionen mit Werten in einem Banachraum siehe [9, Chapter IX].

Ist $z_0 \notin \sigma(a)$, d.h. $z - a$ invertierbar, so gilt analog für $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z - z_0| < \frac{1}{\|(z_0 - a)^{-1}\|},$$

dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z_0 - a)^{-n-1} (z - z_0)^n$$

absolut gegen $(z - a)^{-1}$ konvergiert, d.h. $z \notin \sigma(a)$ und R_a ist in der Umgebung von z_0 holomorph. Insbesondere ist $\sigma(a)$ abgeschlossen und somit kompakt.

Wäre $\sigma(a) = \emptyset$, so wäre R_a eine ganze Funktion. Es gilt aber für $|z| > \|a\|$

$$|R_a(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|a\|^n |z|^{-n-1} = \frac{1}{|z| - \|a\|},$$

d.h.

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} R_a(z) = 0.$$

Da R_a ganz ist, ist R_a auf \mathbb{C} beschränkt und folglich konstant = 0, nach dem Satz von Liouville. Dies ist offensichtlich absurd, Widerspruch! \square

Korollar 1.1.8. *Es gilt*

$$\varrho(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}. \quad (1.1.1)$$

Im *Beweis* verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 1.1.9. *Für $p \in \mathbb{C}[z]$ und $a \in A$ gilt*

$$\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)).$$

Beweis. Sei $w \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$w - p(z) = c \prod_j (z - z_j)$$

für gewisse $z_j \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}^\times$. Man beachte, dass

$$\{z_1, \dots, z_n\} = p^{-1}(w).$$

Dann ist

$$w - p(a) = c \prod_j (a - z_j).$$

Dann ist $w - p(a)$ nicht invertierbar genau dann, wenn es ein j gibt, so dass $a - z_j$ nicht invertierbar ist. Solch ein j gibt es genau dann, wenn

$$\sigma(a) \cap p^{-1}(w) \neq \emptyset$$

ist, oder anders gesagt, wenn $w \in p(\sigma(a))$. \square

Beweis von Korollar 1.1.8. Aus dem Beweis von Proposition 1.1.7 haben wir

$$R_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n-1}, \quad \forall |z| > \|a\|.$$

Da R_a analytisch ist auf $\{|\cdot| > \varrho(a)\}$, folgt aus dem Satz von Abel, dass die obige Reihe für $|z| > \varrho(a)$ absolut konvergiert, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\| r^{-n-1} = 0, \quad \forall r > \varrho(a).$$

Damit ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\| z^n$ größer oder gleich $\varrho(a)^{-1}$, oder

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} \leq \varrho(a).$$

Da $\sigma(a)$ nicht leer und kompakt ist, gibt es $z \in \sigma(a)$ mit $|z| = \varrho(a)$. Wegen Lemma 1.1.9 folgt $z^n \in \sigma(a^n)$, also

$$\varrho(a) = |z^n|^{1/n} \leq \|a^n\|^{1/n},$$

aufgrund von Proposition 1.1.7. Es folgt

$$\varrho(a) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n},$$

also die Behauptung. □

Korollar 1.1.10. Sei A eine C^* -Algebra und $a \in A$ normal. Dann gilt

$$\|a\| = \varrho(a).$$

Insbesondere gilt dies für alle $a \in A$, wenn A kommutativ ist.

Beweis. Sei zunächst a selbstadjungiert. Dann folgt

$$\|a^{2^n}\|^{2^{-n}} = [\| (a^{2^{n-1}})^* (a^{2^{n-1}}) \|^{1/2}]^{2^{-n+1}} = \|a^{2^{n-1}}\|^{2^{-n+1}} = \dots = \|a\|,$$

also mit Korollar 1.1.8

$$\varrho(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|a\|,$$

d.h., die Behauptung im selbstadjungierten Fall. Ist a normal, so folgt

$$\begin{aligned} \varrho(a)^2 &\leq \|a\|^2 = \|a^*a\| = \varrho(a^*a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a^*a)^n\|^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a^*)^n a^n\|^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|(a^*)^n\|^{1/n} \|a^n\|^{1/n} = \varrho(a)^2, \end{aligned}$$

also die Behauptung im allgemeinen. □

Definition 1.1.11 (Maximales Spektrum). Sei A eine Banach- $*$ -Algebra und $\text{Spec}_m(A)$ das *maximale Spektrum*, d.h. die Menge der von 0 verschiedenen Algebra-Morphismen

$$\chi : A \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Lemma 1.1.12. Sei A eine unitale Banach- $*$ -Algebra oder eine nicht notwendig unitale C^* -Algebra. Es gilt

$$\|\chi\| \leq 1, \quad \forall \chi \in \text{Spec}_m(A).$$

Insbesondere sind alle $\chi \in \text{Spec}_m(A)$ stetig.

Definition 1.1.13 (Gelfand-Spektrum). Sei A' der Raum aller stetigen linearen Funktionale auf A . Gemäß Lemma 1.1.12 ist

$$\text{Spec}_m(A) \subseteq A'.$$

Wir versehen A' mit der schwach*-Topologie (d.h. $\sigma(A', A)$), d.h. die Relativtopologie bzgl. der Injektion

$$A' \longrightarrow \prod_{a \in A} \mathbb{C} : \mu \longmapsto (\mu(a))_{a \in A},$$

wobei auf dem direkten Produkt die Produkttopologie betrachtet werde. Sei \widehat{A} die Menge $\text{Spec}_m(A)$, mit der Relativtopologie von A' versehen. Der Raum \widehat{A} heißt *Gelfand-Spektrum* von A .

Proposition 1.1.14. Sei A eine kommutative C^* -Algebra. Dann ist \widehat{A} lokal-kompakt und kompakt, falls A unital ist.

Beweis. Wegen Lemma 1.1.12 ist \widehat{A} beschränkt in A' :

$$|\chi(a)| \leq \|a\|, \quad \forall a \in A, \chi \in \widehat{A}.$$

Nach dem Satz von Banach-Alaoglu (Proposition A.1.11) ist \widehat{A} folglich relativ kompakt in der schwach*-Topologie. Damit ist \widehat{A} kompakt, falls A unital ist, denn für jeden Algebra-Morphismus $\chi \neq 0 : A \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt $\chi(1) = 1$, so dass $\widehat{A} \subseteq A'$ durch stetige polynomiale Gleichungen definiert und somit abgeschlossen ist.

Im allgemeinen ist $(\widetilde{A})^\wedge$ kompakt. Man definiert eine Injektion

$$\widehat{A} \longrightarrow (\widetilde{A})^\wedge : \chi \longmapsto \widetilde{\chi}$$

durch

$$\widetilde{\chi}(a + z \text{id}_A) := \chi(a) + z.$$

Diese Injektion ist per Definition der Topologie stetig und offen auf ihr Bild. Das Bild ist

$$(\tilde{A})^\wedge \setminus \{\chi_0\}, \quad \chi_0(a + z \operatorname{id}_A) := z.$$

Dies ist offen, da \tilde{A}' Hausdorff ist (nach dem Satz von Hahn-Banach). Also ist \hat{A} lokal-kompakt. □

L 19.10.2016

Theorem 1.1.15 (Gelfand-Naimark). Sei A eine kommutative C*-Algebra. Die Gelfand-Abbildung 24.10.2016

$$\Gamma : A \longrightarrow C_0(\hat{A}), \quad \Gamma(a)(\chi) := \chi(a)$$

ist ein isometrischer *-Isomorphismus.

Im Beweis verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 1.1.16. Sei A eine C*-Algebra. Ist A unital und $u \in A$ ein unitäres Element, so gilt $\sigma(u) \subseteq U(1)$. Ist $a \in A$ selbstadjungiert, so ist $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis. Sei A unital und $u \in A$ unitär. Aus $z \in \sigma(u)$ folgt $z^{-1} \in \sigma(u^{-1})$. Aus Korollar 1.1.10 folgt

$$|z| \leq \varrho(u) = \|u\| = 1, \quad |z^{-1}| \leq \varrho(u^{-1}) = \|u^{-1}\| = 1,$$

da u normal ist. Somit $|z| = 1$ und $\sigma(u) \subseteq U(1)$.

Ist A beliebig und $a = a^*$, so gilt in \tilde{A} :

$$\exp(ia) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ia)^n \in \tilde{A}.$$

Weiterhin

$$\exp(ia)^* = \exp(-ia) = \exp(ia)^{-1},$$

also ist $\exp(ia)$ unitär in \tilde{A} und $\sigma(\exp(ia)) \subseteq U(1)$.

Sei $z \in \sigma(a)$ und man nehme an, dass $z \notin \mathbb{R}$, so dass $e^{iz} \notin U(1)$. Dann ist $e^{iz} - \exp(ia)$ invertierbar. Da die Menge der invertierbaren Elemente in \tilde{A} und $C \setminus \sigma(\exp(ia))$ offen sind, gibt es ein $n \geq 0$, so dass mit

$$p_n(t) := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (it)^k$$

gilt $p_n(z) - p_n(a)$ ist invertierbar, oder

$$p_n(z) \notin \sigma(p_n(a)) = p_n(\sigma(a)) \ni p_n(z),$$

gemäß Lemma 1.1.9. Widerspruch! Damit ist $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. □

Beweis von Theorem 1.1.15. Sei $\chi \in \widehat{A}$ und $a \in A$. Dann ist $\chi(a) - a \in \ker \chi$, also nicht invertierbar, da $\ker \chi$ ein maximales Ideal ist. Somit ist $\chi(a) \in \sigma(a)$. Umgekehrt ist für $z \in \sigma(a)$, $z \neq 0$, $z - a$ in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \neq A$ enthalten. Dies definiert einen Algebra-Morphismus $\chi : A \rightarrow A/\mathfrak{m} = \mathbb{C}$ mit $\chi(a) = z$, insbesondere $\chi \neq 0$, also $\chi \in \widehat{A}$. Damit gilt

$$\{\chi(a) \mid \chi \in \widehat{A}\} \cup 0 = \sigma(a) \cup 0, \quad \forall a \in A.$$

Aus Lemma 1.1.16 folgt $\chi(a) \in \mathbb{R}$ für $a = a^*$ und somit

$$\chi(a^*) = \overline{\chi(a)}, \quad \forall a \in A.$$

Damit ist Γ ein $*$ -Morphismus. Da A kommutativ ist, zeigt Korollar 1.1.10, dass

$$\|a\| = \varrho(a) = \sup\{\|z\| \mid z \in \sigma(a)\} = \sup\{|\chi(a)| \mid \chi \in \widehat{A}\} = \|\Gamma(a)\|_\infty$$

für alle $a \in A$, so dass Γ eine Isometrie ist.

Um zu zeigen, dass Γ ein $*$ -Isomorphismus ist, reicht es einzusehen, dass Γ dichtes Bild hat. Nach dem Satz von Stone-Weierstrass reicht es dafür zu zeigen, dass $\Gamma(A)$ die Punkte von \widehat{A} trennt und es für alle $\chi \in \widehat{A}$ ein $a \in A$ mit $\Gamma(a)(\chi) \neq 0$ gibt. Beides ist offensichtlich aus der Definition von \widehat{A} . Also folgt die Behauptung. \square

Korollar 1.1.17. Sei A eine C^* -Algebra und $a \in A$ normal. Es sei $B = C^*(a)$ die kleinste C^* -Unteralgebra von A , die a enthält. Dann ist

$$\sigma_B(a) \setminus \{0\} = \sigma_A(a) \setminus \{0\}.$$

Für $z \in \sigma_A(a) \setminus \{0\}$ existiert ein eindeutiges $\chi_z \in \widehat{B}$ mit $\chi_z(a) = z$. Die Abbildung

$$\Phi_a : B = C^*(a) \rightarrow \mathcal{C}_0(\sigma_A(a) \setminus \{0\}), \quad \Phi_a(b)(z) := \chi_z(b)$$

ist ein $*$ -Isomorphismus. Weiterhin setzt sich Φ_a zu einem $*$ -Isomorphismus

$$\widetilde{A} \supseteq \widetilde{B} = C^*(1, a) \rightarrow \mathcal{C}(\sigma_A(a))$$

fort.

Beweis. Übung. \square

Definition 1.1.18 (Stetiger Funktionalkalkül). Für ein normales Element a einer C^* -Algebra heißt Φ_a^{-1} , wobei Φ_a der Isomorphismus aus Korollar 1.1.17 ist, der (stetige) Funktionalkalkül von a . Ist a normal und $f \in \mathcal{C}_0(\sigma(a) \setminus \{0\})$, so definieren wir

$$f(a) := \Phi_a^{-1}(f).$$

Analog benutzen wir diese Notation für $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$.

Korollar 1.1.19. Sei $a \in A$ normal und $f \in \mathcal{C}(\sigma(a))$, $g \in \mathcal{C}(\sigma(f(a)))$. Dann gilt

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)), \quad g(f(a)) = (g \circ f)(a).$$

Beweis. Es gilt $\Phi_a(a) = \text{id}_{\sigma(a)}$, denn

$$\Phi_a(a)(z) = \chi_z(a) = z, \quad \forall z \in \sigma(a).$$

Weiterhin $\Phi_a(1) = 1$, also

$$\Phi_a(z - f(a)) = z - \Phi_a(f(a)) = z - f.$$

Diese Funktion ist invertierbar genau dann, wenn $z \notin f(\sigma(a))$, d.h. es gilt

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Schließlich gilt $g(f(a)) \in C^*(1, f(a)) \subseteq C^*(1, a)$ und

$$\Phi_a((g \circ f)(a)) = g \circ f.$$

Sei (g_k) eine Folge von Polynomen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = g$ gleichmäßig auf $\sigma(a)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g \circ f &= \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \circ f = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k \circ \Phi_a(f(a)) \\ &= \lim_k \Phi_a(g_k(f(a))) = \Phi_a(g(f(a))). \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

Bemerkung 1.1.20. Sei A eine C*-Algebra und $a \in A$ normal. Dann ist a selbstadjungiert genau dann, wenn $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. In der Tat ist die Bedingung notwendig nach Lemma 1.1.16. Umgekehrt gilt $a^* = f(a)$ mit $f(z) = \bar{z}$, da Φ_a ein *-Isomorphismus ist (Korollar 1.1.17). Ist $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$, ist $f = \text{id}$ auf $\sigma(a)$, also folgt die Behauptung.

Beispiel 1.1.21. Sei $a = a^*$, so dass $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren

$$a_+, a_-, |a| \in A$$

durch die Funktionen

$$(\cdot)_+ := \max(\cdot, 0), \quad (\cdot)_- := (\cdot)_+ - \text{id}_{\mathbb{R}}, \quad |\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Es gilt $\sigma(a_+), \sigma(a_-), \sigma(|a|) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ und

$$a = a_+ - a_-, \quad |a| = a_+ + a_-, \quad a_+ a_- = 0.$$

Beispiel 1.1.22. Sei $a = a^*$ und $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dann definieren wir

$$a^{1/2} := \sqrt{a}$$

über die Funktion

$$(\cdot)^{1/2} = \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Dann ist $a^{1/2}$ selbstadjungiert nach Bemerkung 1.1.20 und

$$a = (a^{1/2})^2.$$

Wir werden in Kürze sehen, dass $\sigma(a^*a) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ für jedes $a \in A$. Damit werden wir die Definition des Absolutbetrags ausdehnen durch

$$|a| := |a^*a|^{1/2}.$$

1.2 Positive Elemente

Im folgenden sei A eine C^* -Algebra.

Definition 1.2.1 (Positive Elemente). Ein Element $a \in A$ heißt *positiv*, falls a normal ist und

$$\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

In Symbolen schreibt man $a \geq 0$. Für $a, b \in A$ schreibt man $a \leq b$ oder $b \geq a$, falls $b - a \geq 0$. Ist $B \subseteq A$ eine Teilmenge, so ist B_+ die Menge der positiven Elemente in B .

Theorem 1.2.2 (Fukumiya, Kelley-Vaught). Die Menge A_+ ist ein abgeschlossener konvexer Kegel in A_{sa} , der Menge der selbstadjungierten Elemente von A , und $a \geq 0$ genau dann, wenn $a = b^*b$ für ein $b \in A$.

⌊ 24.10.2016

⌋ 26.10.2016

Im Beweis benutzen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.2.3. Sei $a \in A$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i) Das Element a ist positiv.
- (ii) Es gibt ein $b \in A_{sa}$ mit $a = b^2$.
- (iii) Es gilt $a \in A_{sa}$ und $\|t - a\| \leq t$ für alle $t \geq \|a\|$.
- (iv) Es gilt $a \in A_{sa}$ und $\|t - a\| \leq t$ für ein $t \geq \|a\|$.

Beweis. Es gilt (i) \implies (ii) nach Beispiel 1.1.22 und die Umkehrung folgt aus Korollar 1.1.19.

(i) \implies (iii). Nach Korollar 1.1.10 und Korollar 1.1.19 gilt

$$\begin{aligned} \|t - a\| &= \varrho(t - a) = \sup|\sigma(t - a)| = \sup|t - \sigma(a)| \\ &= \sup\{|t - z| \mid z \in \sigma(a)\} = \sup\{t - |z| \mid z \in \sigma(a)\} \leq t \end{aligned}$$

falls $t \geq \|a\| = \varrho(a)$. Die Implikation (iii) \implies (iv) ist trivial.

(iv) \implies (i). Sei $z \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ und t wie in der Annahme. Dann gilt $t - z \in \sigma(a)$ und $z \leq |z| \leq \varrho(a) \leq \|a\|$ und

$$t - z = |t - z| \leq \varrho(t - a) \leq \|t - a\| \leq t.$$

Es folgt, dass $z \geq 0$. □

Beweis von Theorem 1.2.2. Offensichtlich ist $A_+ \subseteq A_{sa}$ invariant unter der Multiplikation mit nicht-negativen Zahlen (z.B. nach Korollar 1.1.19). Um zu zeigen, dass A_+ unter Addition abgeschlossen ist, seien $a, b \in A_+$ und $s \geq \|a\|$ und $t \geq \|b\|$. Nach Lemma 1.2.3 (iii) gilt

$$\|(s + t) - (a + b)\| \leq \|s - a\| + \|t - b\| \leq s + t,$$

also $a + b \in A_+$ nach Lemma 1.2.3 (iv).

Um sehen, dass A_+ abgeschlossen ist, beobachte man zunächst, dass A_{sa} abgeschlossen ist und nehme $a_k \in A_+$ und $a \in A_{sa}$ mit $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$. Sei $t \geq \sup_k \|a_k\|$. Dann ist $t \geq \|a\|$ und

$$\|t - a\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|t - a_k\| \leq t,$$

also ist wie oben $a \in A_+$.

Ist $a \geq 0$, so ist $a = b^2 = b^*b$ für ein selbstadjungiertes b nach Lemma 1.2.3 (ii). Ist umgekehrt $a = b^*b$ für ein $b \in A$, so ist a selbstadjungiert. Nach Beispiel 1.1.21 ist $a = a_+ - a_-$ für positive a_{\pm} mit $a_+a_- = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} (ba_-^{1/2})^*(ba_-^{1/2}) &= a_-^{1/2}b^*ba_-^{1/2} = a_-^{1/2}(a_+ - a_-)a_-^{1/2} \\ &= (a_-a_+)^{1/2}(a_+a_-)^{1/2} - a_-^2 = -a_-^2 \in -A_+ \end{aligned}$$

nach Lemma 1.2.3. Andererseits seien $x, y \in A_{sa}$ mit $ba_-^{1/2} = x + iy$. Dann gilt

$$(ba_-^{1/2})(ba_-^{1/2})^* = x^2 + y^2 + i(yx - xy) = 2(a^2 + b^2) - (ba_-^{1/2})^*(ba_-^{1/2}) \in A_+,$$

da A_+ ein konvexer Kegel ist. Damit ist

$$-\sigma(a_-^2) \cup \{0\} = \sigma((ba_-^{1/2})^*(ba_-^{1/2})) \cup \{0\} = \sigma((ba_-^{1/2})(ba_-^{1/2})^*) \cup \{0\} = \{0\}$$

(vgl. Übungen). Daraus folgt $a_-^2 = 0$, aber mit der C*-Norm-Identität ist damit $a_- = 0$ und $a = a_+ \geq 0$. □

Beispiel 1.2.4. Sei $a \in A$. Dann ist $a^*a \geq 0$ nach Theorem 1.2.2. Wir definieren

$$|a| := (a^*a)^{1/2} \geq 0,$$

der *Absolutbetrag* von a .

Korollar 1.2.5. Sei $a \leq b$ und $x \in A$. Dann gilt $x^*ax \leq x^*bx$ und $b \leq \|b\|$ in \tilde{A} . Ist zusätzlich $a \geq 0$, so folgt $\|a\| \leq \|b\|$.

Beweis. Es gilt $b - a = c^*c$ für ein $c \in A$. Es folgt

$$x^*bx - x^*ax = x^*c^*cx = (cx)^*(cx) \in A_+$$

mit Theorem 1.2.2.

Ist weiter $a \geq 0$, so gilt in \tilde{A} :

$$\sigma(\|b\| - b) = \|b\| - \sigma(b) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0},$$

da $\varrho(a) \leq \|a\|$ und wegen Korollar 1.1.19. Es folgt $b \leq \|b\|$ und damit $a \leq \|b\|$. Für $z \in \sigma(a)$ gilt

$$\|b\| - z \in \sigma(\|b\| - a) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Da $z \geq 0$, folgt

$$\|b\| - \|a\| = \inf\{\|b\| - z \mid z \in \sigma(a)\} \geq 0,$$

also die Behauptung. □

Korollar 1.2.6. Sei A unital und seien a, b invertierbare Elemente mit $0 \leq a \leq b$. Dann gilt $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Beweis. Es gilt $b^{-1} \geq 0$ aufgrund von Korollar 1.1.19. Aus Korollar 1.2.5 folgt aus der Voraussetzung $b^{-1/2}ab^{-1/2} \leq 1$ und folglich

$$\|a^{1/2}b^{-1/2}\| = \|b^{-1/2}ab^{-1/2}\|^{1/2} \leq 1.$$

Es folgt

$$a^{1/2}b^{-1}a^{1/2} \leq \|a^{1/2}b^{-1}a^{1/2}\| = \|a^{1/2}b^{-1/2}\|^2 \leq 1,$$

also

$$b^{-1} = a^{-1/2}(a^{1/2}b^{-1}a^{1/2})a^{-1/2} \leq a^{-1/2}1a^{-1/2} = a^{-1}.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Definition 1.2.7 (Operator-monoton wachsende Funktionen). Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Dann heißt f *operator-monoton wachsend*, falls $f(a) \leq f(b)$, wann immer $a \leq b$, wobei $a, b \in A$ normale Elemente mit $\sigma(a) \cup \sigma(b) \subseteq I$ seien und A eine beliebige C^* -Algebra sei. Analog definiert man "*operator-monoton fallend*".

Beispiel 1.2.8. Für $\alpha > 0$ sei

$$f_\alpha : (-1/\alpha, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_\alpha(t) := \frac{t}{1 + \alpha t} = \frac{1}{\alpha} (1 - (1 + \alpha t)^{-1}).$$

Aus Korollar 1.2.6 folgt, dass f_α operator-monoton wachsend ist.

Die Funktionen f_α haben die folgenden Eigenschaften:

- (i) $f_\alpha(t) < \min(t, 1/\alpha)$,
- (ii) $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} f_\alpha(t) = t$ gleichmäßig für t in kompakten Teilmengen von \mathbb{R} ,
- (iii) $f_\alpha \geq f_\beta$ für $\alpha \leq \beta$,
- (iv) $f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta}$ auf $(-(\alpha + \beta)^{-1}, \infty)$,
- (v) $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha f_\alpha(t) = 1$ gleichmäßig für t in kompakten Teilmengen von $(0, \infty)$.

Proposition 1.2.9. Sei $0 < \beta \leq 1$. Dann ist $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t^\beta$, operator-monoton wachsend.

Beweis. Es gilt

$$\int_0^\infty f_\alpha(t) \alpha^{-\beta} d\alpha = C t^\beta, \quad C := \int_0^\infty (1 + \alpha)^{-1} \alpha^\beta d\alpha > 0.$$

Seien $0 \leq a \leq b$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt $n, m \geq 1$, so dass mit $\alpha_k = \frac{kn}{m}$ gilt

$$\left| t^\beta - \frac{n}{Cm} \sum_{k=0}^m f_{\alpha_k}(t) \alpha_k^{-\beta} \right| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, \|b\|].$$

Da $f_{\alpha_k}(b) - f_{\alpha_k}(a) \geq 0$ und A_+ nach Theorem 1.2.2 ein konvexer Kegel ist, folgt $c := \frac{n}{Cm} \sum_{k=0}^m (f_{\alpha_k}(b) - f_{\alpha_k}(a)) \alpha_k^{-\beta} \geq 0$ und

$$\|b^\beta - a^\beta - c\| \leq 2\varepsilon,$$

da der Funktionalkalkül eine Isometrie ist. Es folgt mit Korollar 1.2.5:

$$b^\beta - a^\beta - c \geq -\|b^\beta - a^\beta - c\| \geq -2\varepsilon,$$

also, da A_+ ein konvexer Kegel ist:

$$b^\beta - a^\beta + 2\varepsilon = (b^\beta - a^\beta - c + 2\varepsilon) + c \geq 0.$$

Da ε beliebig war und A_+ abgeschlossen ist, folgt die Behauptung. □

1.3 Fasteinsen und Faktorisierung

Aus der Topologie ist die folgende Verallgemeinerung von Folgen und deren Konvergenz bekannt.

Definition 1.3.1 (Netze und Konvergenz). Eine Menge $\Lambda \neq \emptyset$ heißt *gerichtet* (Englisch: directed), falls mit einer Präordnung (Englisch: preorder) \leq versehen (d.h. \leq ist reflexiv und transitiv), so dass folgendes gilt: Zu $\lambda, \mu \in \Lambda$ gibt es stets $\nu \in \Lambda$ mit $\lambda \leq \nu$ und $\mu \leq \nu$.

Ein *Netz* (Englisch: net) auf einer Menge X ist eine Familie $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $x_\lambda \in X$ für alle $\lambda \in \Lambda$, wobei Λ eine gerichtete Menge ist.

Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein Netz auf X . Man sagt, (x_λ) *konvergiere* gegen x , in Symbolen $x = \lim_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$, falls es für alle Umgebungen U von x ein $\lambda_0 \in \Lambda$ gibt, so dass für alle $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda_0 \leq \lambda$ gilt $x_\lambda \in U$. Man sagt auch, x sei der *Grenzwert* (Englisch: limit) von $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Falls X ein Hausdorffraum ist, ist x dadurch eindeutig bestimmt.

Mithilfe dieser Begriffe kann man den Begriff einer "Fasteins" (Englisch: approximate unit) definieren.

Definition 1.3.2 (Fasteins). Ein Netz $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A_+$ mit $\|u_\lambda\| \leq 1$ und $u_\lambda \leq u_\mu$ für $\lambda \leq \mu$ heißt *Fasteins*, falls für alle $a \in A$ in A gilt:

$$a = \lim_{\lambda \in \Lambda} au_\lambda.$$

Dann gilt

$$\|(1 - u_\lambda)a\| = \|a^*(1 - u_\lambda)\| \longrightarrow 0,$$

also auch

$$a = \lim_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda a.$$

⌊ 26.10.2016

⌋ 26.10.2016

Theorem 1.3.3. *Jede C^* -Algebra A hat eine Fasteins.*

Beweis. Sei

$$\Lambda := \{x \in A_+ \mid \|x\| < 1\}$$

mit der (Prä-) Ordnung \leq von A_+ . Wir zeigen zunächst, dass Λ *gerichtet* ist. Seien dazu $x, y \in \Lambda$. Nach Korollar 1.1.19 gilt $a := (1 - x)^{-1}x, b := (1 - y)^{-1}y \in A_+$. Sei $z := f_1(a + b)$. Dann gilt mit Beispiel 1.2.8, dass

$$z \geq f_1(a) = (1 + (1 - x)^{-1}x)^{-1}(1 - x)^{-1}x = x$$

und analog $z \geq y$.

Es reicht zu zeigen, dass $a = \lim_{x \in \Lambda} ax$ für alle $a \in A_+$, da A der lineare Aufspann von A_+ ist. Für $x \in \Lambda$ gilt $(1-x)^2 \leq 1-x$ nach Korollar 1.2.5 und folglich für $a \in A_+$:

$$\|a(1-x)\|^2 = \|a(1-x)^2a\| \leq \|a(1-x)a\|.$$

Andererseits gilt für $\alpha > 0$: $\alpha f_\alpha(a) \in \Lambda$

$$a(1 - \alpha f_\alpha(a))a = (1 + \alpha a)^{-1}a^2 \leq \alpha^{-1}a,$$

also

$$\|a(1 - \alpha f_\alpha(a))a\| \leq \alpha^{-1}\|a\|.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und $\alpha \geq \varepsilon^{-2}\|a\|$. Setze $x_0 := \alpha f_\alpha(a)$. Sei $x \in \Lambda$, $x \geq x_0$. Da $\|a(1-x)a\|$ für $x \in \Lambda$ ein fallendes Netz ist (nach Korollar 1.2.5), folgt

$$\|a(1-x)\| \leq \|a(1-x)a\|^{1/2} \leq \|a(1 - \alpha f_\alpha(a))a\|^{1/2} \leq \alpha^{-1/2}\|a\|^{1/2} \leq \varepsilon,$$

also die Behauptung. □

Korollar 1.3.4. Sei A eine separable C*-Algebra (d.h. A enthält eine dichte Folge). Dann gibt es eine abzählbare Fasteins $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Proposition 1.3.5. Sei $x^*x \leq a$. Für jedes $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ gibt es ein $b \in A$ mit $\|b\| \leq \|a^{1/2-\alpha}\|$ und $x = ba^\alpha$.

Beweis. Seien

$$g_n(t) := \frac{t^{1-\alpha}}{(\frac{1}{n} + t)^{1/2}}, \quad d_{mn} := \left(\frac{1}{m} + a\right)^{-1/2} - \left(\frac{1}{n} + a\right)^{-1/2}.$$

Dann ist (g_n) wachsend, also nach dem Satz von Dini auf $[0, \|a\|]$ gleichmäßig konvergent gegen $\text{id}^{1/2-\alpha}$. Die Folge $b_n := x\left(\frac{1}{n} + a\right)^{-1/2}a^{1/2-\alpha}$ ist Cauchy, denn

$$\begin{aligned} \|b_m - b_n\|^2 &= \|x d_{mn} a^{\frac{1}{2}-\alpha}\|^2 = \|a^{\frac{1}{2}-\alpha} d_{mn} x^* x d_{mn} a^{\frac{1}{2}-\alpha}\| \\ &\leq \|a^{\frac{1}{2}-\alpha} d_{mn} a d_{mn} a^{\frac{1}{2}-\alpha}\| = \|d_{mn} a^{1-\alpha}\|^2 \\ &= \|g_m(a) - g_n(a)\|^2 \leq \|g_m - g_n\|^2 \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

nach Korollar 1.2.5 und Korollar 1.1.19, und weil $d_{mn} \in C^*(a)$.

Sei $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|b\| &\leq \sup_n \|b_n\| \\ &= \sup_n \|a^{1/2-\alpha} \left(\frac{1}{n} + a\right)^{-1/2} x^* x \left(\frac{1}{2} + a\right)^{-1/2} a^{1/2-\alpha}\|^{1/2} \leq \|a^{1/2-\alpha}\| \end{aligned}$$

und

$$ba^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x \left(\frac{1}{n} + a\right)^{-1/2} a^{1/2} = x.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Korollar 1.3.6. Sei $a \in A$ und $0 < \alpha < 1$. Dann gibt es ein $u \in A$ mit $a = u|a|^\alpha$.

Beweis. Es gilt $a^*a = |a|^2$, also gibt es nach Proposition 1.3.5 ein $u \in A$ mit $a = u(|a|^2)^{\alpha/2} = ua^\alpha$. \square

1.4 Ideale und Quotienten

Definition 1.4.1 (Erbliche Kegel). Ein Kegel $C \subseteq A_+$ heißt *erblich* (Englisch: hereditary), falls aus $0 \leq a \leq b$ und $b \in C$ folgt $a \in C$.

Proposition 1.4.2. Sei $L \subseteq A$ ein abgeschlossenes Linksideal. Dann ist L_+ (definiert als $A_+ \cap L$) erblich und für alle $a \in A$ gilt $a \in L$ genau dann, wenn $a^*a \in L_+$.

Beweis. Sei $x \in A$ mit $a^*a \leq b$, wobei $b \in L_+$. Mit Proposition 1.3.5 ist $a = cb^{1/2}$ für ein $c \in A$. Dann ist $C^*(b)$ wegen $b = b^*$ die von b erzeugte abgeschlossene Unteralgebra, also $b^{1/2} \in L$ und $a \in L$. Dies zeigt beide Behauptungen. \square

Korollar 1.4.3. Sei $J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist $J^* = J$.

Beweis. Da positive Elemente selbstadjungiert sind, gilt offensichtlich $(J^*)_+ = J_+$. Wegen Proposition 1.4.2 folgt

$$a \in J \implies a^*a \in J_+ = (J^*)_+ \implies a \in J^* \implies a^* \in J.$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Theorem 1.4.4 (I. Segal). Sei $J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist A/J mit der Norm

$$\|a + J\| := \|a\|_{A/J} := \inf\{\|b\| \mid b - a \in J\}$$

eine C^* -Algebra.

Im *Beweis* benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.4.5. Sei $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Fasteins von J . Dann gilt für alle $a \in A$

$$\|a\|_{A/J} = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a - au_\lambda\|.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $b \in J$ mit $\|a - b\| \leq \|a\|_{A/J} + \frac{\varepsilon}{2}$. Es gilt $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$ nach Korollar 1.2.5, also

$$\|a - au_\lambda\| \leq \|(a - b)(1 - u_\lambda)\| + \|b(1 - u_\lambda)\| \leq \|a - b\| + \|b - bu_\lambda\|.$$

Sei $\lambda_0 \in \Lambda$ derart, dass für $\lambda \geq \lambda_0$ gilt $\|b - bu_\lambda\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dann folgt

$$\|a\|_{A/J} \leq \|a - au_\lambda\| \leq \|a\|_{A/J} + \varepsilon,$$

also die Behauptung. \square

Beweis von Theorem 1.4.4. Da J ein abgeschlossenes Ideal ist, ist A mit der Quotientennorm eine Banachalgebra. Da nach Korollar 1.4.3 $J = J^*$ gilt, induziert $*$ von A eine antilineare Antiinvolution $*$ auf A/J . Es bleibt die C^* -Eigenschaft der Norm zu zeigen.

Sei $a \in A$. Es gilt nach Lemma 1.4.5

$$\|a\|_{A/J}^2 = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|a(1 - u_\lambda)\|^2 = \lim_{\lambda \in \Lambda} \|(1 - u_\lambda)a^*a(1 - u_\lambda)\| \leq \|a^*a\|,$$

da $\|1 - u_\lambda\| \leq 1$, wie wir oben gesehen haben. □

Theorem 1.4.6. *Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein *-Morphismus von C^* -Algebren. Dann ist ϕ normabnehmend und $\phi(A)$ eine C^* -Algebra. Ist ϕ injektiv, so ist ϕ eine Isometrie.*

Beweis. Für $a \in A$ ist $\sigma_B(\phi(a)) \subseteq \sigma_A(a)$. Ist a normal, so folgt

$$\|\phi(a)\| = \varrho_B(\phi(a)) \leq \varrho_A(a) = \|a\|.$$

Im allgemeinen hat man

$$\|\phi(a)\| = \|\phi(a^*a)\|^{1/2} \leq \|a^*a\|^{1/2} = \|a\|.$$

Inbesondere ist ϕ stetig und $\ker \phi$ abgeschlossen. Es reicht nach Theorem 1.4.4 anzunehmen, dass ϕ injektiv ist.

Es reicht weiterhin nach den obigen Überlegungen zu zeigen, dass ϕ isometrisch auf positiven Elementen ist. Angenommen also, dass ϕ nicht isometrisch ist, gibt es ein $a \geq 0$ mit $r := \|\phi(a)\| < \|a\| =: s$. Sei $f \in \mathcal{C}([0, s])$ mit $f([0, r]) = 0$ und $f(s) = 1$. Dann gilt mit Korollar 1.1.19

$$0 = f(\phi(a)) = \phi(f(a)),$$

aber $f(a) \neq 0$, da der Funktionalkalkül injektiv ist. Widerspruch! □

L 7.11.2016

Korollar 1.4.7. *Sei $J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal und $B \subseteq A$ eine C^* -Unteralgebra. Dann ist $B + J$ eine C^* -Unteralgebra und*

9.11.2016

$$(B + J)/J \cong B/B \cap J$$

als C^* -Algebren.

Beweis. Sei $\pi : A \rightarrow A/J$ die kanonische Projektion. Dann ist $\pi(B)$ abgeschlossen nach Theorem 1.4.6, also auch $B + J = \pi^{-1}(\pi(B))$. Die Einschränkung der kanonischen Projektion $\phi : B + J \rightarrow (B + J)/J$ auf B induziert einen Ringisomorphismus $B/B \cap J \cong (B + J)/J$. Da ϕ ein *-Morphismus ist, gilt das auch für diesen Isomorphismus. □

1.5 Positive Linearformen

Definition 1.5.1. Eine Linearform $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *positiv* (Englisch: positive functional), falls $f(A_+) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sie heißt ein *Zustand* (Englisch: state), falls zusätzlich

$$\|\phi\| := \sup\{|\phi(a)| \mid \|a\| \leq 1\} = 1.$$

Wenn ϕ positiv ist, gilt offensichtlich $\phi(a^*) = \overline{\phi(a)}$ für alle $a \in A$

Proposition 1.5.2. Sei ϕ eine positive Linearform. Dann gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\phi(b^*a)| \leq \phi(a^*a)\phi(b^*b), \quad \forall a, b \in A.$$

Beweis. O.b.d.A. ist $\phi(b^*a) \neq 0$. Mit $z := -t\phi(a^*b)|\phi(b^*a)|^{-1}$ und $t > 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \phi((za + b)^*(za + b)) \\ &= |z|^2\phi(a^*a) + \bar{z}\phi(a^*b) + wz\phi(b^*a) + \phi(b^*b) \\ &= t^2\phi(a^*a) - 2t|\phi(b^*a)| + \phi(b^*b), \end{aligned}$$

also

$$|\phi(b^*a)| \leq \frac{1}{2}(t\phi(a^*a) + t^{-1}\phi(b^*b)).$$

Sind a_n, b_n Folgen in $\mathbb{R}_{>0}$ mit $a_n \rightarrow \sqrt{\phi(a^*a)}$ und $b_n \rightarrow \sqrt{\phi(b^*b)}$, so folgt mit $t_n := \frac{b_n}{a_n}$, dass

$$|\phi(b^*a)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(t_n\phi(a^*a) + t_n^{-1}\phi(b^*b)) = \sqrt{\phi(a^*a)\phi(b^*b)},$$

also die Behauptung. □

Proposition 1.5.3. Eine Linearform ϕ auf A ist positiv genau dann, wenn

$$\infty > \|\phi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \phi(u_\lambda)$$

für eine (bzw. für jede) Fasteins $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Für unittales A ist diese Bedingung äquivalent zu $\phi(1) = \|\phi\|$.

Im Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.5.4. Positive Linearformen sind stetig.

Beweis. Sei $\phi \geq 0$. Angenommen, ϕ ist nicht beschränkt auf

$$B_+ := \{a \in A_+ \mid \|a\| \leq 1\}.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt es dann $a_k \in B_+$ mit $\phi(a_k) \geq 2^{k+1}$. Dann gilt

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} a_k \in B_+$$

wegen Theorem 1.2.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\phi(a) \geq \phi\left(\sum_{k=0}^n 2^{-(k+1)} a_k\right) = \sum_{k=0}^n 2^{-(k+1)} \phi(a_k) \geq n + 1,$$

Widerspruch! Also ist ϕ beschränkt auf B_+ . Für beliebiges $a \in A$, $\|a\| \leq 1$ folgt

$$a = b_+ - b_- + i(c_+ - c_-), \quad b = \frac{1}{2}(a + a^*), \quad c = \frac{1}{2i}(a - a^*)$$

mit

$$\|b_{\pm}\| \leq \|b\| \leq \|a\| \leq 1$$

und analog $\|c_{\pm}\| \leq 1$. Damit

$$|\phi(a)| \leq |\phi(b_+)| + |\phi(b_-)| + |\phi(c_+)| + |\phi(c_-)| \leq 4 \sup \phi(B_+),$$

also ist ϕ beschränkt auf der Einheitskugel von A und somit stetig. \square

Beweis von Proposition 1.5.3. Ist $\phi \geq 0$ und $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, so ist $(\phi(u_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ ein wachsendes Netz mit Grenzwert $\alpha \leq \|\phi\|$. Für $\|a\| \leq 1$ gilt

$$|\phi(u_\lambda a)|^2 \leq \phi(u_\lambda^2) \phi(a^* a) \leq \phi(u_\lambda) \|\phi\| \|a^* a\| \leq \alpha \|\phi\|$$

mit Proposition 1.5.2 und da $u_\lambda^2 \leq u_\lambda$. Es folgt $|\phi(a)|^2 \leq \alpha \|\phi\|$, also $\|\phi\| \leq \alpha$ und somit $\|\phi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \phi(u_\lambda)$.

Umgekehrt sei ϕ stetig mit $\|\phi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \phi(u_\lambda)$ für ein Fasteins $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Wir zeigen zunächst, dass ϕ auf A_{sa} reell ist.

Sei dazu $a = a^*$ mit $\|a\| \leq 1$ und $\phi(a) = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. ist $y \geq 0$. Sei $n \geq 1$ beliebig und $\lambda_0 \in \Lambda$ derart, dass für alle $\lambda \geq \lambda_0$

$$\|au_\lambda - u_\lambda a\| \leq \frac{1}{n}.$$

Dann folgt für alle $\lambda \geq \lambda_0$

$$\|nu_\lambda - ia\|^2 = \|n^2 u_\lambda^2 + a^2 - in(au_\lambda - u_\lambda a)\| \leq n^2 + 2.$$

Es folgt

$$(n\|\phi\| + y)^2 + x^2 = |n\|\phi\| + y - ix|^2 = \lim_{\lambda \in \Lambda} |\phi(nu_\lambda - ia)|^2 \leq (n^2 + 2)\|\phi\|.$$

Da n beliebig war, folgt $y = 0$, also ist $\phi(a) \in \mathbb{R}$.

Sei $a \in A_+$, $\|a\| \leq 1$. Dann ist wegen Lemma 1.5.5 $\|u_\lambda - a\| \leq 1$ und

$$\|\phi\| - \phi(a) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \phi(u_\lambda - a) \leq \|\phi\|,$$

woraus $\phi(a) \geq 0$ folgt.

Ist A unital, so gilt $1 = \lim_{\lambda \in \Lambda} u_\lambda$, also ist $\phi(1) = \|\phi\|$ wegen der Stetigkeit von ϕ äquivalent zu $\|\phi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \phi(u_\lambda)$ für eine/jede Fasteins $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. \square

Lemma 1.5.5. Seien $a, b \in A_+$, $\|a\|, \|b\| \leq 1$. Dann gilt

$$\|a - b\| \leq 1.$$

Beweis. In $\mathcal{C}([0, 1])$ gilt $0 \leq \text{id} \leq 1$, d.h. $\sigma(a) \subseteq [0, 1]$ und folglich $0 \leq a \leq 1$. Damit folgt $0 \leq 1 - a \leq 1$ (analog für b), also

$$a - b \leq 1 - b \leq 1$$

und ebenso $b - a \leq 1$. Damit ist $|a - b| \leq 1$ und aus Korollar 1.2.5 folgt

$$\|a - b\| = \||a - b|\| \leq 1.$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

1.6 Darstellungen und die GNS-Konstruktion

Definition 1.6.1. Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum. Eine $*$ -Darstellung von A ist ein $*$ -Morphismus $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ein Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ heißt *zyklisch*, falls $\pi(A)\psi$ in \mathcal{H} dicht ist. Die Darstellung heißt *nicht ausgeartet*, falls $\pi(A)\mathcal{H}$ dicht in \mathcal{H} ist. Offenbar ist π nicht ausgeartet genau dann, wenn

$$\psi = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi(u_\lambda)\psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

für eine/jede Fasteins $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Beispiel 1.6.2 (Darstellungen und positive Linearformen). Sei (\mathcal{H}, π) eine $*$ -Darstellung von A und $\psi \in \mathcal{H}$. Dann ist ϕ , definiert durch

$$\phi(a) := \langle \psi | \pi(a)\psi \rangle, \quad \forall a \in A,$$

eine positive Linearform³, denn für $a \in A$ gilt

$$\phi(a^*a) = \|\pi(a)\psi\|^2 \geq 0.$$

Ist π nicht ausgeartet, so ist aufgrund von Proposition 1.5.3 ϕ ein Zustand genau dann, wenn $\|\psi\| = 1$.

Konstruktion 1.6.3 (GNS-Konstruktion). Die folgende Konstruktion geht auf Gelfand, Naimark und Segal zurück. Sei ϕ eine positive Linearform auf A . Sei

$$N := \{a \in A \mid \phi(a^*a) = 0\}.$$

Wegen Proposition 1.5.2 gilt $\phi(b^*a) = 0$, falls $a \in N$ oder $b \in N$ ist.

³Wir folgen der Konvention $\langle z\psi_1 | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \bar{z}\psi_2 \rangle = \bar{z}\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$.

Daher ist N ein Untervektorraum und die folgende Hermitesche Sesquilinearform wohldefiniert:

$$\langle [b] | [a] \rangle_\phi := \phi(b^*a), \quad \forall [a], [b] \in A/N.$$

Sie ist positiv semidefinit. Ist $\langle [a] | [a] \rangle_\phi = 0$, so folgt $a \in N$ und somit $[a] = 0$. Also ist $\langle \cdot | \cdot \rangle_\phi$ nicht-ausgeartet. Sei \mathcal{H}_ϕ die Vervollständigung von A/N zu einem Hilbertraum bzgl. der zugeordneten Norm. Sei $\| \cdot \|_\phi$ die Norm dieses Hilbertraums und bezeichne die stetige Fortsetzung von $\langle \cdot | \cdot \rangle_\phi$ zu einem Skalarprodukt auf \mathcal{H}_ϕ mit dem gleichen Buchstaben.

Ist $b \in N$ und $a \in A$, so gilt

$$\phi((ab)^*ab) = \phi((a^*ab)^*b) = 0$$

nach dem obigen Argument, also ist N ein Linksideal und A wirkt durch Linksmultiplikation auf A/N .

Theorem 1.6.4. *Sei ϕ eine positive Linearform auf A . Die natürliche Wirkung von A auf A/N setzt sich eindeutig zu einer nicht ausgearteten *-Darstellung π_ϕ auf \mathcal{H}_ϕ fort. Ist $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Fasteins, so konvergiert das Bild von u_λ in \mathcal{H}_ϕ gegen einen zyklischen Vektor ψ_ϕ . Zudem gilt*

$$\phi(a) = \langle \psi_\phi | \pi_\phi(a)\psi_\phi \rangle, \quad \forall a \in A. \tag{1.6.1}$$

⊆ 2.11.2016

⊆ 7.11.2016

Beweis. Es gilt für $a, b \in A$ mit

$$\| a \cdot [b] \|_\phi^2 = \phi(b^*aa^*b) \leq \|a\|^2 \phi(b^*b) = \|a\|^2 \| [b] \|_\phi^2,$$

da $aa^* \leq \|a\|^2$ und $b^*aa^*b \leq \|a\|^2 b^*b$ nach Korollar 1.2.5. Daher setzt sich die Wirkung von a eindeutig zu einem beschränkten Operator $\pi_\phi(a)$ auf \mathcal{H}_ϕ fort. Offenbar ist π_ϕ linear und multiplikativ. Wegen

$$\langle [b] | \pi_\phi(a)([c]) \rangle_\phi = \phi(b^*ac) = \phi((a^*b)^*c) = \langle \pi_\phi(a^*)([b]) | [c] \rangle_\phi$$

für alle $a, b, c \in A$ ist π_ϕ eine *-Darstellung.

Sei $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Fasteins von A . Für $\lambda \leq \mu$ gilt $u_\mu - u_\lambda \geq (u_\mu - u_\lambda)^2$, also

$$\| [u_\mu] - [u_\lambda] \|_\phi^2 = \phi((u_\mu - u_\lambda)^2) \leq \phi(u_\mu - u_\lambda) \longrightarrow \| \phi \| - \| \phi \| = 0$$

wegen Proposition 1.5.3. Daher ist $([u_\lambda])_{\lambda \in \Lambda}$ ein Cauchynetzz und konvergiert in \mathcal{H}_ϕ gegen ein ψ_ϕ . Es folgt für alle $a \in A$

$$\pi_\phi(a)\psi_\phi = \lim_{\lambda \in \Lambda} [au_\lambda] = [\lim_{\lambda \in \Lambda} au_\lambda] = [a].$$

Die Konvergenz gilt, da wegen der Stetigkeit von ϕ ist die kanonische Abbildung $A \rightarrow \mathcal{H}_\phi$ stetig ist. Es folgt, dass ψ_ϕ zyklisch ist und π_ϕ insbesondere nicht ausgeartet. Schließlich gilt für alle $a \in A$

$$\langle \psi_\phi \mid \pi_\phi(a^*a)\psi_\phi \rangle = \|\pi_\phi(a)\psi_\phi\|^2 = \phi(a^*a),$$

also folgt Gleichung (1.6.1) aus ihrer Linearität. \square

Korollar 1.6.5. Sei $\phi \geq 0$. Definiere eine lineare Fortsetzung $\tilde{\phi} : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ von ϕ durch $\tilde{\phi}(1) := \|\phi\|$. Dann ist $\tilde{\phi}$ die eindeutige Fortsetzung von ϕ zu einer positiven Linearform auf \tilde{A} . Weiter gilt $\|\tilde{\phi}\| = \|\phi\|$.

Beweis. Eindeutigkeit folgt aus Proposition 1.5.3. Für die Positivität sei (\mathcal{H}, π) die ϕ zugeordnete Darstellung mit zyklischem Vektor ψ , so dass

$$\phi(a) = \langle \psi \mid \pi(a)\psi \rangle, \quad \forall a \in A.$$

Aus der Konstruktion der Darstellung folgt, dass sich π zu einer Darstellung von \tilde{A} mit $\pi(1) = \text{id}_{\mathcal{H}}$ fortsetzt und dass $\psi = \lim_{\lambda \in \Lambda} \pi(u_\lambda)\psi$ für jede Fasteins $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von A .

Es folgt

$$\tilde{\phi}(1) = \|\phi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \phi(u_\lambda) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \langle \psi \mid \pi(u_\lambda)\psi \rangle = \|\psi\|^2,$$

also

$$\tilde{\phi}(a) = \langle \psi \mid \pi(a)\psi \rangle, \quad \forall a \in A.$$

Aus Beispiel 1.6.2 folgt die Positivität. \square

Korollar 1.6.6. Sei B eine C^* -Unteralgebra von A . Jede positive Linearform ϕ auf B setzt sich zu einer positiven Linearform ψ auf A mit $\|\psi\| = \|\phi\|$ fort. Ist B_+ erblich in A_+ (also z.B., wenn B ein Linksideal ist), so ist die Fortsetzung eindeutig.

Beweis. Sei $\bar{B} = C^*(1, B)$ die von 1 und B erzeugte C^* -Unteralgebra von A . Der Beweis von Korollar 1.6.5 zeigt, dass sich ϕ zu einer positiven Linearform $\tilde{\phi}$ auf \bar{B} fortsetzt.

Nach dem Satz von Hahn-Banach (Theorem A.1.5) setzt sich $\tilde{\phi}$ zu einer stetigen Linearform $\tilde{\psi}$ auf \tilde{A} fort, für die $\|\tilde{\psi}\| = \|\tilde{\phi}\|$ gilt. Es folgt

$$\tilde{\psi}(1) = \tilde{\phi}(1) = \|\tilde{\psi}\|,$$

also ist $\tilde{\psi}$ nach Proposition 1.5.3 positiv. Dann ist $\psi := \tilde{\psi}|_A$ eine positive Fortsetzung von ϕ mit identischer Norm.

Angenommen, B_+ sei erblich und ψ eine positive Fortsetzung von ϕ auf A . Seien $\tilde{\psi}$ die Fortsetzung von ψ auf \tilde{A} und $\tilde{\phi}$ die Fortsetzung von ϕ auf $\bar{B} = C^*(1, B)$. Sei $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Fasteins von B . Dann ist

$$\|\psi\| = \tilde{\psi}(1) = \tilde{\phi}(1) = \|\phi\| = \lim_{\lambda \in \Lambda} \phi(u_\lambda).$$

Für $b \in A$ mit $\|b\| \leq 1$ ist

$$u_\lambda b^* b u_\lambda \leq u_\lambda^2 \in B$$

nach Korollar 1.2.5, also $u_\lambda b^* b u_\lambda \in B$, da B_+ erblich ist. Da $\langle A_+ \rangle_{\mathbb{C}} = A$ ist, folgt $u_\lambda \tilde{A} u_\lambda \subseteq B$.

Nach Proposition 1.5.2 gilt für alle $a \in A$

$$\begin{aligned} |\psi(a - u_\lambda a u_\lambda)| &\leq |\psi((1 - u_\lambda)a)| + |\psi(u_\lambda a(1 - u_\lambda))| \\ &\leq \sqrt{\tilde{\psi}((1 - u_\lambda)^2)\psi(a^*a)} + \sqrt{\psi(a^*u_\lambda^2a)\psi((1 - u_\lambda)^2)} \\ &\leq \sqrt{\psi(1 - u_\lambda)}(\sqrt{\psi(a^*a)} + \sqrt{\psi(a^*u_\lambda^2a)}) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\psi(a) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \psi(u_\lambda a u_\lambda) = \lim_{\lambda \in \Lambda} \phi(u_\lambda a u_\lambda).$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Notation 1.6.7. Wir schreiben $S = S(A)$ für die Menge der Zustände von A . Weiter sei für jede Linearform $\phi : A \rightarrow \mathbb{C}$ die Linearform ϕ^* definiert durch

$$\phi^*(a) := \overline{\phi(a^*)}, \quad \forall a \in A.$$

Proposition 1.6.8.

(i) $S = S(A)$ ist konvex.

(ii) Die Menge

$$\{\phi \in A' \mid \|\phi\| \leq 1, \phi = \phi^*\}$$

ist die konvexe Hülle von $S \cup -S$.

Im Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1.6.9. Sei Q die Menge der positiven Linearformen von Norm ≤ 1 und K die konvexe Hülle von $Q \cup -Q$. Dann ist K schwach* kompakt.

Beweis. Offenbar ist Q schwach* abgeschlossen in B und nach Proposition A.1.11 ist B schwach* kompakt. Daher ist Q schwach* kompakt.

Nach dem Satz von Eberlein-Šmulian (Theorem A.1.13) reicht es zu zeigen, dass K folgenkompakt ist. Da $0 \in Q$ und Q konvex ist, gilt

$$K = \{\phi_1 - \phi_2 \mid \phi_1, \phi_2 \in Q\}.$$

Sei $(\phi_n - \varphi_n)$ eine Folge in K . Es gibt eine in Q konvergente Teilfolge (ϕ_{k_n}) von (ϕ_n) und eine in Q konvergente Teilfolge (φ_{ℓ_n}) von (φ_n) . Dann ist $(\phi_{k_{\ell_n}} - \varphi_{k_{\ell_n}})$ eine in K konvergente Teilfolge von $(\phi_n - \varphi_n)$. □

Beweis von Proposition 1.6.8. Aus Proposition 1.5.3 folgt, dass

$$\|\phi_1 + \phi_2\| = \|\phi_1\| + \|\phi_2\|, \quad \forall \phi_1, \phi_2 \geq A.$$

Damit folgt (i).

Die konvexe Hülle von $S \cup -S$ ist die Menge K aus dem Lemma 1.6.9 und folglich schwach* kompakt.

Sei $a \in A_{sa}$ und $B := C^*(a)$. Dann existiert nach Korollar 1.1.17 für alle $z \in \sigma(a) \setminus \{0\}$ ein $\chi_z \in \widehat{B}$ mit $\chi_z(a) = z$. Für die eindeutige Fortsetzung von χ_z auf \widetilde{B} gilt $\chi_z(1) = 1$, also ist χ_z nach Proposition 1.5.3 ein Zustand auf B .

Gemäß Korollar 1.6.6 gibt es eine Fortsetzung $\tilde{\chi}_z \in S$, also

$$\|a\| = \varrho(a) \leq \sup\{|\phi(a)| \mid \phi \in S\} \leq \|a\|.$$

Angenommen, es gebe $\psi \in A' \setminus K$, $\psi^* = \psi$, $\|\psi\| \leq 1$. Nach dem Satz von Hahn-Banach (Theorem A.1.5) gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $a \in A_{sa} = ((A_{sa})'_\sigma)'$ mit $\psi(a) > \varepsilon$ aber $\phi(a) \leq \varepsilon$ für alle $\phi \in K$ (da K schwach* kompakt ist).

Da $K = -K$ ist, folgt $|\phi(a)| \leq \varepsilon$ für alle $\phi \in K$ und somit

$$\|a\| \leq \sup\{|\phi(a)| \mid \phi \in K\} \leq \varepsilon < \psi(a) \leq \|a\|,$$

Widerspruch! Also ist K die Menge der $\phi = \phi^*$ mit $\|\phi\| \leq 1$. □

⊥ 7.11.2016

⌈ 10.11.2016

Definition 1.6.10. Sei $F \subseteq S = S(A)$ eine Teilmenge. Die Menge heißt *trennend*, falls

$$\forall a \in A_+ : (\forall \phi \in F : \phi(a) = 0) \implies a = 0.$$

Eine *-Darstellung (\mathcal{H}, π) heißt *treu*, falls $\ker \pi = 0$.

Korollar 1.6.11. Die Menge $S = S(A)$ aller Zustände ist trennend. Ist A separabel, so gibt es ein $\phi \in S$, so dass $\{\phi\}$ trennend ist.

Beweis. Die erste Aussage ist klar nach Proposition 1.6.8. Ist A separabel, so gibt es eine dichte Folge (ϕ_n) von S , denn die Einheitskugel von A' ist in diesem Fall in der schwach* Topologie metrisierbar und kompakt und folglich zweit-abzählbar. Dann ist $\{\phi\}$

$$\phi := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(n+1)} \phi_n \in S$$

trennend, da $\{\phi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ trennend ist. In der Tat: Ist $a \in A_+$ mit $\phi(a) = 0$, so folgt

$$\phi_n(a) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Theorem 1.6.12. *Es gibt eine nicht-ausgeartete treue *-Darstellung von A . Ist A separabel, so kann man annehmen, dass der Raum der Darstellung separabel ist.*

Beweis. Es sei $F \subseteq S$ eine trennende Teilmenge und

$$\pi = \bigoplus_{\phi \in F} \pi_{\phi}.$$

Sei $a \in \ker \pi$ positiv. Dann gilt für alle $\phi \in F$

$$\phi(a) = \langle \psi_{\phi} \mid \pi_{\phi}(a)\psi_{\phi} \rangle = 0$$

nach Theorem 1.6.4, also $a = 0$. Es folgt, dass π treu ist.

Nach Korollar 1.6.11 kann man $F = S$ nehmen. Im separablen Fall man $F = \{\phi\}$ für ein $\phi \in S$ nehmen. In diesem Fall ist $\pi = \pi_{\phi}$ und A/N dicht in \mathcal{H}_{ϕ} , also letzterer Hilbertraum separabel. \square

Korollar 1.6.13. *Jede C*-Algebra ist isometrisch *-isomorph zu einer C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, wobei \mathcal{H} ein Hilbertraum ist. Ist A separabel, so kann man annehmen, dass \mathcal{H} separabel ist.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Theorem 1.6.12 und Theorem 1.4.6. \square

1.7 Von Neumann-Algebren

Im folgenden sei \mathcal{H} ein Hilbertraum.

Definition 1.7.1 (Starke und schwache Operatortopologie). Die *schwache Operatortopologie* (WOT) auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ wird erzeugt durch die Halbnormen

$$x \longmapsto |\langle \phi \mid x\psi \rangle|, \quad \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Die *starke Operatortopologie* (SOT) auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ wird erzeugt durch die Halbnormen

$$x \longmapsto \|x\psi\|, \quad \psi \in \mathcal{H}.$$

Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist die schwache Operatortopologie schwächer als die starke. Die starke Operatortopologie ist offensichtlich schwächer als die Normtopologie.

Bemerkung 1.7.2. Die Produktabbildung $(x, y) \longmapsto xy$ ist SOT-stetig auf $B \times \mathcal{H}$ für jede norm-beschränkte Teilmenge B auf \mathcal{H} :

$$\|(xy - x_0y_0)\psi\| \leq \|x\| \|(y - y_0)\psi\| + \|(x - x_0)y_0\psi\|.$$

Für festes $y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ sind die Abbildungen $x \longmapsto xy$ und $x \longmapsto yx$ WOT-stetig. Die Involution $(-)^*$ ist WOT-stetig, aber nicht SOT-stetig, wenn $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Proposition 1.7.3. Sei π eine Linearform auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt $\psi_k, \phi_k \in \mathcal{H}$, $k = 1, \dots, n$, mit

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^n \langle \phi_k \mid x\psi_k \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

(ii) ϕ ist WOT-stetig.

(iii) ϕ ist SOT-stetig.

Beweis. Offenbar gilt (i) \implies (ii) \implies (iii).

(iii) \implies (i). Es gibt $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathcal{H}$, so dass

$$|\phi(x)| \leq \max_{j=1}^n \|x\psi_j\| \leq \left[\sum_{j=1}^n \|x\psi_j\|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \|\pi(x)\psi\|_{\mathcal{K}},$$

wobei $\mathcal{K} := \mathcal{H}^n = \mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}$, $\psi := \psi_1 \oplus \dots \oplus \psi_n \in \mathcal{K}$ und

$$\pi(x)\xi := x\xi_1 \oplus \dots \oplus x\xi_n, \quad \forall \xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n \in \mathcal{K}.$$

Sei $V := \pi(\mathcal{L}(\mathcal{H}))\psi \subseteq \mathcal{K}$. Definiere $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$\varphi(\pi(x)\psi) := \phi(x), \quad \forall x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Dann gilt

$$|\varphi(\xi)| \leq \|\xi\|_{\mathcal{K}}, \quad \forall \xi \in V,$$

also setzt sich φ eine stetigen Linearform auf \bar{V} fort.

Nach dem Darstellungssatz von Riesz (Theorem A.3.1) gibt es $\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n \in \mathcal{K}$ mit

$$\phi(x) = \varphi(\pi(x)\psi) = \langle \xi \mid \pi(x)\psi \rangle_{\mathcal{K}} = \sum_{k=1}^n \langle \xi_k \mid x\psi_k \rangle.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Korollar 1.7.4. Sei $K \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvex. Ist K SOT-abgeschlossen, so ist K WOT-abgeschlossen.

Beweis. Nach Voraussetzung und dem Satz von Hahn-Banach (Theorem A.1.5) ist

$$K = \bigcap_{\phi \in S} \phi^{-1}([0, \infty))$$

für eine Menge S von SOT-stetigen Linearformen. Da die Elemente von S nach Proposition 1.7.3 WOT-stetig sind, folgt, dass K WOT-abgeschlossen ist. □

Definition 1.7.5 (Kommutanten). Sei $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Der Kommutant M' von M ist

$$M' := \{x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \forall y \in M : xy = yx\}.$$

Wir schreiben $(M')' = M''$, etc. Dann heißt M'' der Bikommutant von M .

Bemerkung 1.7.6. Sei $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Teilmenge. Dann M' eine WOT-abgeschlossene Unteralgebra. Falls $M = M^*$, ist M' eine C*-Algebra.

Aus $M_1 \subseteq M_2$ folgt $M'_2 \subseteq M'_1$. Aus $M \subseteq M''$ (und folglich $M' \subseteq M'''$) ergibt sich damit

$$M''' \subseteq M' \subseteq M'''' \implies M' = M'''.$$

Theorem 1.7.7 (Von Neumanns Bikommutantentheorem). Sei $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine C*-Unteralgebra, die $1 = \text{id}_{\mathcal{H}}$ enthält. Dann sind äquivalent:

- (i) $M = M''$.
- (ii) M ist WOT-abgeschlossen.
- (iii) M ist SOT-abgeschlossen.

9.11.2016

Beweis. (ii) \iff (iii) folgt aus Korollar 1.7.4. Die Bemerkung zeigt (i) \implies (ii). (iii) \implies (i). Für $\psi \in \mathcal{H}$ sei p die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{K} := \overline{M\psi}$. Dann ist \mathcal{K} M -invariant und da

16.11.2016

$$\langle M\mathcal{K}^\perp \mid \mathcal{K} \rangle = \langle \mathcal{K}^\perp \mid M^*\mathcal{K} \rangle = \langle \mathcal{K}^\perp \mid M\mathcal{K} \rangle = 0,$$

ist auch \mathcal{K}^\perp M -invariant. Es folgt für alle $x \in M$:

$$pxp = xp, \quad px(1-p) = 0,$$

also

$$px = pxp + px(1-p) = xp.$$

Damit gilt $p \in M'$. Für $y \in M''$ gilt $py = yp$ und $\psi = 1\psi \in \mathcal{K}$, also $y\psi \in \mathcal{K}$. Also gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ mit $\|(y-x)\psi\| \leq \varepsilon$.

Wie oben sei die *-Darstellung π von M auf \mathcal{H}^n definiert durch

$$\pi(x)\xi := x\xi_1 \oplus \dots \oplus x\xi_n, \quad \forall x \in M, \xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_n \in \mathcal{H}^n.$$

Man beachte

$$\mathcal{L}(\mathcal{H}^n) = \{x = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \mid \forall i, j : x_{ij} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

Seien $x = (x_{ij}) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^n)$ und $y \in M$. Dann gilt

$$\pi(y)x - x\pi(y) = (yx_{ij} - x_{ij}y)_{1 \leq i, j \leq n}$$

also gilt

$$\pi(M)' = \{x = (x_{ij}) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^n) \mid \forall i, j : x_{ij} \in M'\},$$

Es folgt $\pi(M'') \subseteq \pi(M)''$.

Seien nun $y \in M''$ und $\psi_1, \dots, \psi_n \in \mathcal{H}$, und setze $\psi := \psi_1 \oplus \dots \oplus \psi_n \in \mathcal{H}^n$. Der erste Teil des Beweises zeigt nun, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $x \in M$ existiert, so dass

$$\varepsilon \geq \|(\pi(y) - \pi(x))\psi\| = \left[\sum_{j=1}^n \|(y - x)\psi_j\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Damit ist y im WOT-Abschluss von M . □

Definition 1.7.8 (Von Neumann-Algebren). Die C^* -Unteralgebren $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$, die den äquivalenten Bedingungen von Theorem 1.7.7 genügen, heißen *von Neumann-Algebren* (äquivalenterweise auch W^* -Algebren.)

Korollar 1.7.9. Sei $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine C^* -Unteralgebra mit SOT-Abschluss M . Dann ist M eine von Neumann-Algebra auf dem abgeschlossenen Unterraum $\overline{A\mathcal{H}}$ von \mathcal{H} . Falls A nicht-ausgartet auf \mathcal{H} wirkt, so gilt $M = A''$.

Im Beweis verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 1.7.10. Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ein monoton wachsendes Netz positiver Elemente von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, das in Norm beschränkt ist. Dann konvergiert (x_λ) in SOT.

Beweis. O.B.d.A. ist $\|x_\lambda\| \leq 1$. Sei $\psi \in \mathcal{H}$ und $\phi : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\phi(x) := \langle \psi \mid x\psi \rangle, \quad \forall x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Dann ist ϕ eine positive Linearform. Da $\pi(x_\lambda)$ beschränkt und monoton wachsend ist, konvergiert dieses Netz gegen ein $r \geq 0$.

Für $\lambda \leq \mu$ gilt

$$\|(x_\mu - x_\lambda)\psi\|^2 = \phi((x_\mu - x_\lambda)^2) \leq \phi(x_\mu - x_\lambda) \rightarrow r - r = 0,$$

also folgt, dass $(x_\lambda\psi)$ ein Cauchynetz ist, und folglich gegen ein $x\psi \in \mathcal{H}$ konvergiert. Dies definiert einen linearen Endomorphismus x von \mathcal{H} . Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (Theorem A.3.2) ist $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $x_\lambda \rightarrow x$ in SOT. □

Beweis von Korollar 1.7.9. Sei (u_λ) eine Fasteins von A . Nach Lemma 1.7.10 konvergiert (u_λ) in SOT gegen ein positives $e \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dann konvergiert für $a \in A$ $u_\lambda a$ in Norm gegen a und in SOT gegen ea . Damit ist $e \in M$ eine Eins für M und wegen $e^2 = e$ eine Orthogonalprojektion. Auf $e\mathcal{H}$ wirkt A nicht-ausgartet und $A(1 - e) = 0$. Ist A nicht ausgartet auf \mathcal{H} , so folgt $e = \text{id}_{\mathcal{H}}$. □

Definition 1.7.11 (Partielle Isometrien). Sei A eine C*-Algebra und $u \in A$. Dann heißt u eine *partielle Isometrie*, falls u^*u eine Projektion ist.

Lemma 1.7.12. Sei A eine C*-Algebra, $a \in A$, $p := a^*a$ und $q := aa^*$. Dann sind äquivalent:

- (i) Es gilt $p^2 = p$.
- (ii) Es gilt $aa^*a = a$.
- (iii) Es gilt $a^*aa^* = a^*$.
- (iv) Es gilt $q^2 = q$.

Beweis. Es gilt (ii) \iff (iii) durch Anwenden von $(-)^*$. Durch Ersetzen von a^* mit a folgt (iii) \iff (iv), sobald (i) \iff (ii) bewiesen ist. Schließlich gilt offensichtlich (ii) \implies (i).

(i) \implies (ii). Sei $x := aa^*a - a$. Dann gilt

$$x^*x = (a^*aa^*)(aa^*a) - (a^*aa^*)a - a^*(aa^*a) + a^*a = p^3 - p^2 + p^2 - p = 0.$$

Aus der C*-Norm-Identität folgt $x = 0$, also die Behauptung. □

Proposition 1.7.13 (Polarzerlegung). Sei $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine von Neumann-Algebra und $x \in M$. Dann gibt es genau eine partielle Isometrie $u \in M$, so dass u^*u die Orthogonalprojektion auf $\overline{|x|(\mathcal{H})}$ ist und $x = u|x|$.

Beweis. Sei p die Orthogonalprojektion auf $\overline{|x|(\mathcal{H})}$. Wir definieren u auf $|x|(\mathcal{H})$ durch

$$u(|x|\psi) := x\psi, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Da

$$\||x|\psi\|^2 = \langle \psi | |x|^2\psi \rangle = \langle \psi | x^*x\psi \rangle = \|x\psi\|^2$$

ist dies wohldefiniert und setzt sich eindeutig zu einer Isometrie

$$p(\mathcal{H}) = \overline{|x|(\mathcal{H})} \longrightarrow \overline{x(\mathcal{H})} \subseteq \mathcal{H}$$

fort. Weiterhin folgt $\ker x = \ker |x|$. Da $|x|$ selbstadjungiert ist, gilt

$$\ker |x| = (|x|(\mathcal{H}))^\perp = (1 - p)(\mathcal{H}).$$

Mit $u := 0$ auf $(1 - p)(\mathcal{H})$ erhalten wir eine partielle Isometrie $u \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Per Konstruktion gilt

$$u|x| = x.$$

Ist v eine partielle Isometrie mit $v^*v = p$ und $x = v|x|$, so folgt

$$v = vv^*v = vp, \quad u = uu^*u = up$$

und für alle $\psi \in \mathcal{H}$

$$v|x|(\psi) = x\psi = u|x|(\psi),$$

also $vp = up$ und folglich $v = u$.

Es bleibt zu zeigen, dass $u \in M$ gilt. Sei $A = C^*(x)$. Es reicht nach Korollar 1.7.9 zu zeigen, dass $u \in A''$ liegt. Sei dazu $y \in A'$. Es gilt

$$xy(1-p) = yx(1-p) = 0,$$

also $y(\ker x) \subseteq \ker x = \ker u$ und

$$uy(1-p) = 0 = yu(1-p).$$

Andererseits gilt $p(\mathcal{H}) = \overline{|x|(\mathcal{H})}$ und für alle $\psi \in \mathcal{H}$:

$$uy(|x|(\psi)) = u|x|y\psi = xy\psi = yx\psi = yu(|x|(\psi)),$$

da nach Funktionalalkül $|x| \in A$ gilt, also $uyp = yup$ und somit $uy = yu$. \square

⊥ 16.11.2016

⌈ 21.11.2016

Theorem 1.7.14 (Kaplanskys Dichtesatz). Sei $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine C^* -Unteralgebra mit SOT-Abschluss M . Dann ist die Einheitskugel $B(A)$ stark dicht in der Einheitskugel $B(M)$ von M . Weiter ist $B(A)_{sa}$ SOT-dicht in $B(M)_{sa}$ und $B(A)_+$ SOT-dicht in $B(M)_+$. Falls $1 = \text{id}_{\mathcal{H}} \in A$ ist, ist $U(A)$ SOT-dicht in $B(M)$.

Der Beweis erfordert etwas Vorbereitung.

Definition 1.7.15 (Stark stetige Funktionen). Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt stark stetig, falls für jedes Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})_{sa}$, das in SOT gegen $x \in M_{sa}$ konvergiert, in SOT gilt

$$f(x) = \lim_{\lambda \in \Lambda} f(x_\lambda).$$

Proposition 1.7.16. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig mit $f(0) = 0$ und es $\alpha, \beta > 0$ mit $|f(t)| \leq \alpha|t| + \beta$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Dann ist f stark stetig.

Beweis. Sei S die Menge aller stark stetigen Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $S^b \subseteq S$ die Teilmenge aller beschränkten Elemente. Aus Bemerkung 1.7.2 folgt, dass $S^b S \subseteq S$. Es folgt, dass S^b mit $\|\cdot\|_\infty$ eine kommutative Banachalgebra ist.

Sei $e(t) := (1+t^2)^{-1}t$ und $x, y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})_{sa}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} e(y) - e(x) &= (1+y^2)^{-1}(y(1+x^2) - (1+y^2)x)(1+x^2)^{-1} \\ &= (1+y^2)^{-1}(y-x)(1+x^2)^{-1} + (1+y^2)^{-1}y(x-y)x(1+x^2)^{-1}. \end{aligned}$$

Da $\|(1+x^2)^{-1}\| \leq 1$ und ebenso für y , folgt, dass $e(x_\lambda) \rightarrow e(x)$ in SOT, falls $x_\lambda \rightarrow x$ (Bemerkung 1.7.2). Daher gilt $e \in S^b$ und $e_\varepsilon \in S^b$ mit $e_\varepsilon(x) = e(\varepsilon x)$, falls $\varepsilon > 0$. Die Funktionen e_ε , $\varepsilon > 0$, trennen die Punkte von $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Aus dem Satz von Stone-Weierstrass (Korollar A.2.3) folgt $C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq S^b$.

Sei nun f wie in der Behauptung und $x = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Es folgt

$$f(1+x^2)^{-1} \in C_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq S^b.$$

Da $x \in S$, folgt $f(1+x^2)^{-1}x \in S$. Da diese Funktion beschränkt ist, gilt $f(1+x^2)^{-1}x^2 \in S$. Schließlich folgt

$$f = f(1+x^2)^{-1}x^2 + f(1+x^2)^{-1} \in S.$$

Das zeigt die Behauptung. □

Beweis von Theorem 1.7.14. Nach Korollar 1.7.4 stimmen SOT-Abschluss und WOT-Abschluss von A_{sa} überein. Da $(-)^*$ WOT-stetig ist (Bemerkung 1.7.2), folgt, dass dieser Abschluss M_{sa} ist.

Man betrachte $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(t) := \max(\min(t, 1), -1).$$

Dann ist f stark stetig nach Proposition 1.7.16. Ist $x \in B(M)_{sa}$, so existiert ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A_{sa}$ mit $x = \lim_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ in SOT. Es folgt

$$x = f(x) = \lim_{\lambda \in \Lambda} f(x_\lambda)$$

und da $f(x_\lambda) \in B(A)_{sa}$, ist $B(A)_{sa}$ SOT-dicht in $B(M)_{sa}$.

Betrachtet man stattdessen

$$f(t) := \max(\min(t, 1), 0),$$

so folgt ebenso, dass $B(A)_+$ SOT-dicht in $B(M)_+$ ist.

Sei $\text{id}_{\mathcal{H}} \in A$ und $u \in U(M)$. Dann gibt es nach dem Spektralsatz $x \in M_{sa}$ mit $u = \exp(ix)$. Es gibt also ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq A_{sa}$ mit $x = \lim_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ in SOT. Aus Proposition 1.7.16 folgt $u = \lim_{\lambda \in \Lambda} \exp(ix_\lambda)$ in SOT. Da $\exp(ix_\lambda) \in U(A)$, folgt, dass $U(A)$ SOT-dicht in $U(M)$.

Sei schließlich $x \in B(M)$. Der SOT-Abschluss von $M_2(A) \subseteq M_2(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ ist $M_2(M)$. Es gilt

$$y := \begin{pmatrix} 0 & x \\ x^* & 0 \end{pmatrix} \in B(M_2(M))_{sa},$$

also gibt es ein Netz $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq B(M_2(A))_{sa}$ mit $y = \lim_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda$ in SOT. Mit $x_\lambda := (y_\lambda)_{12}$ folgt $x_\lambda \in B(A)$ und

$$x = \lim_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$$

in SOT. Dies zeigt die Behauptung. □

Theorem 1.7.17 (Kadisons Transitivitätssatz). Sei $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine C^* -Unteralgebra mit SOT-Abschluss M . Für alle $x \in M$, alle endlich-dimensionalen Unterräume $V \subseteq \mathcal{H}$, so dass die Orthogonalprojektion p auf V in M liegt, und alle $\varepsilon > 0$ gibt es $a \in A$ mit

$$a|_V = x|_V, \quad \|a\| \leq \|x\| + \varepsilon.$$

Lemma 1.7.18. Unter den Voraussetzungen von Theorem 1.7.17 gibt es $a \in A$ mit

$$\|(a - x)|_V\| \leq \varepsilon, \quad \|a\| \leq \|x|_V\|.$$

Beweis. O.B.d.A. sei $\|x|_V\| = 1$ (wenn $x|_V = 0$ ist, ist nichts zu zeigen). Sei $y := xp$, so dass $\|y\| \leq 1$. Sei v_1, \dots, v_n eine ONB von V . Nach Theorem 1.7.14 gibt es $a \in A$ mit $\|a\| \leq 1$ und

$$\|av_j - xv_j\| = \|av_j - yv_j\| \leq \varepsilon, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Dann gilt für alle $v = \sum_{j=1}^n \langle v|v_j \rangle v_j \in V$:

$$\|av - xv\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle (a - y)v_j|v_j \rangle|^2 \leq \varepsilon \sum_{j=1}^n \|v_j\|^2,$$

also

$$\|(a - x)|_V\| = \|(a - y)p\| \leq \varepsilon.$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Beweis von Theorem 1.7.17. Mit Lemma 1.7.18 folgt, dass es $a_0 \in A$ gibt mit $\|a_0\| \leq \|x\|$ und

$$\|(a_0 - x)|_V\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per Induktion zeigen wir nun, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ein $a_n \in A$ gibt mit $\|a_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$ und

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^n a_k - x \right) \Big|_V \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

In der Tat, für $n = 1$ liefert Lemma 1.7.18 $a_1 \in A$ mit

$$\|a_1\| \leq \|(x - a_0)|_V\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\|(x - a_0 - a_1)|_V\| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Angenommen, wir haben die Behauptung für gegebenes $n \geq 1$ bewiesen. Dann liefert Lemma 1.7.18 ein $a_{n+1} \in A$ mit

$$\|a_{n+1}\| \leq \left\| \left(x - \sum_{k=0}^n a_k \right) \Big|_V \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

und

$$\left\| \left(x - \sum_{k=0}^{n+1} a_k \right) \Big|_V \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Dann gilt für $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in A$: $a|_V = x|_V$ und

$$\|a\| \leq \|x\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \|x\| + \varepsilon.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

⌊ 21.11.2016

⌋ 23.11.2016

1.8 Irreduzible *-Darstellungen

Definition 1.8.1 (Reine Zustände). Sei K eine konvexe Menge. Ein $x \in K$ heißt *Extrempunkt*, falls nur als Endpunkt einer Strecke in K vorkommt. D.h., aus $x = ty_1 + (1-t)y_2$ mit $t \in [0, 1]$ und $y_1, y_2 \in K$ folgt, dass $x = y_1$ oder $x = y_2$. Sei $S = S(A)$. Dann heißt $\phi \in S$ *rein* (Englisch: pure state), falls ϕ ein Extrempunkt der Menge Q aller positiven Linearformen von Norm ≤ 1 ist.

Theorem 1.8.2. Sei (\mathcal{H}, π) eine nicht-triviale *-Darstellung von A . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Die Darstellung π ist irreduzibel: Es gibt keinen Unterraum $0 \neq V \subsetneq \mathcal{H}$, der unter A invariant ist.
- (ii) Die Darstellung π ist topologisch irreduzibel: Es gibt keinen abgeschlossenen Unterraum $0 \neq V \subsetneq \mathcal{H}$, der unter A invariant ist.
- (iii) Die einzigen Projektionen $p = p^* = p^2 \in \pi(A)'$ sind $p = 0$ und $p = \text{id}_{\mathcal{H}}$.
- (iv) Es gilt $\pi(A)' = \text{Cid}_{\mathcal{H}}$.
- (v) Die Menge $\pi(A)$ ist SOT-dicht in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
- (vi) Für alle $\xi, \psi \in \mathcal{H}$, $\psi \neq 0$, gibt es ein $a \in A$ mit $\pi(a)\psi = \xi$.
- (vii) Jeder Vektor $\psi \in \mathcal{H}$, $\psi \neq 0$, ist zyklisch.
- (viii) Es gibt einen reinen Zustand $\phi \in S = S(A)$ und einen isometrischen Isomorphismus $u : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_{\phi}$ mit $u\pi(a) = \pi_{\phi}(a)u$ für alle $a \in A$.

Im Beweis verwenden wir das folgende Lemma.

Lemma 1.8.3. Sei $M \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine von Neumann-Algebra. Dann ist M die kleinste von Neumann-Algebra, die alle Projektionen $p = p^* = p^2 \in M$ enthält.

Beweis. Sei $a = a^* \in M$. Dann ist a nach dem Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren im SOT-Abschluss der konvexen Hülle seiner Spektralprojektionen. Letztere sind SOT-Limiten von Polynomen in a . □

Beweis von Theorem 1.8.2. (i) \implies (ii). Trivial.

(ii) \implies (iii). Sei $p = p^* = p^2 \in \pi(A)'$. Dann ist $p(\mathcal{H})$ abgeschlossen und A -invariant, also $p = 0$ oder $p = 1 = \text{id}_{\mathcal{H}}$.

(iii) \implies (iv). Aus Lemma 1.8.3 folgt, dass $\pi(A)'$ von $p = 0$ und $p = 1$ erzeugt wird.

(iv) \implies (v). Wäre π ausgeartet, so gäbe es $p = p^* = p^2 \in \pi(A)'$ mit $p \neq 0$ und $p \neq \text{id}_{\mathcal{H}}$. Daher ist π nicht ausgeartet. Die Behauptung folgt aus Theorem 1.7.7.

(v) \implies (vi). Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $T\psi = \zeta$ (z.B. $T = |\zeta\rangle\langle\psi|$). Man wende Theorem 1.7.17 auf $V = \langle\zeta, \psi\rangle_{\mathbb{C}}$ an.

(vi) \implies (i). Sei $\psi \neq 0$. Der kleinste invariante Unterraum, der ψ enthält, enthält auch $\pi(A)\psi = \mathcal{H}$.

(vi) \implies (vii). Offensichtlich.

(vii) \implies (iii). Sei $p = p^* = p^2 \in \pi(A)'$, $p \neq 0$, und $\psi \in p(\mathcal{H})$, $\psi \neq 0$. Damit $\pi(A)\psi \subseteq p(\mathcal{H})$ und es folgt $p = 1$.

(iv) \implies (viii). Nach (vii) ist jeder von Null verschiedene Vektor zyklisch. Wir können also aufgrund von Aufgabe 1 auf Blatt 4 o.B.d.A. annehmen, dass $(\mathcal{H}, \pi) = (\mathcal{H}_{\phi}, \pi_{\phi})$ für einen Zustand ϕ ist.

Sei $0 \leq t \leq 1$ und $\phi = t\phi_1 + (1-t)\phi_2$ mit $\phi_1, \phi_2 \in S$. Dann gilt $0 \leq t\phi_1 \leq \phi$, so dass es nach Aufgabe 3 auf Blatt 5 ein $x \in \pi(A)'$, $x \geq 0$, gibt mit

$$t\phi_1(a) = \langle\psi_{\phi} | \pi(a)x\psi_{\phi}\rangle, \quad \forall a \in A.$$

Dann ist $x = \lambda \text{id}_{\mathcal{H}}$ für ein $\lambda \geq 0$. Es folgt

$$t\phi_1(a) = \lambda\phi(a), \quad \forall a \in A.$$

Somit

$$t = \|t\phi_1\| = \|\lambda\phi\| = \lambda$$

und $t = 0$ oder $\phi_1 = \phi$. Daher ist ϕ ein reiner Zustand.

(viii) \implies (iii). Sei ϕ ein reiner Zustand und (\mathcal{H}, π) die zugeordnete $*$ -Darstellung mit zyklischem Vektor ψ . Angenommen, es gebe $p = p^* = p^2 \in \pi(A)'$ mit $p \neq 0$ und $p \neq 1$. Seien ϕ_1, ϕ_2 definiert durch

$$\phi_1(a) := \langle\psi | \pi(a)p\psi\rangle = \|\pi(a)p\psi\|^2, \quad \phi_2(a) := \langle\psi | \pi(a)(1-p)\psi\rangle$$

für alle $a \in A$. Dann sind ϕ_1, ϕ_2 positiv und $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Wäre $p(\psi) = 0$, so wäre $p(\pi(A)\psi) = 0$, also $p = 0$, Widerspruch. Folglich $p(\psi) \neq 0$ und $(1-p)(\psi) \neq 0$ und

$$0 < \|p(\psi)\|^2 = \|\phi_1\|, \quad 0 < \|(1-p)(\psi)\|^2 = \|\phi_2\|,$$

so dass

$$\phi_1 = \|\psi_1\|\phi.$$

Es folgt für alle $a, b \in A$

$$\begin{aligned} \langle [a] \mid p[b] \rangle &= \langle \pi(a)\psi \mid p\pi(b)\psi \rangle = \langle \psi \mid \pi(a^*b)p\psi \rangle \\ &= \phi_1(a^*b) = \|\phi_1\|\phi(a^*b) = \langle [a] \mid [b] \rangle, \end{aligned}$$

also $p = 1$, Widerspruch! Es folgt die Behauptung. □

Definition 1.8.4 (Irreduzible *-Darstellungen). Sei (\mathcal{H}, π) eine *-Darstellung, $\pi \neq 0$. Dann heißt die Darstellung *irreduzibel*, falls die äquivalenten Bedingungen von Theorem 1.8.2 erfüllt sind.

⊆ 23.11.2016

⊇ 25.11.2016

1.9 Reelle C*-Algebren

Definition 1.9.1 (Reelle C*- und B*-Algebren). Sei A eine reelle Banachalgebra mit einem reell-linearen involutiven Antiautomorphismus $(-)^*$. Dann heißt A eine *B*-Algebra*, falls

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in A.$$

Sei A eine B*-Algebra. Die Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$ von A ist eine komplexe *-Algebra mit Produkt und Involution gegeben durch

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) := (a_1a_2 - b_1b_2) + i(b_1a_2 + a_1b_2), \quad (a + ib)^* := a^* - ib^*$$

für alle $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 \in A$.

Damit heißt A eine *reelle C*-Algebra*, falls auf $A_{\mathbb{C}}$ eine Norm existiert, die diejenige von A fortsetzt und bezüglich derer $A_{\mathbb{C}}$ eine C*-Algebra ist. Nach Theorem 1.4.6 gibt es höchstens eine solche Norm.

Proposition 1.9.2. Sei A eine reelle C*-Algebra und $\tau_A : A_{\mathbb{C}} \rightarrow A_{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$\tau_A(x + iy) := x^* + iy^*, \quad x, y \in A.$$

Dann ist τ_A ein linearer involutiver Antiautomorphismus und

$$A = \{a \in A_{\mathbb{C}} \mid \tau_A(a) = a^*\}.$$

Sei umgekehrt B eine C*-Algebra und τ ein linearer involutiver Antiautomorphismus von B . Dann ist

$$A := \{b \in B \mid \tau(b) = b^*\}$$

eine reelle C*-Algebra und die komplex lineare Fortsetzung der Inklusionsabbildung $A \rightarrow B$ ist ein *-Isomorphismus $\phi : A_{\mathbb{C}} \rightarrow B$, so dass $\tau \circ \phi = \phi \circ \tau_A$.

Beweis. Alle Aussagen sind leicht zu beweisen: Offenbar ist A in A_C durch die Gleichung $\tau_A(a) = a^*$ charakterisiert. Insbesondere stimmt die Einschränkung von τ_A auf A mit $(-)^*$ überein und ist folglich ein Antiautomorphismus. Durch komplex lineare Fortsetzung folgt, dass letzteres auf A_C gilt.

Ist umgekehrt B eine C^* -Algebra mit gegebenem τ , so ist A , wie oben definiert, eine abgeschlossene reelle Unter algebra. Damit ist A eine B^* -Algebra. Weiter zeigt man leicht, dass $A \cap iA = 0$ und $B = A + iA$ ist. Damit ist A_C vermöge ϕ $*$ -isomorph zu B und da ϕ auf A isometrisch ist, ist A eine reelle C^* -Algebra. Die Verträglichkeit des Isomorphismus ϕ mit τ folgt durch Komplexifizierung aus dem Umstand, dass sie sich auf A zu $\phi = \phi$ reduziert. \square

Bemerkung 1.9.3. In der Literatur werden die Paare (A, τ) , wobei A eine C^* -Algebra ist und τ ein linearer Antiautomorphismus von A , oft als "Reelle C^* -Algebren" (mit großem R) bezeichnet. Die Terminologie wurde in Anlehnung an eine Arbeit von Michael Atiyah über "Reelle K -Theorie" von Gennadij G. Kasparov geprägt.

Beispiel 1.9.4. Sei X ein lokal-kompakter Hausdorffraum. Dann ist $\mathcal{C}_0(X, \mathbb{R})$ eine (kommutative) reelle C^* -Algebra. In der Tat kann man $\mathcal{C}_0(X)$ und

$$\tau(f) := f, \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(X)$$

betrachten.

Allgemeiner sei τ_0 ein Automorphismus von X mit $\tau_0^2 = \text{id}_X$. Dann kann man

$$\tau(f) := f \circ \tau_0, \quad \forall f \in \mathcal{C}_0(X)$$

definieren. Die entsprechende reelle C^* -Algebra ist

$$\mathcal{C}_0(X, \tau_0) := \{f \in \mathcal{C}_0(X) \mid \forall x \in X : f(\tau_0(x)) = \overline{f(x)}\}.$$

Der Automorphismus τ_0 definiert eine Wirkung der Gruppe \mathbb{Z}_2 (der Galoisgruppe der Körpererweiterung $\mathbb{C} : \mathbb{R}$) auf X . In diesem Sinne sind die obigen Funktionen solche, die mit der \mathbb{Z}_2 -Wirkung vertauschen.

Proposition 1.9.5. *Sei A eine B^* -Algebra. Es gibt eine unitale B^* -Algebra \tilde{A} , die A als abgeschlossenes Ideal enthält, so dass $\tilde{A} = A$, falls A unital ist, und A andernfalls von Codimension eins in \tilde{A} ist. Ist A eine reelle C^* -Algebra, so ist $(A_C)^\sim$ isometrisch $*$ -isomorph zu $(\tilde{A})_C$.*

Beweis. Für den ersten Teil geht der gleiche Beweis wie für Proposition 1.1.5 durch. Per Konstruktion kann man die Operationen "Komplexifizierung" und "Unitalisierung" miteinander vertauschen. \square

Definition 1.9.6 (Spektren in B*-Algebren). Sei A eine B*-Algebra und $\tilde{A}_{\mathbb{C}} := (\tilde{A})_{\mathbb{C}}$. Für alle $a \in A$ definieren wir

$$\sigma(a) := \sigma_A(a) := \sigma_{\tilde{A}_{\mathbb{C}}}(a) \subseteq \mathbb{C}$$

und nennen dies das *Spektrum* von a .

Ein selbstadjungiertes Element $a \in A$ heißt *positiv*, falls $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Theorem 1.9.7 (Arens-Kaplansky). Sei A eine kommutative reelle Banachalgebra mit involutivem Antiautomorphismus $(-)^*$. Es gelte

$$\|a\|^2 \leq \|a^*a + b^*b\|, \quad \forall a, b \in A.$$

Dann ist A eine reelle C*-Algebra und isometrisch *-isomorph zu einer Algebra der Form $C_0(X, \tau_0)$, wobei X ein lokal-kompakter Hausdorffraum ist und $\tau_0 : X \rightarrow X$ ein Automorphismus mit $\tau_0^2 = \text{id}_X$.

Beweis. Offensichtlich ist A eine B*-Algebra. Denn mit $b = 0$ erhält man für alle $a \in A$

$$\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\|,$$

also $\|a^*\| = \|a\|$ und damit $\|a\|^2 = \|a^*a\|$. Insbesondere ist für $a \in A_{\mathbb{C}}$ das Spektrum $\sigma(a)$ und der Spektralradius $\rho(a)$ wohldefiniert.

Sei $\text{Re} : A_{\mathbb{C}} \rightarrow A$ definiert durch $\text{Re}(a + ib) = a$ für alle $a \in A$. Wir definieren auf $A_{\mathbb{C}}$ die folgende Norm:

$$\|a\| := \sup_{|\theta| \leq \pi} \|\text{Re}(e^{i\theta}a)\|, \quad \forall a \in A.$$

Dies setzt die Norm von A fort und

$$\max(\|x\|, \|y\|) \leq \|x + iy\| \leq (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x, y \in A.$$

Insbesondere ist $A_{\mathbb{C}}$ mit dieser Norm ein Banachraum. Wir unterbrechen den Beweis für ein Lemma. □

Lemma 1.9.8. In der obigen Situation gilt für alle $a, b \in A_{\mathbb{C}}$:

$$\|a\| = \|a^*\|, \tag{1.9.1}$$

$$\|ab\| \leq 2\|a\| \|b\|, \tag{1.9.2}$$

$$\|a\|^2 \leq 2\|a^*a\|. \tag{1.9.3}$$

Beweis. Seien $x, y, u, v \in A$ mit $a = x + iy$ und $b = u + iv$. Es gilt

$$\|a^*\| = \sup_{|\theta| \leq \pi} \|\text{Re } e^{i\theta}a^*\| = \sup_{|\theta| \leq \pi} \|\text{Re } e^{-i\theta}a^*\| = \sup_{|\theta| \leq \pi} \|(\text{Re } e^{i\theta}a)^*\| = \|a\|.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \|ab\| &= \sup_{|\theta| \leq \pi} \|(\cos(\theta)x + \sin(\theta)y)u + (\sin(\theta)x - \cos(\theta)y)v\| \\ &\leq \|a\|(\|u\| + \|v\|) \leq 2\|a\|\|b\|, \end{aligned}$$

Ebenso

$$\|a\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \leq 2\|x^*x + y^*y\| = 2\|\operatorname{Re}(a^*a)\| \leq 2\|a^*a\|.$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Beweis von Theorem 1.9.7 (Fortsetzung). Nach Lemma 1.9.8 ist A_C mit der Norm $\|\cdot\|' := 2\|\cdot\|$ eine Banach- $*$ -Algebra. Für $a \in A_C$ folgt aus Proposition 1.1.7:

$$\varrho(a) \leq \|a\|' = 2\|a\| \quad (1.9.4)$$

und aus Korollar 1.1.8:

$$\varrho(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|a^n\|')^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2\|a^n\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Wir unterbrechen den Beweis für ein weiteres Lemma. \square

Lemma 1.9.9. *In der obigen Situation sei $a \in A_C$ und $x \in A$. Dann gilt*

$$\|a\| \leq 2\varrho(a^*a)^{\frac{1}{2}} \leq 2\varrho(a), \quad (1.9.5)$$

$$\|x\| = \varrho(x). \quad (1.9.6)$$

Beweis. Für $x = x^* \in A$ gilt

$$\|x^{2^n}\|^{2^{-n}} = (x^{2^{n-1}})^*(x^{2^{n-1}})^{2^{-n}} = \|x^{2^{n-1}}\|^{2^{-n+1}} = \dots = \|x\|,$$

also folgt mit dem Obigen $\varrho(x) = \|x\|$. Für alle $x \in A$ folgt weiter

$$\varrho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

mit

$$\|(x^n)^*(x^n)\|^{\frac{1}{2n}} = \|(x^*x)^n\|^{\frac{1}{2n}} = \varrho(x^*x)^{\frac{1}{2}} = \|x^*x\|^{\frac{1}{2}} = \|x\|.$$

Für $a \in A_C$ gilt folgt aus der Gleichung (1.9.3)

$$\|a^*a\|^{2^n} = (\|a^*a\|^2)^{2^{n-1}} \leq 2^{2^{n-1}} \|(a^*a)^2\|^{2^{n-1}} \leq \dots \leq 2^{2^n - 1} \|(a^*a)^{2^n}\|,$$

da

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1.$$

Es folgt mit Gleichung (1.9.3)

$$(\|a\|^2)^{2^n} \leq (2\|a^*a\|)^{2^n} \leq \frac{4^{2^n}}{2} \|(a^*a)^{2^n}\|,$$

so dass

$$\|a\|^2 \leq 4 \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-\frac{1}{2^n}} \|(a^*a)^{2^n}\|^{2^{-n}} = 4\varrho(a^*a).$$

Weiterhin

$$\|(a^*a)^n\| \leq 2\|(a^n)^*\| \|a^n\| = 2\|a^n\|^2,$$

also

$$\varrho(a^*a) \leq \varrho(a)^2.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

L 25.11.2016

7 28.11.2016

Beweis von Theorem 1.9.7 (Fortsetzung). Sei nun $X := \widehat{A_{\mathbb{C}}}$. Nach Proposition 1.1.14 ist X lokal-kompakt und wie eben gesehen ist

$$\Gamma : A \longrightarrow C_0(X) : a \longmapsto \Gamma(a), \quad \Gamma(a)(\chi) := \chi(a)$$

ein isometrischer Algebromorphismus (wohldefiniert nach Proposition 1.1.14). Er setzt sich zu einem Morphismus komplexer Algebren $A_{\mathbb{C}} \longrightarrow C_0(X)$ fort, der nach Gleichung (1.9.5) in Lemma 1.9.9 injektiv ist und abgeschlossenes Bild hat. Wir unterbrechen den Beweis erneut für ein Lemma. □

Lemma 1.9.10. *Unter den obigen Voraussetzungen gilt für $a = u + iv \in A_{\mathbb{C}}$, $u = u^*$, $v = v^* \in A_{\mathbb{C}}$, und $z = x + iy \in \sigma(a)$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$|x \cos \theta + y \sin \theta| \leq 2\|u \cos \theta + v \sin \theta\|, \quad \forall |\theta| \leq \pi.$$

Beweis. Sei $|\theta| \leq \pi$ und $z_0 := re^{i\theta}$, wobei $r > \|a\|' = 2\|a\|$. Nach (1.9.4) ist $a - z_0$ invertierbar und für den Konvergenzradius R der Reihe

$$\|a - z_0 - z\|^{-1} = (a - z_0)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} z^k (a - z_0)^{-k}$$

gilt mit den Gleichungen (1.9.5) und (1.9.4)

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\|(a - z_0)^{-n}\|')^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|(a - z_0)^{-n}\|)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (2\|b^{-n}\|^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{n}} = \sqrt{\varrho(b^{-1})} \leq \sqrt{2\|b^{-1}\|} = \sqrt{\|b^{-1}\|'} \end{aligned}$$

wobei $b := (a - z_0)^*(a - z_0)$. Es gilt

$$b = r^2(1 - c), \quad c := 2r^{-1}(u \cos(\theta) + v \sin(\theta)) - r^{-2}a^*a,$$

so dass für $r > 4\|a\|' + (\|a\|')^2$ gilt $\|c\|' < 1$ und

$$r^2\|b^{-1}\|' \leq \frac{1}{1 - \|c\|'}.$$

Folglich

$$r\sqrt{1 - \|c\|'} \leq R.$$

Falls also $z = x + iy \in \sigma(a)$ ist, folgt $z - z_0 \in \sigma(a - z_0)$ und

$$(x - r \cos(\theta))^2 + (y - r \sin(\theta))^2 = |z - z_0|^2 \geq R^2 \geq r^2(1 - \|c\|').$$

Es folgt

$$\begin{aligned} x \cos(\theta) + y \sin(\theta) &\leq \frac{r}{2}\|c\|' + (2r)^{-1}|z|^2 \\ &= \|u \cos(\theta) + v \sin(\theta) - (2r)^{-1}a^*a\|' + (2r)^{-1}|z|^2. \end{aligned}$$

Indem man $r \rightarrow \infty$ schickt, folgt die Behauptung. \square

Beweis von Theorem 1.9.7 (Fortsetzung). Sei $a = a^* \in A_{\mathbb{C}}$ und $z \in \sigma(a)$. Mit $\theta = \frac{\pi}{2}$ in Lemma 1.9.10 folgt

$$|\operatorname{im} z| \leq 2\|v\|$$

mit $v = \frac{1}{2i}(a - a^*) = 0$, also $z \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist Γ ein $*$ -Morphismus, so dass $\Gamma(A_{\mathbb{C}})$ eine abgeschlossene $*$ -Unteralgebra von $\mathcal{C}_0(X)$ ist, also eine C^* -Unteralgebra. Nach Definition von X trennt $\Gamma(A_{\mathbb{C}})$ die Punkte und ist nirgends verschwindend, also folgt $\Gamma(A_{\mathbb{C}})$. Da die Einschränkung von Γ auf A eine Isometrie ist, ist A eine reelle C^* -Algebra.

Wir definieren schließlich $\tau_0 : X \rightarrow X$ wie folgt:

$$\tau_0(\chi)(x + iy) := \chi(x^*) + i\chi(y^*).$$

Dann gilt mit $\tau(f) := f \circ \tau_0$, dass $\Gamma \circ \tau_A = \tau \circ \Gamma$, also $\Gamma(A) = \mathcal{C}_0(X, \tau_0)$. \square

Beispiel 1.9.11. Sei \mathcal{H} ein reeller Hilbertraum. Jedes $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ setzt sich eindeutig linear zu $x_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ fort. Man definiert einen linearen Antiautomorphismus τ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ durch

$$\langle \xi \mid \tau(x)\eta \rangle := \overline{\langle x\xi \mid \eta \rangle}, \quad \forall x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}), \xi, \eta \in \mathcal{H}. \quad (1.9.7)$$

Dann gilt

$$\tau(x) = x^* \iff \langle x\mathcal{H} \mid \mathcal{H} \rangle \subseteq \mathbb{R} \iff x(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}.$$

Folglich identifiziert sich $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit der durch τ definierten reellen C^* -Algebra und es gilt $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{L}(\mathcal{H})_{\mathbb{C}}$.

Sei nun A eine in der Normtopologie abgeschlossene Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, so dass $A^* = A$. Dann ist A eine C*-Algebra, denn die Inklusionsabbildung $A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ identifiziert $A_{\mathbb{C}}$ mit einer C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$, so dass

$$A = \{a \in A_{\mathbb{C}} \mid \tau(a) = a^*\},$$

wobei τ wie oben definiert ist.

Definition 1.9.12 (*-Darstellungen von B*-Algebren). Sei \mathcal{H} ein reeller Hilbertraum und A eine B*-Algebra. Dann ist eine *-Darstellung von A ein reell linearer *-Morphismus $\pi : A \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Theorem 1.9.13 (Ingelstam). Sei A eine reelle Banach-Algebra mit einer Involution $(-)^*$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) A ist eine reelle C*-Algebra.
- (ii) A ist eine B*-Algebra und für alle $a \in A$ ist das Element a^*a positiv.
- (iii) A ist eine B*-Algebra und für alle $a \in A$ ist $1 + a^*a$ invertierbar in \tilde{A} .
- (iv) Es gilt

$$\|a\|^2 \leq \|a^*a + b^*b\|, \quad \forall a, b \in A. \tag{1.9.8}$$

- (v) Es gilt

$$\|a\|^2 \leq \|a^2 + b^2\|, \quad \forall a = a^*, b = b^* \in A, ab = ba. \tag{1.9.9}$$

- (vi) A besitzt eine isometrische *-Darstellung.

Lemma 1.9.14. Sei A derart, dass Gleichung (1.9.9) gelte, und $a \in A$. Dann sind äquivalent:

- (i) Das Element a ist positiv.
- (ii) Es gibt es $b \in A_{sa}$ mit $a = b^2$.
- (iii) Es gilt $a \in A_{sa}$ und $\|t - a\| \leq t$ für alle $t \geq \|a\|$.
- (iv) Es gilt $a \in A_{sa}$ und $\|t - a\| \leq t$ für ein $t \geq \|a\|$.

Beweis. Sei a selbstadjungiert. Dann ist die von a erzeugte abgeschlossene *-Unteralgebra $B \subseteq A$ nach Theorem 1.9.7 eine reelle C*-Algebra. Nun kann man Lemma 1.2.3 auf $B_{\mathbb{C}}$ anwenden. □

⌊ 25.11.2016

⌋ 28.11.2016

Beweis von Theorem 1.9.13. (i) \implies (iv). Nach Voraussetzung ist \tilde{A}_C eine C^* -Algebra. Aus Theorem 1.2.2 folgt $a^*a \geq 0$ für alle $a, b \in A$, also $a^*a \leq a^*a + b^*b$. Mit Korollar 1.2.5 schließt man

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*a + b^*b\|.$$

(ii) \implies (iii). Es gilt

$$\sigma(1 + a^*a) = 1 + \sigma(a^*a) \subseteq [1, \infty),$$

also $0 \notin \sigma(1 + a^*a)$, so dass $1 + a^*a$ in \tilde{A}_C invertierbar ist. Es gilt mit $b := (1 + a^*a)^{-1}$, dass

$$1 = \tau(1 + a^*a)\tau(b) = (1 + a^*a)\tau(b),$$

also $b = \tau(b)$. Ebenso zeigt man $b = b^*$, so dass $b \in \tilde{A}$ folgt.

(iii) \implies (ii). Sei $a = a^* \in A$ und $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Für $y \neq 0$ gilt

$$y^{-2}(a - z)(a - z)^* = y^{-2}((a - x)^2 + y^2) = 1 + b^*b, \quad b := (y^{-1}a - y^{-1}x).$$

Nach Voraussetzung ist $1 + b^*b$ invertierbar. Damit ist für $y \neq 0$

$$(a - z)^{-1} = (a - z)^*((a - x)^2 + y^2)^{-1},$$

d.h. $z \notin \sigma(a)$ und folglich $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Sei nun $a \in A$ beliebig. Wir wissen bereits, dass $\sigma(a^*a) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Angenommen, es gebe $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$, mit $-x^2 \in \sigma(a^*a)$. Dann gilt für $b := x^{-1}a$, dass

$$0 = 1 + x^{-2}(-x^2) \in \sigma(1 + b^*b),$$

im Widerspruch dazu, dass $1 + b^*b$ invertierbar ist. Folglich ist $\sigma(a^*a) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(ii) \implies (v). Seien $a, b \in A$, $ab = ba$, $a = a^*$, $b = b^*$. Wie im Beweis von Lemma 1.9.9 zeigt man

$$\varrho(a^2 + b^2) = \|a^2 + b^2\|, \quad \varrho(a^2) = \|a^2\|.$$

Nach Voraussetzung ist $b^2 \geq 0$, also $a^2 \leq a^2 + b^2$. Sind also $z \in \sigma(a^2)$ und $w \in \sigma(a^2 + b^2)$, so folgt $z \geq 0$ und $w - z \geq 0$. Es folgt $w \geq 0$ und $z \leq w \leq \varrho(a^2 + b^2)$, also

$$\|a\|^2 = \|a^2\| = \varrho(a^2) \leq \varrho(a^2 + b^2) = \|a^2 + b^2\|.$$

(iv) \implies (v). Trivial.

(v) \implies (ii). Wie im Beweis von Theorem 1.2.2 verwendet man Lemma 1.9.14, um zu zeigen, dass A_+ ein abgeschlossener konvexer Kegel ist. Man argumentiert weiter wie im Beweis von Theorem 1.2.2, denn aufgrund von Theorem 1.9.7 kann man Positiv- und Negativteil von selbstadjungierten Elementen definieren.

(v) \implies (vi). Die Voraussetzung gilt für \tilde{A} . Nach der Voraussetzung können wir wegen Theorem 1.9.7 den stetigen Funktionalkalkül auf jede von einem normalen Element erzeugte abgeschlossene *-Unteralgebra anwenden. Insbesondere geht der Beweis von Proposition 1.5.3 (mit 1 anstelle von (u_λ)) durch und zeigt, dass eine Linearform ϕ auf \tilde{A} genau dann positiv ist, wenn sie stetig ist und $\phi(1) = \|\phi\|$ gilt. Sodann zeigt man wie im Beweis von Proposition 1.6.8, dass die Zustände von \tilde{A} trennend sind. Um den Beweis von Theorem 1.6.12 zu replizieren, reicht es zu zeigen, dass jeder abgeschlossene *-invariante Unterraum von seinen positiven Elementen aufgespannt wird. Aber dies folgt aus dem Funktionalkalkül.

(vi) \implies (i). Folgt aus Beispiel 1.9.11. □

1.10 Bibliographische Notizen zu Kapitel 1

Die Abschnitte 1.1–1.5 folgen überwiegend Pedersens Buch [13]. Abschnitte 1.6 und 1.7 vermischen Material aus Pedersens und Davidsons Buch [8]. Abschnitt 2.5 folgt Pedersen. Für Abschnitt 1.9 wurde schließlich auf die Originalarbeiten von Arens, Arens-Kaplansky und Ingelstam zurückgegriffen [1, 2, 10].

2

Beispiele von C^* -Algebren

2.1 Die Algebra der kompakten Operatoren

Im folgenden sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ die Algebra aller kompakten Operatoren auf \mathcal{H} , d.h.

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid x(B) \text{ kompakt}\},$$

wobei B die Einheitskugel von \mathcal{H} sei.

Da \mathcal{K} ein Ideal in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist, folgt für $x \in \mathcal{K}$ mit $x = u|x|$, dass $\mathcal{K} \ni u^*x = |x|$ und $x^* = |x|u^* \in \mathcal{K}$ ist. Daher ist \mathcal{K} eine C^* -Algebra.

Definition 2.1.1 (Projektionen). Ein selbst-adjungiertes Element $p \in A$ heißt *Projektion*, falls $p^2 = p$. Insbesondere ist $p \geq 0$.

Proposition 2.1.2. Sei $0 \neq A \subseteq \mathcal{K}$ eine C^* -Unteralgebra. Dann enthält A eine Projektion $e \neq 0$, die minimal bezüglich der Ordnung auf positiven Elementen ist. Es gilt $eAe = \mathbb{C}e$.

Ist $\pi \neq 0$ eine $*$ -Darstellung von A , so gibt es eine minimale Projektion $e \in A$, so dass $\pi(e) \neq 0$. Ist π irreduzibel, so hat $\pi(e)$ Rang eins.

Beweis. Es gibt $a \in A_+$, $a \neq 0$. Da a kompakt ist, ist nach Theorem A.3.5 $\sigma(a)$ abzählbar und 0 der einzig mögliche Häufungspunkt von $\sigma(a)$. Weiter ist jedes $\lambda \in \sigma(a)$, $\lambda \neq 0$, ein Eigenwert von a . Da λ ein isolierter Punkt von $\sigma(a)$ ist, ist $\delta_\lambda \in \mathcal{C}(\sigma(a)) \cong C^*(1, a)$, also die Spektralprojektion p von λ in A enthalten.

Nach Voraussetzung ist p kompakt, also ist $p(B)$, die Einheitskugel von $p(\mathcal{H})$, kompakt. Mit Korollar A.3.4 folgt, dass $p(\mathcal{H})$ endlich-dimensional ist, d.h. p hat endlichen Rang. Dann gibt es eine Projektion $e \in A$ mit $e \leq p$ von minimalem Rang $\neq 0$. Diese Projektion ist minimal in A . Angenommen, eAe enthielte ein selbstadjungiertes Element $\notin \mathbb{C}e$. Dann erhält man mit dem gleichen Argument eine Spektralprojektion $e' \leq e$ von a , $e' \neq e$. Dann wäre aber $\text{rk } e' < \text{rk } e$, Widerspruch! Somit $eAe = \mathbb{C}e$.

Sei $\pi \neq 0$ eine $*$ -Darstellung. Es gibt $a \in A_+$, so dass $\pi(a) \neq 0$. Es gibt eine Spektralprojektion p von a mit $\pi(p) \neq 0$, denn $a|_{\ker a^\perp}$ liegt im Normabschluss

des Aufspanss seiner Spektralprojektionen zu Eigenwerten $\neq 0$. Da p endlichen Rang hat, ist p die Summe minimaler Projektionen in A . Es gibt also eine minimal Projektion e mit $\pi(e) \neq 0$.

Ist $\text{rk } \pi(e) > 1$, so nehme man Einheitsvektoren $\xi \perp \eta$ in $\text{im } \pi(e)$. Für alle $b \in A$ gibt es $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $ebe = \lambda e$, also

$$\langle \xi | \pi(b)\eta \rangle = \langle \xi | \pi(ebe)\eta \rangle = \lambda \langle \xi | \eta \rangle = 0.$$

Ist $\eta \notin \overline{\pi(A)\xi} \neq 0$ und π folglich nicht irreduzibel. □

⊂ 30.11.2016

⊃ 5.12.2016

Korollar 2.1.3. Sei $0 \neq A \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H})$ eine C^* -Unteralgebra, so dass die Identitätsdarstellung irreduzibel ist. Dann ist $A = \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Umgekehrt ist die Identitätsdarstellung von $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ irreduzibel.

Beweis. Nach Proposition 2.1.2 gibt es eine minimale Projektion $e \in A$ von Rang eins. Es gibt einen Einheitsvektor $\psi \in \mathcal{H}$ mit $e = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Seien $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Nach Theorem 1.8.2 (vi) gibt es $a, b \in A$ mit $a\psi = \xi$ und $a\psi = \eta$. Es folgt

$$A \ni aeb^* = a|\psi\rangle\langle\psi|b^* = |a\psi\rangle\langle b\psi| = |\xi\rangle\langle\eta|.$$

Folglich enthält A die Operatoren endlichen Rangs und damit auch \mathcal{K} .

Da jeder beschränkte Operator der SOT-Limes von Operatoren endlichen Rangs ist (Theorem A.3.7), folgt, dass \mathcal{K} SOT-dicht in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist. Aus Theorem 1.8.2 (v) folgt, dass die Identitätsdarstellung von \mathcal{K} irreduzibel ist. □

Korollar 2.1.4. Die C^* -Algebra \mathcal{K} ist einfach, d.h., sie besitzt keine nicht-trivialen abgeschlossenen Ideale.

Im Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.1.5. Sei A eine C^* -Algebra und $J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal. Ist (\mathcal{H}, π) eine irreduzible $*$ -Darstellung von A mit $\pi(J) \neq 0$, so ist $(\mathcal{H}, \pi|_J)$ eine irreduzible $*$ -Darstellung von J .

Beweis. Wegen $AJ \subseteq J$ ist $\pi(J)\mathcal{H} \neq 0$ ein A -invarianter Unterraum von \mathcal{H} , also $\mathcal{H} = \pi(J)\mathcal{H}$ nach Theorem 1.8.2 (i). Sei $0 \neq V \subseteq \mathcal{H}$ ein J -invarianter Unterraum. Da V^\perp ebenfalls J -invariant ist, folgt $V = \pi(J)V$. Dann ist aber auch V invariant unter A , und es folgt $\mathcal{H} = V$. □

Beweis von Korollar 2.1.4. Sei $J \neq 0$ ein abgeschlossenes Ideal von \mathcal{K} . Nach dem Lemma 2.1.5 ist die Einschränkung der Identitätsdarstellung von \mathcal{K} auf J irreduzibel. Damit ist $J = \mathcal{K}$, gemäß Korollar 2.1.3. □

Definition 2.1.6 (Unitäre Äquivalenz von Darstellungen). Seien (\mathcal{H}, π) und (\mathcal{H}', π') $*$ -Darstellungen von A . Sie heißen *unitär äquivalent*, falls es einen isometrischen Isomorphismus $u : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ gibt, so dass

$$u\pi(a) = \pi'(a)u, \quad \forall a \in A.$$

Theorem 2.1.7. Sei $A \subseteq \mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ eine C^* -Unteralgebra. Jede nicht ausgeartete $*$ -Darstellung von A ist die orthogonale direkte Summe von irreduziblen $*$ -Darstellungen, die unitär äquivalent zu Unterdarstellungen der identischen Darstellung sind.

Im Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 2.1.8. Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.1.7 hat jede nicht ausgeartete $*$ -Darstellung $\neq 0$ eine irreduzible Unterdarstellung, die zu der Einschränkung der identischen Darstellung auf einen minimalen A -invarianten Unterraum $\neq 0$ unitär äquivalent ist.

Beweis. Sei (\mathcal{H}', π) eine nicht ausgeartete $*$ -Darstellung $\neq 0$ von A und gemäß Proposition 2.1.2 $e \in A$ eine minimale Projektion, so dass $p := \pi(e) \neq 0$. Seien $\psi \in e(\mathcal{H})$, $\xi \in p(\mathcal{H})$, $\|\psi\| = \|\xi\| = 1$, und definiere

$$\mathcal{H}_\psi := \overline{A\psi}, \quad \mathcal{H}'_\xi := \overline{\pi(A)\xi}.$$

Wir definieren eine lineare Abbildung $u : \mathcal{H}_\psi \rightarrow \mathcal{H}'_\xi$ durch stetige Fortsetzung der Zuordnung

$$u(a\psi) := \pi(a)\xi.$$

Um zu zeigen, dass dadurch eine isometrischer Isomorphismus wohldefiniert ist, betrachten wir den Zustand ϕ auf A , der durch

$$\phi(a) := \langle \psi | a\psi \rangle, \quad \forall a \in A,$$

definiert ist. Es gilt $eAe = Ce$ und $e\psi = \psi$, also

$$eae = \phi(a)e, \quad \forall a \in A.$$

Es folgt für alle $a, b \in A$, dass

$$\langle u(a\psi) | u(b\psi) \rangle = \langle \pi(ae)\xi | \pi(be)\xi \rangle = \phi(a^*b) \langle \xi | p\xi \rangle = \phi(a^*b) = \langle a\psi | b\psi \rangle,$$

also ist u wohldefiniert und ein isometrischer Isomorphismus.

Weiter gilt

$$\pi(a)u(b\psi) = \pi(ab)\xi = u(ab\psi), \quad \forall b \in A,$$

also $\pi(a)u = ua$. Damit sind die Darstellungen $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ mit $\pi_\psi(a) = a|_{\mathcal{H}_\psi}$ und $(\mathcal{H}'_\xi, \pi'_\xi)$ mit $\pi'_\xi(a) = \pi(a)|_{\mathcal{H}'_\xi}$ unitär äquivalent.

Es gilt für alle $a \in A$:

$$e(a\psi) = eae\psi \in \mathbb{C}\psi,$$

also ist im $\pi_\psi(e) = \mathbb{C}\psi$. Sei $e' \in \pi_\psi(A)' \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H}_\psi)$ eine Projektion. Dann ist

$$e'\psi = e'\pi_\psi(e)\psi = \pi_\psi(e)e'\psi = \lambda\psi,$$

für ein $\lambda \in \mathbb{C}$. Da $e'^2 = e'$, ist $\lambda = 0, 1$. Ist $\lambda = 1$, so ist $e' = \text{id}_{\mathcal{H}_\psi}$. Andernfalls ist

$$e'a\psi = e'\pi_\psi(a)\psi = \pi_\psi(a)e'\psi = 0,$$

also $e' = 0$. Nach Theorem 1.8.2 (iv) ist $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi)$ irreduzibel. Insbesondere ist nach Theorem 1.8.2 (i) \mathcal{H}_ψ ein minimaler A -invarianter Unterraum von \mathcal{H} . Die Behauptung folgt. \square

Beweis von Theorem 2.1.7. Sei (\mathcal{H}', π) eine nicht ausgeartete $*$ -Darstellung von A und $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$ eine maximale Familie paarweise orthogonaler abgeschlossener A -invarianter Unterräume, so dass die Einschränkung von π auf jedes \mathcal{H}_j irreduzibel ist. Dann ist

$$\mathcal{H}'' := \left(\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j \right)^\perp$$

wieder invariant unter A . Wäre $\mathcal{H}'' \neq 0$, so existierte nach Lemma 2.1.8 eine irreduzible Unterdarstellung von \mathcal{H}'' , Widerspruch! Folglich ist $\mathcal{H}' = \bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j$. Nach Lemma 2.1.8 ist die Einschränkung von π auf \mathcal{H}_j äquivalent zu einer Unterdarstellung der Identitätsdarstellung. Daher folgt die Behauptung. \square

Korollar 2.1.9. Sei $A \subseteq \mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ eine C^* -Unteralgebra, wobei \mathcal{H} als separabel vorausgesetzt sei. Dann gibt es irreduzible $*$ -Darstellungen (\mathcal{H}_k, π_k) , $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, einen Hilbertraum \mathcal{H}_0 und einen isometrischen Isomorphismus

$$u : \mathcal{H} \longrightarrow \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k,$$

so dass die Abbildung $a \mapsto uau^*$ einen $*$ -Isomorphismus

$$A \longrightarrow 0 \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{K}(\mathcal{H}_k)$$

induziert. Dabei sind jeweils nur endlich viele Summanden (\mathcal{H}_k, π_k) zueinander unitär äquivalent. Insbesondere ist jede endlich-dimensionale C^* -Algebra isomorph zu einer direkten Summe von Matrixalgebren $M_n(\mathbb{C})$ und folglich unital.

Beweis. Nach Einschränkung auf $\overline{A\mathcal{H}}$ können wir o.B.d.A. annehmen, dass die identische Darstellung nicht ausgeartet ist. Nach Theorem 2.1.7 ist sie dann die orthogonale direkte Summe von irreduziblen Darstellungen (\mathcal{H}_j, π_j) ,

so dass jedes π_j unitär äquivalent zu einer Unterdarstellung der identischen Darstellung ist. Aus der letzten Behauptung folgt

$$\pi_j(A) \subseteq \mathcal{K}(\mathcal{H}_j), \quad \forall j.$$

Aus Korollar 2.1.3 folgt, dass $\pi_j(A) = \mathcal{K}(\mathcal{H}_j)$.

Es bleibt zu zeigen, dass die irreduziblen Summanden endliche Vielfachheit haben. Dazu beachte man, dass eine Projektion genau dann kompakt ist, wenn sie endlichen Rang hat (Korollar A.3.4). Nun wende man Proposition 2.1.2 an, um den Beweis abzuschließen. \square

2.2 AF-Algebren

Proposition 2.2.1. *Es seien $A_1 = \bigoplus_{i=1}^k M_{m_i}(\mathbb{C})$ und $A_2 = \bigoplus_{j=1}^\ell M_{n_j}(\mathbb{C})$ endlich-dimensionale C^* -Algebren. Sei $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ ein injektiver $*$ -Morphismus. Dann ist φ bis auf Konjugation mit Elementen von $U(A_2)$ bestimmt durch genau eine $\ell \times k$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} \in \mathbb{N}$ für alle i, j und*

$$Am \leq n,$$

wobei $m = (m_1, \dots, m_k)^t$, $n = (n_1, \dots, n_\ell)^t$ und die Ungleichung komponentenweise zu verstehen ist. Der Fall, dass φ unital ist, entspricht genau $Am = n$.

5.12.2016

Beweis. Sei $\pi_j : A_2 \rightarrow M_{n_j}(\mathbb{C})$ die kanonische Projektion. Dann ist $\varphi_i := \pi_j \circ \varphi$ eine $*$ -Darstellung von A_1 und nach Theorem 2.1.7 die direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen der identischen Darstellung von A_1 . Da die Summanden $M_{m_j}(\mathbb{C})$ von A_1 einfach sind, haben sie jeweils nur eine unitäre Äquivalenzklasse von Darstellungen. Dann ist φ_i unitär äquivalent zu

$$a_{j1} \text{id}_{m_1} \oplus \dots \oplus a_{jk} \text{id}_{m_k},$$

wobei id_n die identische Darstellung von $M_n(\mathbb{C})$ bezeichne und $m\pi$ die m -fache orthogonale direkte Summe von π . Es gilt $\sum_{i=1}^k a_{ji} n_i \leq m_j$ und Gleichheit genau dann, wenn φ_j unital ist. \square

Definition 2.2.2 (Matrix der partiellen Vielfachheiten). Die Matrix A aus Proposition 2.2.1 heißt *Matrix der partiellen Vielfachheiten* (Englisch: matrix of partial multiplicities).

Konstruktion 2.2.3 (Bratteli-Diagramm). Sei A_ℓ , $\ell \in \mathbb{N}$, eine Folge endlich-dimensionaler C^* -Algebren und $\varphi_\ell : A_\ell \rightarrow A_{\ell+1}$ unitale $*$ -Morphismen. Bis auf unitäre Äquivalenz gilt

$$A_\ell = \bigoplus_{j=1}^{k_\ell} M_{m_j^{(\ell)}}(\mathbb{C})$$

und φ_ℓ ist durch die Matrix partieller Vielfachheiten

$$A^{(\ell)} = (a_{ij}^{(\ell)})_{1 \leq i \leq k_{\ell+1}, 1 \leq j \leq k_\ell}, \quad A^{(\ell)} m^{(\ell)} = m^{(\ell+1)}$$

gegeben. Das *Bratteli-Diagramm* der Folge ist der gerichtete und beschriftete Graph mit

- Knoten $(\ell, 1), \dots, (\ell, k_\ell)$ mit Beschriftungen $m_1^{(\ell)}, \dots, m_{k_\ell}^{(\ell)}$ (entsprechend den Summanden von A_ℓ und
- $a_{ji}^{(\ell)}$ gerichteten Kanten von (ℓ, i) nach $(\ell + 1, j)$ (entsprechend der partiellen Vielfachheit des i ten Summanden von A_ℓ im j ten Summanden von $A_{\ell+1}$).

Definition 2.2.4. Sei (A_ℓ, φ_ℓ) eine Folge von C^* -Algebren A_ℓ und $*$ -Morphismen $\varphi_\ell : A_\ell \rightarrow A_{\ell+1}$. Eine C^* -Algebra A heißt *induktiver Limes* der A_ℓ (man schreibt auch $A = \varinjlim_\ell A_\ell$), falls es $*$ -Morphismen $j_\ell : A_\ell \rightarrow A$ mit $j_{\ell+1} \circ \varphi_\ell = j_\ell$ für alle ℓ gibt, so dass es für jede Folge kommutativer Diagramm von $*$ -Morphismen und C^* -Algebren

$$\begin{array}{ccc} A_\ell & \xrightarrow{\psi_\ell} & B \\ \varphi_\ell \downarrow & \nearrow \psi_{\ell+1} & \\ A_{\ell+1} & & \end{array}$$

genau einen $*$ -Morphismus $\psi : A \rightarrow B$ gibt, so dass $\psi \circ j_\ell = \psi_\ell$ für alle ℓ gilt. Eine C^* -Algebra heißt *AF-Algebra*, falls sie induktiver Limes einer Folge unitaler $*$ -Morphismen endlich-dimensionaler C^* -Algebren ist. Offensichtlich ist eine solche Algebra durch (mindestens) ein Bratteli-Diagramm gegeben und jedes Bratteli-Diagramm definiert genau eine AF-Algebra.

Beispiel 2.2.5. Die Algebra $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (mit \mathcal{H} separabel und unendlich-dimensional) ist eine AF-Algebra. Man kann \mathcal{K} als den induktiven Limes der Folge mit dem folgenden Bratteli-Diagramm erhalten:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow \dots$$

Beispiel 2.2.6. Die *CAR-Algebra* ist die AF-Algebra A , die als induktiver Limes der Einbettungen

$$\varphi_\ell : M_{2^\ell}(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{2^{\ell+1}}(\mathbb{C}), \quad \varphi_\ell(a) := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

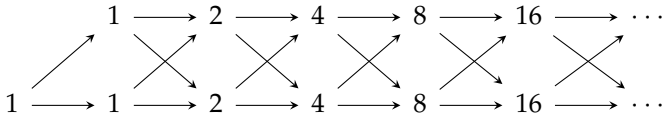
gegeben ist. Sie ist durch das folgende Bratteli-Diagramm beschrieben:

$$1 \implies 2 \implies 4 \implies 8 \implies 16 \implies 32 \implies \dots$$

Da Bild von φ_ℓ ist enthalten in der Unteralgebra $B_\ell := M_{2^\ell}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^\ell}(\mathbb{C}) \subseteq A_{\ell+1}$, also ist A auch der induktive Limes der B_ℓ . Es gilt

$$\varphi_{\ell+1} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix},$$

also hat die zugehörige Folge das Bratteli-Diagramm



Dies zeigt, dass dieselbe Algebra durch verschiedene Bratteli-Diagramme beschrieben wird. Allerdings gilt per Konstruktion

$$A_1 \subseteq B_1 \subseteq A_2 \subseteq B_2 \subseteq \dots$$

im Sinne injektiver (und sogar unitaler) $*$ -Morphismen.

Der folgende Satz aus dem Jahr 1972 verallgemeinert einen Satz von Glimm (1960), der den Fall von UHF-Algebren betrachtete, d.h., dass alle A_n Matrixalgebren (und nicht Summen solcher) sind.

Theorem 2.2.7 (Bratteli). *Eine C^* -Algebra A ist genau dann eine AF-Algebra, wenn sie separabel ist und folgendes gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ und alle endlichen Teilmengen $C \subseteq A$ gibt es eine endlich-dimensionale Unter- C^* -Algebra $B \subseteq A$, so dass*

$$\max_{a \in C} \text{dist}(a, B) \leq \varepsilon. \quad (2.2.1)$$

Falls $A_0 \subseteq A$ eine endlich-dimensionale Unter- C^* -Algebra von A ist, so kann man B so wählen, dass $A_0 \subseteq B$ gilt.

Der Beweis erfordert etwas Vorbereitung.

Lemma 2.2.8. *Für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$, so dass für jede unital C^* -Algebra A , jede Folge $p_1, \dots, p_n \in A$ paarweise orthogonaler Projektionen (d.h. $p_i p_j = 0$ für $i \neq j$) und jede Unter- C^* -Algebra $B \subseteq A$ mit*

$$\max_{j=1}^n \text{dist}(p_j, B) \leq \delta$$

gilt, dass es paarweise orthogonale Projektionen $q_1, \dots, q_n \in B$ gibt mit

$$\max_{j=1}^n \|p_j - q_j\| \leq \varepsilon.$$

Gilt $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, so kann man annehmen, dass $\sum_{j=1}^n q_j = 1$ ist.

Beweis. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $n = 1$ setzen wir $\delta := \min(\frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{6})$. Ist $p_1 \in A$ mit $\text{dist}(p_1, B) \leq \delta$, so gibt es $b \in B$ mit $\|p_1 - b\| \leq 2\delta$. O.b.d.A. ist $b = b^*$.

Für $z \neq 0, 1$ ist $z - p_1$ invertierbar mit

$$\|(z - p_1)^{-1}\| = \text{dist}(z, \{0, 1\})^{-1}.$$

Ist $|z| > 2\delta$ und $|z - 1| > 2\delta$, so folgt also

$$\|(z - p_1)^{-1}(b - p_1)\| < 1$$

und das Element

$$(z - p_1)^{-1}(z - b) = (z - p_1)^{-1}(z - p_1 + p_1 - b) = 1 - (z - p_1)^{-1}(b - p_1)$$

ist invertierbar in \tilde{A} (geometrische Reihe). Damit ist

$$\sigma(b) \subseteq [-2\delta, 2\delta] \cup [1 - 2\delta, 1 + 2\delta]$$

Da $2\delta \leq \frac{1}{3}$, sind diese Intervalle disjunkt, und die charakteristische Funktion $f := 1_{[1-2\delta, 1+2\delta]}$ liegt in $\mathcal{C}(\sigma(b))$.

Wir erhalten somit eine Projektion $q_1 := f(b) \in C^*(B)$ und gilt

$$\|p_1 - q_1\| \leq \|p_1 - b\| + \|\text{id} - f\|_{\infty, \sigma(B)} \leq 4\delta \leq \varepsilon.$$

Dies zeigt den Induktionsanfang mit $\delta(\varepsilon, 1) := \delta$. Man beachte, dass für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt: $\delta(\varepsilon, 1) \leq c_1\varepsilon$ mit $c_1 = \frac{1}{4}$. (Fortsetzung folgt.) \square

7.12.2016

12.12.2016

Beweis (Fortsetzung). Die Behauptung sei für ein gegebenes $n \geq 1$ bewiesen, mit $\delta(\varepsilon, j) \leq c_j\varepsilon$ für $j = 1, \dots, n$, für hinreichend kleines ε . Es gibt also ein $1 \geq \delta_0 > 0$, so dass für alle $0 < \delta \leq \delta_0$ paarweise orthogonale Projektionen $q_1, \dots, q_n \in B$ existieren mit

$$\|p_j - q_j\| \leq c_j\delta, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Seien

$$p := \sum_{j=1}^n p_j, \quad q := \sum_{j=1}^n q_j$$

und $b = b^* \in B$ mit $\|p_{n+1} - b\| \leq 2\delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|p_{n+1} - (1 - q)b(1 - q)\| &= \|(1 - p)p_{n+1}(1 - p) - (1 - q)b(1 - q)\| \\ &\leq \|(q - p)p_{n+1}(1 - p)\| + \|(1 - q)(p_{n+1} - b)(1 - p)\| + \|(1 - q)b(q - p)\| \\ &\leq (1 + \|b\|)\|q - p\| + \|p_{n+1} - b\| \leq (2 + 2\delta) \sum_{j=1}^n c_j\delta + \delta \leq \frac{c_{n+1}\delta}{2}, \end{aligned}$$

wobei $c_{n+1} := 2(1 + 4 \sum_{j=1}^n c_j)$.

Nach dem Beweis für $n = 1$ gibt es eine Projektion $q_{n+1} \in (1 - q)B(1 - q)$ mit $\|(1 - q)b(1 - q) - q_{n+1}\| \leq 2\delta \leq \frac{c_{n+1}}{2}\delta$. Es folgt

$$\|p_{n+1} - q_{n+1}\| \leq c_{n+1}\delta.$$

Es reicht also,

$$\delta(\varepsilon, n) := \min\left(\frac{\varepsilon}{c_{n+1}}, \delta_0, \min_{j=1}^n \delta\left(\frac{\varepsilon}{c_j c_{n+1}}, j\right)\right)$$

zu setzen, um die Induktionsbehauptung zu beweisen.

Schließlich nehme man an, dass $\sum_{j=1}^{n+1} p_j = 1$ gelte. Dann folgt

$$\left\|1 - \sum_{j=1}^{n+1} q_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n+1} \|p_j - q_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n+1} c_j\right)\delta \leq 2c_{n+1}\delta,$$

was < 1 ist, vorausgesetzt, δ ist hinreichend klein. Da $1 - \sum_{j=1}^{n+1} q_j$ aber eine Projektion ist, hat dieses Element Norm 0 oder 1. Es folgt die Behauptung. \square

Lemma 2.2.9. Für alle $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$, so dass folgedes gilt: Falls A eine unitale C^* -Algebra ist und Unter- C^* -Algebren $B_1, B_2 \subseteq A$ gegeben sind, so dass $\dim B_1 \leq n$ gilt und B_1 ein System von Elementarmatrizen $e_{ij}^{(s)}$, $1 \leq s \leq \ell$, $1 \leq i, j \leq m_s$, besitzt, so dass

$$\max_{s=1}^{\ell} \max_{i,j=1}^{m_s} \text{dist}(e_{ij}^{(s)}, B_2) \leq \delta$$

gilt, gibt es ein unitäres Element $u \in C^*(1, B_1, B_2) \subseteq \tilde{A}$ mit

$$u^* B_1 u \subset B_2, \quad \|u - 1\| \leq \varepsilon.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass man annehmen kann, dass B_1 und B_2 die Eins von A enthalten. Denn ist $e \in B_1$ die Eins von B_1 , so ist $C^*(1, B_1) = B_1 \oplus \mathbb{C}(1 - e)$. Es gilt weiter

$$\text{dist}(1 - e, C^*(1, B_2)) = \text{dist}(e, B_2) \leq \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{m_s} \text{dist}(e_{ii}^{(s)}, B_2) \leq n\delta,$$

also reicht es, die Behauptung für $C^*(1, B_1)$ und $C^*(1, B_2)$ zu beweisen.

O.b.d.A. gelte also $1 \in B_1 \cap B_2$. Zunächst nehmen wir an, dass $B_1 \cong \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$ mit $\dim B_1 = n$ gelte. Die Elementarmatrizen für B_1 sind paarweise orthogonale Projektionen $p_1, \dots, p_n \in B_1$ mit $\sum_{j=1}^n p_j = 1$.

Wir nehmen an, dass $\varepsilon < 1$ sei. Seien $\eta := \frac{\varepsilon}{n+1}$ und $\delta := \delta(\eta, n)$ wie in Lemma 2.2.8. Dann gibt es paarweise orthogonale Projektionen $q_1, \dots, q_n \in B_2$ mit $\|p_j - q_j\| \leq \eta$ für alle $j = 1, \dots, n$.

Definiere $a := \sum_{j=1}^n q_j p_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a^* a - (1 - \eta) &= \sum_{j=1}^n p_j (q_j - (1 - \eta) p_j) p_j = \sum_{j=1}^n p_j (\eta + (q_j - p_j)) p_j \\ &\geq \sum_{j=1}^n p_j (\eta - \|q_j - p_j\|) p_j \geq \eta \sum_{j=1}^n p_j = \eta \geq 0, \end{aligned}$$

also $a^* a \geq 1 - \eta > 0$ und $a^* a$ ist invertierbar. Sei $u := a|a|^{-1}$. Dann ist u unitär. Es gilt für alle $j = 1, \dots, n$

$$a p_j = \sum_{i=1}^n q_i p_i p_j = q_j p_j = \sum_{i=1}^n q_j q_i p_i = q_j a$$

und folglich $a^* a p_j = p_j a^* a$. Es folgt

$$u p_j = a|a|^{-1} p_j = a p_j |a|^{-1} = q_j a |a|^{-1} = q_j u,$$

also $u B_1 u^* \subseteq B_2$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} \|u - 1\| &\leq \|u - a\| + \|a - 1\| \leq \|a\| \| |a|^{-1} - 1 \| + \sum_{j=1}^n \|(q_j - p_j) p_j\| \\ &\leq ((1 - \eta)^{-\frac{1}{2}} - 1) + n\eta \leq (n + 1)\eta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung für das spezielle B_1 .

Sei nun B_1 beliebig und B'_1 die von $e_{ii}^{(s)}$, $1 \leq s \leq \ell$, $1 \leq i \leq m_s$, aufgespannte C^* -Unteralgebra. Sei $\delta(\eta', n)$ wie in Lemma 2.2.8, wobei $\eta' := \frac{\varepsilon}{12(n+1)}$, und

$$0 < \delta \leq \min\left(\delta(\eta', n), \frac{\varepsilon}{12}\right).$$

Erfüllt nun B_1 die Voraussetzung, so gibt es nach den obigen Überlegungen ein unitäres Element $u \in C^*(1, B'_1, B_2)$, so dass

$$u B'_1 u^* \subseteq B_2, \quad \|u - 1\| \leq \frac{\varepsilon}{12}.$$

Seien $f_{ij}^{(s)} := u e_{ij}^{(s)} u^*$. Es gilt nach Voraussetzung

$$\text{dist}(f_{ij}^{(s)}, B_2) \leq \delta + \|e_{ij}^{(s)} - f_{ij}^{(s)}\| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

denn

$$\|e_{ij}^{(s)} - f_{ij}^{(s)}\| \leq \|(u - 1)e_{ij}^{(s)}u^*\| + \|e_{ij}^{(s)}(u^* - 1)\| \leq 2\|u - 1\| \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Für alle s und j sei $a_{1j}^{(s)} \in B_2$ selbstadjungiert mit $\|f_{1j}^{(s)} - a_{1j}^{(s)}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für $b_{1j}^{(s)} := f_{11}^{(s)} a_{1j}^{(s)} f_{jj}^{(s)}$:

$$\|f_{1j}^{(s)} - b_{1j}^{(s)}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir können annehmen, dass A treu und nicht-ausgeartet auf einem Hilbertraum \mathcal{H} wirkt. Insbesondere ist $b_{1j}^{(s)}$ auf $\ker f_{jj}^{(s)}$, also

$$b_{1j}^{(s)} - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) f_{1j}^{(s)} \geq \frac{\varepsilon}{3} f_{1j}^{(s)}$$

und $b_{1j}^{(s)}$ ist injektiv auf $\text{im } f_{jj}^{(s)}$. Wenden wir also die Polarzerlegung Proposition 1.7.13 auf $b_{1j}^{(s)}$ an, so erhalten wir eine eindeutige partielle Isometrie $u_{1j}^{(s)} \in B_2$ mit $\text{im } u_{1j}^{(s)} = \text{im } f_{11}^{(s)}$.

Es gilt wie oben

$$\|b_{1j}^{(s)} - u_{1j}^{(s)}\| \leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-1} - 1 \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Wir definieren $u_{ij}^{(s)} := (u_{1j}^{(s)})^* u_{1j}^{(s)}$ und

$$v := \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{m_s} (u_{1j}^{(s)})^* f_{1j}^{(s)}.$$

Es gilt

$$u_{ij}^{(s)} v = (u_{1i}^{(s)})^* u_{1j}^{(s)} (u_{1j}^{(s)})^* f_{1j}^{(s)} = (u_{1i}^{(s)})^* f_{11}^{(s)} f_{1j}^{(s)} = (u_{1i}^{(s)})^* f_{1i}^{(s)} f_{1j}^{(s)} = v f_{ij}^{(s)},$$

sowie

$$v^* v = \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{i,j=1}^{m_s} f_{1i}^{(s)} u_{1i}^{(s)} (u_{1j}^{(s)})^* f_{1j}^{(s)} = \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{i,j=1}^{m_s} f_{ij}^{(s)} = 1,$$

da uB_1u^* die Eins von A enthält. Also ist v unitär. Es folgt $v f_{ij}^{(s)} v^* = u_{ij}^{(s)}$, also $vuB_1uv^* \subseteq B_2$.

Es gilt

$$\|v - u\| = \max_{s=1}^{\ell} \max_{j=1}^{m_s} \|(u_{1j}^{(s)})^* f_{1j}^{(s)} - (f_{1j}^{(s)})^* f_{1j}^{(s)}\| \leq \max_{s,j} \|u_{1j}^{(s)} - f_{1j}^{(s)}\| \leq \frac{2\varepsilon}{3},$$

also

$$\|vu - 1\| \leq \|(v - 1)u\| + \|u - 1\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{12} \leq \varepsilon.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

L 13.12.2016

Beweis von Theorem 2.2.7. Ist A eine AF-Algebra, so gibt es eine aufsteigende Folge (A_n) endlich-dimensionaler Unter- C^* -Algebren, so dass $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ dicht in A ist. Daraus folgt Bedingung (2.2.1). 7 15.12.2016

Sei also A separabel, (a_n) eine dichte Folge in $B(A)$ mit $a_0 = 0$ und ε_n eine monoton fallende Nullfolge mit $\varepsilon_0 = 1$. Sei A_0 eine gegebene endlich-dimensionale Unter- C^* -Algebra (etwa 0 oder $C1$), o.B.d.A. enthalte sie die Eins von A , wenn A unital ist.

Per Induktion zeigen wir, dass es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine endlich-dimensionale Unter- C^* -Algebren $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq A$ gibt, so dass

$$\max_{k=0}^n \text{dist}(a_k, A_n) \leq \varepsilon_n.$$

Aus dieser Behauptung wird das Theorem folgen, denn dann ist $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ eine dichte Unteralgebra von A und folglich $A = \varinjlim_n A_n$.

Den Induktionsanfang für $n = 0$ haben wir bereits erledigt. Angenommen, die Aussage sei für gegebenes $n \geq 0$ bewiesen. Da $A_n \cong \bigoplus_{s=1}^{\ell} M_{m_s}(\mathbb{C})$, gibt es Elementarmatrizen $e_{ij}^{(s)}$ in A_n für alle $1 \leq s \leq \ell$ und $1 \leq i, j \leq m_s$.

Sei $\delta = \delta(\frac{\varepsilon_{n+1}}{3}, \dim A_n)$ wie in Lemma 2.2.9. Nach (2.2.1) gibt es eine endlich-dimensionale Unteralgebra $B \subseteq A$, so dass

$$\max_{s=1}^{\ell} \max_{1 \leq i, j \leq m_s} \text{dist}(e_{ij}^{(s)}, B) \leq \delta, \quad \max_{k=0}^{n+1} \text{dist}(a_k, B) \leq \frac{\varepsilon_{n+1}}{3}.$$

Nach Lemma 2.2.9 gibt es ein unitäres Element $u \in \tilde{A}$, so dass $uA_nu^* \subseteq B$ und $\|u - 1\| \leq \frac{\varepsilon_{n+1}}{3}$.

Man definiert daher $A_{n+1} := u^*Bu$. Dann gilt für alle $0 \leq k \leq n+1$

$$\begin{aligned} \text{dist}(a_k, A_{n+1}) &= \inf_{b \in B} \|ua_ku^* - b\| \\ &\leq \|ua_k(u^* - 1)\| + \|(u - 1)a_k\| + \inf_{b \in B} \|a_k - b\| \\ &\leq 2\|u - 1\| + \frac{\varepsilon_{n+1}}{3} \leq \varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Wir zitieren das folgende Ergebnis ohne Beweis. Man kann es durch Anpassung des Beweises von Theorem 2.2.7 zeigen.

Theorem 2.2.10. *Sei A eine AF-Algebra und seien (A_n, φ_n) und (B_n, ψ_n) Folgen injektiver unitaler $*$ -Morphismen endlich-dimensionaler C^* -Algebren, die A als induktiven Limes haben. Dann existiert ein unitäres Element u von \tilde{A} , so dass*

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = u \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \right) u^*$$

als Unteralgebren von A . Insbesondere gibt es Teilfolgen von (m_i) und (n_i) von \mathbb{N} , so dass

$$\forall i : A_{m_i} \subseteq uB_{n_i}u^* \subseteq A_{m_{i+1}}.$$

Als nächstes diskutieren wir Ideale von AF-Algebren.

Lemma 2.2.11. *Sei $A = \varinjlim_n A_n$ der induktive Limes einer Folge injektiver $*$ -Morphismen von C^* -Algebren und $J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann gilt*

$$J = \varinjlim_n J_n,$$

wobei $J_n := A_n \cap J$. Insbesondere sind abgeschlossene Ideale von AF-Algebren selbst AF-Algebren.

Beweis. Man beachte zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ der kanonische $*$ -Morphismus $A_n \rightarrow A$ injektiv ist, so dass man A_n als Unter- C^* -Algebra von A betrachten kann. Damit ist die Definition von J_n sinnvoll.

Man hat ein kommutatives Diagramm von $*$ -Morphismen

$$\begin{array}{ccccc} J_n & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A_n/J_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi \\ J & \longrightarrow & A_n + J & \longrightarrow & (A_n + J)/J, \end{array}$$

wobei das linke Quadrat aus Inklusionen besteht, die rechten waagerechten Pfeile kanonische Projektionen sind und der rechte senkrechte Pfeil vom mittleren senkrechten Pfeil induziert ist.

Nach Korollar 1.4.7 ist φ ein $*$ -Isomorphismus. Es folgt für alle $a \in A_n$

$$\text{dist}(a, J_n) = \|a + J_n\|_{A_n/J_n} = \|a + J\|_{(A_n+J)/J} = \text{dist}(a, J).$$

Daraus folgt leicht, dass $\bigcup_n J_n$ dicht in J ist. □

Definition 2.2.12. Sei D ein Bratteli-Diagramm. Eine Teilmenge M der Knoten von D heißt *gerichtet* (Englisch: directed), falls für alle Kanten

$$(\ell, i) \longrightarrow (\ell + 1, j)$$

in D , so dass $(\ell, i) \in M$, gilt, dass $(\ell + 1, j) \in M$ ist.

Die Teilmenge M heißt *erblich* (Englisch: hereditary), falls für alle Knoten (ℓ, i) in D , so dass für alle Kanten

$$(\ell, i) \longrightarrow (\ell + 1, j)$$

in D gilt, dass $(\ell + 1, j) \in M$ ist, folgt, dass auch $(\ell, i) \in M$ ist.

Theorem 2.2.13. Sei A eine AF-Algebra mit Bratteli-Diagramm D . Die abgeschlossenen Ideale von A sind in Bijektion mit den gerichteten erblichen Teilmengen M der Knoten von D .

Beweis. Sei $A = \varinjlim_{\ell} A_{\ell}$, wobei D der Folge $(A_{\ell}, \varphi_{\ell})$ zugeordnet sei. Wir können annehmen, dass für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt $A_{\ell} \subseteq A_{\ell+1} \subseteq A$ und φ_{ℓ} die Inklusion ist.

Sei $J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal und $J_{\ell} := A_{\ell} \cap J$. Wir schreiben

$$A_{\ell} := \bigoplus_{i=1}^{k_{\ell}} A_{\ell}^i, \quad A_{\ell}^i \cong M_{m_i^{(\ell)}}(\mathbb{C}).$$

Da alle Summanden einfach sind, ist J_ℓ die direkte Summe der Algebren A_ℓ^i mit $(\ell, i) \in M_\ell$, wobei

$$M_\ell := \{(\ell, i) \mid 1 \leq i \leq k_\ell, J \cap A_\ell^i \neq 0\}.$$

Sei $M := \bigcup_{\ell=0}^{\infty} M_\ell$. Wir zeigen, dass M gerichtet und erblich ist.

Es gelte $(\ell, i) \in M_\ell$ und $(\ell, i) \rightarrow (\ell + 1, j)$ sei eine Kante in D . Dann gilt $A_{\ell+1}^j \cap A_\ell^i \neq 0$ und $A_{\ell+1}^j \subseteq J$, also

$$J \cap A_\ell^i \neq 0,$$

so dass $(\ell + 1, j) \in M_{\ell+1}$. Damit ist M gerichtet.

Es sei (ℓ, i) ein Knoten von D und J die Menge aller $1 \leq j \leq k_{\ell+1}$, so dass $(\ell, i) \rightarrow (\ell + 1, j)$ eine Kante von D sei. Es gelte $(\ell + 1, j) \in M_{\ell+1}$ für alle $j \in J$. Dann gilt

$$J \supseteq \bigoplus_{j \in J} A_{\ell+1}^j \supseteq A_\ell^i,$$

also $(\ell, i) \in M_\ell$. Es folgt, dass M erblich ist.

Aus Lemma 2.2.11 folgt, dass die Zuordnung $J \mapsto M$ injektiv ist. Es reicht zu zeigen, dass sie surjektiv ist. Sei also M eine gerichtete erbliche Teilmenge der Knoten von D und definiere

$$J_\ell := \bigoplus_{(\ell, i) \in M} A_\ell^i.$$

Dann ist J_ℓ ein Ideal von A_ℓ . Da M gerichtet ist, folgt $J_\ell \subseteq J_{\ell+1}$ und der Abschluss J von $\bigcup_{\ell=0}^{\infty} J_\ell$ ist ein abgeschlossenes Ideal. Da M erblich ist, gilt $A_\ell \cap J_{\ell+1} \subseteq J_\ell$. Es folgt also

$$J_\ell \subseteq J \cap A_\ell \subseteq J_\ell.$$

Damit ist M gerade die unter der obigen Abbildung J zugeordnete Menge von Knoten und die Abbildung ist somit surjektiv. Dies zeigt die Behauptung. \square

Korollar 2.2.14. *Sei A eine unitale AF-Algebra mit Bratteli-Diagramm D . Genau dann ist A einfach, wenn es für jeden Knoten (ℓ, i) in D ein $\ell' > \ell$ gibt, so dass für jeden Knoten (ℓ', j) von D ein Pfad*

$$(\ell, i) \rightarrow (\ell + 1, i') \rightarrow \cdots \rightarrow (\ell', j)$$

in D existiert.

⊣ 15.12.2016

⌈ 19.12.2016

Beweis. Wir können ohne das Bratteli-Diagramm zu verändern annehmen, dass jedes A_ℓ die Eins von A enthält.

Die obige Bedingung gelte für D . Sei $0 \neq J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal mit zugeordneter Knotenmenge M . Es gibt ein ℓ mit $A_\ell \cap J \neq 0$, also $(\ell, i) \in M$ für ein i . Nach der Voraussetzung gibt es ein ℓ' , so dass alle Knoten (ℓ', j) durch einen Pfad in D mit (ℓ, i) verbunden sind. Es folgt, dass $(\ell', j) \in M$ für alle Knoten (ℓ', j) von D , also $1 \in A'_\ell \subseteq J$ und folglich $J = A$.

Umgekehrt werde die obige Bedingung von D verletzt. Dann gibt es einen Knoten (ℓ, i) , so dass für die kleinste gerichtete Teilmenge M' der Knoten von D , die (ℓ, i) enthält, für alle $\ell' > \ell$ ein Knoten (ℓ', j) von D existiert, der nicht in M' liegt. Sei M Menge aller Knoten (ℓ', j) von D , so dass es ein $\ell'' > \ell'$ gibt mit $(\ell'', k) \in M'$ für alle Pfade von (ℓ', j) nach (ℓ'', k) in D . Dann ist M gerichtet und erblich.

Angenommen, M enthielte für ein ℓ' alle Knoten (ℓ', j) von D . Alle diese Knoten wären also durch einen Pfad in D mit M' verbunden. Es gäbe also ein $\ell'' > \ell'$, so dass

$$A_{\ell'} \subseteq J_{\ell''} := \bigoplus_{(\ell'', j) \in M'} A_{\ell''}^j$$

gelte. Da $J_{\ell''}$ ein Ideal von $A_{\ell''}$ ist und $A_{\ell'}$ die Eins von A enthält, folgt $J_{\ell''} = A_{\ell''}$, Widerspruch! Also ist M eine echte Teilmenge der Knoten von D und das zugeordnete Ideal ist nach Theorem 2.2.13 ein echtes. Somit ist A nicht einfach. \square

Definition 2.2.15. Eine C^* -Algebra A heißt *UHF-Algebra* (von *uniformly hyperfinite*), falls sie der induktive Limes eine Folge injektiver unitaler $*$ -Morphismen von Matrixalgebren $M_{m_\ell}(\mathbb{C})$ ist. Insbesondere sind UHF-Algebren AF-Algebren.

Korollar 2.2.16. *Jede UHF-Algebra ist einfach.*

Beweis. Auf jeder Ebene hat das Bratteli-Diagramm einer UHF-Algebra nur einen Knoten, also ist jede nicht leere gerichtete erbliche Teilmenge von Knoten schon die Menge aller Knoten. \square

Beispiel 2.2.17. Beispiele für UHF-Algebren sind \mathcal{K} und die CAR-Algebra. Insbesondere ist auch letztere einfach.

Proposition 2.2.18. *Sei A eine AF-Algebra mit Bratteli-Diagramm D und $J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal mit Knotenmenge M . Dann ist A/J eine AF-Algebra, deren Bratteli-Diagramm das Unterdiagramm von D ist, das die Knotenmenge $D_0 \setminus M$ besitzt. Dabei sei D_0 die Knotenmenge von D .*

Beweis. Im Quotienten A/J ist die Vereinigung der Unteralegebren $(A_\ell + J)/J \cong A_\ell/J_\ell$ mit $J_\ell := J \cap A_\ell$ dicht. Daher ist A/J eine AF-Algebra.

Es ist

$$A_\ell/J_\ell \cong \bigoplus_{(\ell, i) \in D_0 \setminus M} A_\ell^i$$

und die induzierte Abbildung $A_\ell/J_\ell \rightarrow A_{\ell+1}/J_{\ell+1}$ ist die Summe der Kanten, die zwischen Knoten in $D_0 \setminus M$ verlaufen. \square

Bemerkung 2.2.19. Man kann zeigen, dass wenn A eine C^* -Algebra ist und J ein abgeschlossenes Ideal, so dass J und A/J AF-Algebren sind, auch A eine AF-Algebra ist (Brown 1980; Choi 1983).

2.3 Durch Erzeuger und Relationen definierte C^* -Algebren

Definition 2.3.1 (Erzeuger und Relationen). Sei $\mathcal{G} = (x_j)_{j \in J}$ eine Menge von Unbekannten (oder Erzeugern). Die freie $*$ -Algebra, die von $(x_j)_{j \in J}$ erzeugt wird, ist der Vektorraum $\mathcal{F}\langle \mathcal{G} \rangle = \mathcal{F}\langle x_j \mid j \in J \rangle$ mit der Basis bestehend aus allen nicht-leeren Wörtern auf dem Alphabet $(x_j, x_j^*)_{j \in J}$, mit der Multiplikation, die die Verkettung von Wörtern bilinear fortsetzt und der antilinearen Antiinvolution, die die Zuordnung $x_j \mapsto x_j^*$ fortsetzt, als $*$ -Operation.

Die Elemente von $\mathbb{C}1 \oplus \mathcal{F}\langle \mathcal{G} \rangle$ heißen *nichtkommutative $*$ -Polynome*. Eine *$*$ -Relation* auf den Erzeugern $(x_j)_{j \in J}$ ist ein Paar (p, η) , wobei p ein nichtkommutatives $*$ -Polynom ist und $\eta \geq 0$ eine reelle Zahl. Die Relation wird auch

$$\|p(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_{j_1}^*, \dots, x_{j_n}^*)\| \leq \eta$$

geschrieben oder

$$p(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_{j_1}^*, \dots, x_{j_n}^*) = 0$$

im Falle von $\eta = 0$.

Sei $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ ein Paar, bestehend aus einer Menge von Erzeugern \mathcal{G} und einer Menge \mathcal{R} von Relationen auf den Erzeugern \mathcal{G} . Eine *Darstellung* von $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ ist ein Paar (\mathcal{H}, ρ) aus einem Hilbertraum \mathcal{H} zusammen mit einer Abbildung $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) : x_j \mapsto \rho_j$, so dass

$$\|p(\rho_{j_1}, \dots, \rho_{j_n}, \rho_{j_1}^*, \dots, \rho_{j_n}^*)\| \leq \eta$$

für alle $(p, \eta) \in \mathcal{R}$. Eine Darstellung (\mathcal{H}, ρ) von $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ setzt sich eindeutig zu einem $*$ -Morphismus $\tilde{\rho} : \mathcal{F}\langle \mathcal{G} \rangle \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ fort.

Beispiel 2.3.2. Jedes Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ hat eine eindeutige Darstellung auf $\mathcal{H} = 0$.

Definition 2.3.3. Ein Paar $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ von Erzeugern und Relationen heißt *zulässig*, falls für jede Familie $(\mathcal{H}_i, \rho_i)_{i \in I}$ und jedes $x \in \mathcal{G}$ gilt $\bigoplus_{i \in I} \rho_i(x) \in \mathcal{L}(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i)$. Man beachte, dass dann automatisch $(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{H}_i, \bigoplus_{i \in I} \rho_i)$ eine Darstellung von $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ ist.

Proposition 2.3.4. Sei $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ ein zulässiges Paar von Erzeugern und Relationen. Dann ist durch

$$\|p\| := \sup\{\|\tilde{\rho}(p)\| \mid (\mathcal{H}, \rho) \text{ Darstellung von } (\mathcal{G}, \mathcal{R})\}$$

für alle $p \in \mathcal{F}\langle \mathcal{G} \rangle$ eine C^* -Halbnorm auf $\mathcal{F}\langle \mathcal{G} \rangle$ definiert.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $\|p\| < \infty$ für alle $p \in \mathcal{F}\langle \mathcal{G} \rangle$. Angenommen, es gäbe ein $x \in \mathcal{G}$ mit $\|x\| = \infty$. Dann gäbe es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Darstellung $(\mathcal{H}_n, \varrho_n)$ von $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ mit $\|\varrho_n(x)\| > n$. Aber

$$\infty > \left\| \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \varrho_n(x) \right\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\varrho_n(x)\|,$$

Widerspruch! Also ist $\|x\| < \infty$ für alle $x \in \mathcal{G}$. Aus Dreiecksungleichung und Submultiplikativität folgt leicht, dass $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{F}\langle \mathcal{G} \rangle$ endlich ist. \square

Konstruktion 2.3.5. Sei $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ ein zulässiges Paar von Erzeugern und Relationen. Wir definieren $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ als die Vervollständigung von

$$\mathcal{F}\langle \mathcal{G} \rangle / \{\|\cdot\| = 0\},$$

wobei $\|\cdot\|$ die C^* -Halbnorm aus Proposition 2.3.4 sei.

Die C^* -Algebra $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ heißt die *von den Erzeugern und Relationen $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ definierte C^* -Algebra*. Sie genügt folgender universeller Eigenschaft: Wann immer (\mathcal{H}, ϱ) eine Darstellung von $(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ ist, gibt es genau eine $*$ -Darstellung (\mathcal{H}, ϱ') von $C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$, so dass das folgende Diagramm von $*$ -Morphismen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} C^*(\mathcal{R}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{\varrho'} & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \uparrow & \nearrow \varrho & \\ \mathcal{F}\langle \mathcal{G} \rangle & & \end{array}$$

wobei der Pfeil $\mathcal{F}\langle \mathcal{G} \rangle \rightarrow C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$ der definitiongemäß gegebene sei.

Beispiel 2.3.6. Sei A eine C^* -Algebra. Sei $\mathcal{G} = A$ und \mathcal{R} die Menge aller Relationen $p = 0$, wobei $p = p(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_{j_1}^*, \dots, x_{j_n}^*)$ ein nichtkommutatives $*$ -Polynom sei und $p(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, x_{j_1}^*, \dots, x_{j_n}^*) = 0$ gelte. Dann ist $A \cong C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$. D.h., jede C^* -Algebra ist durch Erzeuger und Relationen definiert.

L 19.12.2016

Beispiel 2.3.7. Sei A eine C^* -Algebra, A_0 ein $*$ -invarianter dichter Unterring, der ein Vektorraum über einem dichten Unterkörper K von \mathbb{C} (wie etwa $\mathbb{Q}[i]$) ist. Sei $\mathcal{G} = A_0$ und \mathcal{R} die Menge aller $*$ -algebraischen Relationen p wie oben in A_0 , deren Koeffizienten in K liegen, zusammen mit den linearen Gleichungen über \mathbb{C} zwischen Elementen von A_0 , sowie einer Relation $\|x\| \leq \|x\|_A$ für jedes $x \in A_0$. Dann ist $A \cong C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$. Insbesondere ist jede separable C^* -Algebra durch abzählbar viele Erzeuger und Relationen definiert.

Beispiel 2.3.8. Sei A eine Banach- $*$ -Algebra, $\mathcal{G} = A$, \mathcal{R} die Menge der $*$ -algebraischen Relationen in A (wie in Beispiel 2.3.6). Dann heißt

$$C^*(A) := C^*(\mathcal{G}, \mathcal{R})$$

die *universelle Einhüllende C^* -Algebra* von A . Sie genügt der folgenden universellen Eigenschaft: Es gibt einen kanonischen $*$ -Morphismus $A \rightarrow C^*(A)$ und für jede $*$ -Darstellung (\mathcal{H}, ρ) von A gibt es eine eindeutige $*$ -Darstellung (\mathcal{H}, ρ') , so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} C^*(A) & \xrightarrow{\rho'} & \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ \uparrow & \nearrow \rho & \\ A & & \end{array}$$

2.4 Die Toeplitzalgebra

Sei $\ell^2(\mathbb{Z})$ die Menge der Folgen $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ mit

$$\|f\|_2^2 := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 < \infty.$$

Dann ist $\ell^2(\mathbb{Z})$ ein separabler Hilbertraum, mit der Hilbertbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, wobei

$$e_{nm} := \delta_{nm}, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Der abgeschlossene Unterraum $\ell^2(\mathbb{N})$ ist der abgeschlossene Aufspann der $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei wie zuvor $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Der *Shiftooperator* S auf $\ell^2(\mathbb{N})$ ist der unitäre Operator, der durch

$$S(e_n) := e_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

definiert ist. Ist Q die Orthogonalprojektion auf $\ell^2(\mathbb{N})$, so ist der Operator $\widehat{S} := QSQ$, der *einseitige Shiftooperator* (Englisch: unilateral shift), gegeben durch

$$\widehat{S}(e_n) = \begin{cases} e_{n+1}, & \text{falls } n \geq 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man sieht leicht ein, dass \widehat{S} nicht normal ist. Wir studieren in diesem Abschnitt die von \widehat{S} erzeugte C^* -Algebra.

Dazu betrachten wir die *Fouriertransformation*

$$\mathcal{F} : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^1), \quad \mathcal{F}(f)(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n z^n.$$

Dabei ist $L^2(\mathbb{S}^1)$ das Bildmaß von $\frac{1}{2\pi} \lambda_{[-\pi, \pi]}$, d.h. das Integral ist gegeben durch

$$\int_{\mathbb{S}^1} \psi(z) dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(e^{ik}) dk = \frac{1}{2\pi i} \oint \psi(z) z^{-1} dz.$$

Ist z die Identität von S^1 , so gilt also

$$\langle z^m | z^n \rangle = \int_{S^1} z^{n-m} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} z^{n-m-1} dz = \delta_{mn},$$

und nach Stone-Weierstrass ist $\mathbb{C}[z, z^{-1}] = \langle z^n \mid n \in \mathbb{Z} \rangle$ dicht in $\mathcal{C}(S^1)$, also ist $(z^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine Hilbertbasis von $L^2(S^1)$. Insbesondere konvergiert die Reihe in der Definition von \mathcal{F} in $L^2(S^1)$ und definiert einen unitären Isomorphismus. Man kann nachrechnen, dass

$$\mathcal{F}^*(\psi)_n = \langle z^n | \psi \rangle = \int_{S^1} z^{-n} \psi(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint \psi(z) z^{-n-1} dz.$$

Insbesondere ist das Bild von $\ell^2(\mathbb{N})$ unter \mathcal{F} genau der Unterraum

$$H^2 = \overline{\langle e_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle}.$$

Wir nennen dies den *Hardy-Raum*.

Es sei P die Projektion auf H^2 (die *Szegő-Projektion*). Ist $f \in L^\infty(S^1)$, so definiert man den *Toeplitz-Operator* $T_f \in \mathcal{L}(H^2)$ zum Symbol f durch

$$T_f(h) := P(fh), \quad \forall h \in H^2.$$

Es gilt

$$T_z = (\mathcal{F} \widehat{S} \mathcal{F}^*)|_{H^2}.$$

Proposition 2.4.1. *Sei $f \in L^\infty(S^1)$. Dann gilt $T_f^* = T_{\bar{f}}$ und*

$$\|f\|_\infty = \|T_f\| = \|T_f\|_{\mathcal{L}/\mathcal{K}} = \inf\{\|T_f + K\| \mid K \in \mathcal{K}(H^2)\}.$$

Beweis. Es gilt $M_f^* = M_{\bar{f}}$ und $T_f = PM_fI$, wobei $I = P^* : H^2 \rightarrow L^2(S^1)$ die Inklusion ist, also $T_f^* = T_{\bar{f}}$.

Offenbar gilt

$$\|T_f\|_{\mathcal{L}/\mathcal{K}} \leq \|T_f\| \leq \|f\|_\infty.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ in $L^2(S^1)$ dicht ist und $\|M_f\| = \|f\|_\infty$ gilt, gibt es $p = \sum_{n=-N}^N p_n z^n$ mit $\|p\|_2 = 1$ und

$$\|fp\|_2 > \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Für alle $n > N$ gilt $z^n p \in H^2$, also

$$\begin{aligned} \|T_f(z^n p)\|_2^2 &= \|P(z^n fp)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\langle z^n fp | z^k \rangle|^2 \\ &= \sum_{k=-n}^{\infty} \langle fp | z^k \rangle \longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle fp | z^k \rangle|^2 = \|fp\|_2^2 > \|f\|_\infty - \varepsilon. \end{aligned}$$

Sei $K \in \mathcal{K}(H^2)$. Die Folge $(z^{N+n}p)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen 0, also folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|K(z^{N+n}p)\|_2 = 0$ (Proposition A.3.6). Es folgt, dass es ein $n > N$ mit

$$\|(T_f + K)(z^n p)\|_2 > \|f\|_\infty - \varepsilon$$

gibt. Da $\|z^n p\|_2 = \|p\|_2 = 1$ ist, folgt die Behauptung. \square

Proposition 2.4.2. *Sei $f \in \mathcal{C}(S^1)$ und $g \in L^\infty(S^1)$. Dann sind die folgenden Operatoren kompakt:*

$$T_f T_g - T_{fg}, \quad T_{fg} - T_g T_f, \quad [T_f, T_g] = T_f T_g - T_g T_f.$$

Wir benötigen im *Beweis* das folgende Lemma.

Lemma 2.4.3. *Sei $f \in L^\infty(S^1)$. Dann hat $[T_z, T_f]$ Rang höchstens eins.*

Beweis. Da $z(H^2) \subseteq H^2$ gilt, folgt $T_f T_z = T_{fz}$. Weiter gilt

$$(T_{fz} - T_z T_f)P = PM_z M_f P - PM_z P M_f P = PM_z(1 - P)M_f P.$$

Da $PM_z(1 - P) = |1\rangle\langle z^{-1}|$ Rang eins hat, folgt die Behauptung. \square

Beweis von Proposition 2.4.2. Der dritte Operator ist die Summe der zwei vorherigen. Weiter gilt

$$(T_{fg} - T_f T_g)^* = T_{\bar{f}\bar{g}} - T_{\bar{g}} T_{\bar{f}},$$

also reicht es, $T_{fg} - T_g T_f$ zu betrachten. Es gilt wie zuvor

$$(T_{fg} - T_g T_f)P = PM_g(1 - P)M_f P,$$

also reicht es zu zeigen, dass $PM_f(1 - P)$ kompakt ist.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $p \in \mathcal{C}[z, z^{-1}]$ mit $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$. Der Operator $(1 - P)M_p P$ hat endlichen Rang nach Lemma 2.4.3 und

$$\|(1 - P)M_f P - (1 - P)M_p P\| = \|(1 - P)(M_{f-p})P\| \leq \|f - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Somit ist $(1 - P)M_f P$ im Normabschluss der Operatoren endlichen Rangs enthalten und folglich kompakt. \square

Theorem 2.4.4. *Die C^* -Algebra $\mathcal{T} := C^*(T_z)$ ist gleich*

$$\mathcal{T}_0 := \{T_f + K \mid f \in \mathcal{C}(S^1), K \in \mathcal{K}(H^2)\}.$$

Dann ist $\pi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}(S^1)$, gegeben durch

$$\pi(T_f + K) := f, \quad \forall f \in \mathcal{C}(S^1),$$

ein wohldefinierter $*$ -Morphismus, der eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H^2) \longrightarrow \mathcal{T} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}(S^1) \longrightarrow 0$$

von $*$ -Morphismen induziert, so dass die lineare Abbildung

$$\sigma : \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \longrightarrow C^*(T_z) : f \longmapsto T_f$$

ein isometrischer Schnitt ist. Die Algebra $C^*(T_z)$ ist irreduzibel auf H^2 und enthält $\mathcal{K}(H^2)$ als einziges minimales abgeschlossenes Ideal.

Beweis. Sei $p \in \mathcal{L}(H^2)$ eine Projektion, die mit T_z vertauscht. Dann kommutiert p auch mit $1 - T_z T_z^* = |1\rangle\langle 1| \in \mathcal{T}$, d.h. $p(1) = 1$ oder $p(1) = 0$. Da weiter $e_n = T_z^n 1$ für alle $n \geq 0$, ist damit $p = \text{id}_{H^2}$ oder $p = 0$. Mit Theorem 1.8.2 (iii) folgt, dass \mathcal{T} irreduzibel auf H^2 wirkt. Da \mathcal{T} einen von Null verschiedenen kompakten Operator enthält, folgt, dass $\mathcal{K}(H^2) \subseteq \mathcal{T}$ gilt (Korollar 2.1.3 und Lemma 2.1.5). Analog zeigt man, dass $\mathcal{K}(H^2)$ das einzige minimale Ideal ist. Weiter gilt $T_p \in \mathcal{T}$ für alle $p \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, also $T_f \in \mathcal{T}$ für alle $f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$. Aus Proposition 2.4.2 folgt, dass \mathcal{T}_0 eine $*$ -Unteralgebra von \mathcal{T} ist. Nach Proposition 2.4.1 ist sie abgeschlossen. Da $T_z \in \mathcal{T}_0$ gilt, folgt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0$.

Sei $\phi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}/\mathcal{K}(H^2)$ die Quotientenabbildung. Nach Proposition 2.4.2 ist $\mathcal{T}/\mathcal{K}(H^2)$ kommutativ. Die Verknüpfung $\phi \circ \sigma$ ist surjektiv per Definition und eine Isometrie nach Proposition 2.4.1. Nach Proposition 2.4.2 ist sie ein $*$ -Isomorphismus. Wir können also $\pi := (\phi \circ \sigma)^{-1} \circ \phi$ definieren. \square

Theorem 2.4.5 (Coburn). Die Toeplitzalgebra $\mathcal{T} = C^*(T_z)$ ist zusammen mit dem $*$ -Morphismus $\mathcal{F}\langle u \rangle \longrightarrow C^*(T_z)$ mit $u \longmapsto T_z$ die universelle C^* -Algebra zum Erzeuger u und der Relation $u^*u = 1$.

⌞ 21.12.2016

⌞ 9.1.2017

Im Beweis benötigen wir den folgenden Satz.

Proposition 2.4.6 (Wold-Zerlegung). Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und x eine Isometrie auf \mathcal{H} , d.h. $x^*x = 1$. Dann gibt es einen Hilbertraum \mathcal{H}' , $u \in \mathcal{U}(\mathcal{H}')$ und eine Menge I , so dass x unitär äquivalent ist zu

$$T_z^{(I)} \oplus u := \bigoplus_I T_z \oplus u.$$

Beweis. Sei $\mathcal{H}' := \ker x^* = (x(\mathcal{H}))^\perp$ und $(e_0^i)_{i \in I}$ eine Hilbertbasis von \mathcal{H}' . Für $m > n \geq 0$ ist $x^m(\mathcal{H}') \perp x^n(\mathcal{H}')$. Definiert man also

$$e_k^i := x^k e_0^i,$$

so ist $(e_k^i)_{i \in I, k \in \mathbb{N}}$ eine Hilbertbasis von

$$\tilde{\mathcal{H}} := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} x^k(\mathcal{H}') = \bigoplus_{i \in I} \tilde{\mathcal{H}}^i, \quad \tilde{\mathcal{H}}^i := \overline{\langle e_k^i \mid k \in \mathbb{N} \rangle}.$$

Die Einschränkung von x auf $\tilde{\mathcal{H}}_i$ ist unitär äquivalent zu T_z . Es gilt

$$x(\tilde{\mathcal{H}}) = \bigoplus_{k \geq 1} x^k(\mathcal{H}') \subseteq \tilde{\mathcal{H}},$$

also

$$x(\tilde{\mathcal{H}}^\perp) \subseteq (x(\tilde{\mathcal{H}}) + (x(\mathcal{H}))^\perp) = (\tilde{\mathcal{H}})^\perp.$$

Daher ist die Einschränkung von x auf $\mathcal{H}' := \tilde{\mathcal{H}}^\perp$ unitär. \square

Beweis von Theorem 2.4.5. Es reicht zu zeigen, dass \mathcal{T} die universelle Eigenschaft für den Erzeuger u und die Relation $u^*u = 1$ erfüllt. Sei dazu \mathcal{H} ein Hilbertraum und u ein Operator mit $u^*u = 1$. Dann ist u eine Isometrie. Es reicht, eine $*$ -Darstellung ϕ von \mathcal{T} zu konstruieren, für die $\phi(T_z) = u$ gilt. (Die Eindeutigkeit ist klar.)

Nach Proposition 2.4.6 gilt $u = U(T_z^{(I)} \oplus u')U^*$, wobei u' unitär ist und U ein isometrischer Isomorphismus. Da nach Theorem 2.4.4 π ein $*$ -Morphismus ist, können wir $\phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definieren durch

$$\phi(T_f + K) := U((T_f + K)^{(I)} \oplus f(u'))U^*, \quad \forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{S}^1), K \in \mathcal{K}(H^2).$$

Dann ist $\phi(T_z) = u$ und dies zeigt die Behauptung. \square

2.5 Die irrationale Rotationsalgebra

Definition 2.5.1 (Irrationale Rotationsalgebra). Sei $0 < \theta < 1$ eine irrationale Zahl. Die *irrationale Rotationsalgebra* A_θ ist die universelle C^* -Algebra mit den Erzeugern u, v und den Relationen

$$\begin{aligned} uu^* &= u^*u = 1, & vv^* &= v^*v = 1, \\ uv &= e^{2\pi i\theta}vu. \end{aligned}$$

Man betrachte den Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{S}^1)$ und die unitären Operatoren

$$U = M_z, \quad (V\psi)(z) = \psi(ze^{-2\pi i\theta}).$$

Dann gilt $UV = e^{2\pi i\theta}VU$, so dass es einen kanonischen surjektiven $*$ -Morphismus $\phi : A_\theta \rightarrow C^*(U, V) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gibt. Wir wollen den folgenden Satz beweisen.

Theorem 2.5.2. Die C^* -Algebra A_θ ist einfach. Insbesondere ist ϕ ein Isomorphismus.

Konstruktion 2.5.3. Seien $x, y \in \mathbb{S}^1$. Wir definieren einen $*$ -Endomorphismus $\varrho_{x,y}$ von A_θ durch

$$\varrho_{x,y}(u) := xu, \quad \varrho_{x,y}(v) := yv.$$

Da $\varrho_{\bar{x},\bar{y}} \circ \varrho_{x,y} = \text{id}$, ist $\varrho_{x,y}$ ein $*$ -Automorphismus.

Wir definieren lineare Abbildungen $\Phi_j : A_\theta \rightarrow A_\theta$, $j = 1, 2$, durch

$$\Phi_1(a) := \int_{\mathbb{S}^1} \varrho_{1,z}(a) dz, \quad \Phi_2(a) := \int_{\mathbb{S}^1} \varrho_{z,1}(a) dz.$$

Definition 2.5.4 (Erwartungen). Eine positive, unitale lineare Kontraktion $\Phi : A \rightarrow A$ einer unitalen C^* -Algebra heißt *Erwartung* (Englisch: expectation), falls $\Phi \circ \Phi = \Phi$. Eine positive Abbildung Φ heißt *treu* (Englisch: faithful), falls aus $\Phi(a) = 0$ und $a \geq 0$ folgt $a = 0$.

Proposition 2.5.5. Die Abbildung Φ_1 ist eine treue Erwartung von A_θ mit Bild $C^*(u)$, so dass

$$\Phi_1(f(u)ag(u)) = f(u)\Phi_1(a)g(u), \quad \forall f, g \in C(\mathbb{S}^1), a \in A_\theta.$$

Es gilt

$$\Phi_1(u^k v^\ell) = \delta_{\ell 0} u^k$$

und

$$\Phi_1(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n u^j a (u^*)^j.$$

Analoge Aussagen gelten für Φ_2 .

Beweis. Offenbar ist Φ_1 unital und kontrahierend. Aufgrund der Positivität des Integrals ist Φ_1 positiv und treu.

Da $\varrho_{1,z}(u) = u$, ist Φ_1 die Identität auf $C^*(u)$. Aus dem gleichen Grund gilt

$$\Phi_1(f(u)ag(u)) = f(u) \int_{\mathbb{S}^1} \varrho_{1,z}(a) dz g(u) = f(u)\Phi_1(a)g(u).$$

Insbesondere folgt

$$\Phi_1(u^k v^\ell) = u^k \int_{\mathbb{S}^1} z^\ell dt v^\ell = \delta_{\ell 0} u^k.$$

Dies zeigt, dass das Bild von Φ_1 genau $C^*(u)$ ist.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n u^j (u^k v^\ell) (u^j)^* &= \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n e^{2\pi i j \ell \theta} u^k v^\ell \\ &= \frac{1}{2n+1} \frac{\sin(2n+1)\pi \ell \theta}{\sin \pi \ell \theta} \rightarrow \delta_{\ell 0} u^k. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Identität für Φ_1 . □

Definition 2.5.6 (Spuren). Ein Zustand τ auf einer C^* -Algebra A heißt *Spur* (Englisch: trace), falls τ zyklisch ist, d.h.

$$\tau(ab) = \tau(ba), \quad \forall a, b \in A.$$

Korollar 2.5.7. Die Abbildung $\tau := \Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1$ nimmt Werte in $\mathbb{C} \subseteq A_\theta$ an und ist als solche eine treue Spur auf A_θ . Weiterhin ist τ die einzige Spur auf A_θ .

Beweis. Es gilt $\Phi_2(\Phi_1(u^k v^\ell)) = \Phi_2(u^k \delta_{\ell 0}) = \delta_{k 0} \delta_{\ell 0}$ und analog für $\Phi_1 \circ \Phi_2$. Daher ist $\Phi_1 \circ \Phi_2 = \Phi_2 \circ \Phi_1$ und τ skalarwertig. Da $\tau(1) = 1$, ist τ ein treuer Zustand. Es gilt weiter

$$\tau(v^\ell u^k) = e^{-2\pi i k \ell \theta} \delta_{k 0} \delta_{\ell 0} = \delta_{k 0} \delta_{\ell 0},$$

also ist τ zyklisch. Da Φ_1 und Φ_2 treu sind, gilt dies auch für τ .

Sei σ eine weitere Spur. Dann ist σ unitär invariant, also gilt für alle $a \in A_\theta$:

$$\sigma(a) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^n \sigma(u^j a (u^*)^j) \longrightarrow \sigma(\Phi_1(a)).$$

Analog folgt $\sigma = \sigma \circ \Phi_2$, also ist

$$\sigma(a) = \sigma(\tau(a)) = \tau(a), \quad \forall a \in A.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Beweis von Theorem 2.5.2. Sei $0 \neq J \subseteq A_\theta$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann existiert ein $a \in J_+$, $a \neq 0$. Es gilt $uJu^* \subseteq J$, also folgt mit Proposition 2.5.5, dass $\Phi_1(x) \in J$. Analog folgt $\tau(x) = \Phi_2(\Phi_1(x)) \in J$. Da τ treu ist, gilt $\tau(x) \in \mathbb{C}^\times$ und somit $J = A_\theta$. □

2.6 Bibliographische Notizen zu Kapitel 2

Mit Ausnahme des Abschnitts 2.3 über Erzeuger und Relationen, der dem Artikel [4] von Blackadar folgt, orientieren wir uns in diesem Kapitel wieder an dem Buch von Davidson [8] mit nur minimalen Variationen bei der Darstellung.

K-Theorie von C^* -Algebren

3.1 Lokale C^* -Algebren

Definition 3.1.1 (Lokale C^* -Algebren). Sei A eine normierte Algebra. Dann heißt A eine *lokale Banachalgebra*, falls alle Matrixalgebren über A unter holomorphem Funktionalcalcul abgeschlossen sind. D.h., für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, alle $a \in M_n(A)$ und jede holomorphe Funktion f , die auf einer offenen Umgebung U des Spektrums

$$\sigma_{\widehat{M_n(A)}} \sim (a)$$

definiert ist und $f(0) = 0$ erfüllt, falls $0 \in U$, gilt, dass $f(a) \in M_n(A)$. Hierbei ist $\widehat{M_n(A)}$ die Vervollständigung von $M_n(A)$ bezüglich der Operatornorm

$$\|a\| := \sup\{\|ax\|_2 \mid x \in A^n, \|x\|_2 \leq 1\}, \quad \|x\|_2 := \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A priori ist $f(a)$ nur in $\widehat{M_n(A)}$ definiert.

Sei A eine normierte $*$ -Algebra, die eine lokale Banachalgebra ist. Dann heißt A eine *lokale C^* -Algebra*, falls die Norm von A eine C^* -Norm ist, d.h.

$$\|a^*a\| = \|a\|^2, \quad \forall a \in A.$$

9.1.2017

Beispiel 3.1.2. Jede Banachalgebra ist eine lokale Banachalgebra. Jede C^* -Algebra ist eine lokale C^* -Algebra. Ist X ein lokal-kompakter Hausdorffraum, so ist $C_c(X)$ eine lokale C^* -Algebra. Die Unitalisierung einer lokalen C^* -Algebra ist eine lokale C^* -Algebra. 11.1.2017

Proposition 3.1.3. Sei A eine unitale lokale Banachalgebra. Ist $a \in A$ in \widehat{A} invertierbar, so ist $a^{-1} \in A$. Folglich gilt $\sigma_A(a) = \sigma_{\widehat{A}}(a)$ für alle $a \in A$.

Beweis. Man betrachte $f(z) = z^{-1}$. Ist a in \widehat{A} invertierbar, so ist $0 \notin \sigma_{\widehat{A}}(a)$. \square

Korollar 3.1.4. Sei A eine unital lokale Banachalgebra (bzw. lokale C^* -Algebra). Dann sind die invertierbaren (bzw. unitären) Elemente von A dicht in den invertierbaren (bzw. unitären) Elementen von \widehat{A} .

Beweis. Die Menge der invertierbaren Elemente von \widehat{A} ist offen, also enthält jede Umgebung von $a \in \widehat{A}^\times$ ein $b \in A$, dass in \widehat{A} invertierbar ist. Nach Proposition 3.1.3 ist b invertierbar in A .

Die Aussage für unitäre Elemente folgt durch Polarzerlegung: Ist A eine lokale C^* -Algebra und $a \in A$ invertierbar, so ist $\sigma(a^*a) \subset (0, \infty)$, also existiert $|a| := \sqrt{a^*a} \in A$ und ist invertierbar. \square

Theorem 3.1.5. Sei $(A_\mu, \phi_{\mu\nu})$ ein normiertes induktives System, d.h.

$$\|a\|' := \limsup_{\nu \geq \mu} \|\phi_{\mu\nu}(a)\|_{A_\nu} < \infty, \quad \forall a \in A_\mu.$$

Sei A der normierte induktive Limes, d.h. der Quotient des algebraischen induktiven Limes bezüglich des Nullraums der Limes-Halbnorm $\|\cdot\|'$. Sind alle A_μ lokale Banachalgebren (bzw. C^* -Algebren, wobei die $\phi_{\mu\nu}$ $*$ -Morphismen sind), so ist A eine lokale Banachalgebra (bzw. eine lokale C^* -Algebra).

Im Beweis benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.1.6. Seien die A_μ und die $\phi_{\mu\nu}$ unital. Ist $a \in A_i$ mit $j_\mu(a) \in A$ invertierbar, so gibt es für jedes $\mu' \geq \mu$ ein $\nu \geq \mu'$, so dass $\phi_{\mu\nu}(a) \in A_\nu$ invertierbar ist.

Beweis. Es existiert λ und $b \in A_\lambda$ mit $j_\lambda(b)j_\mu(a) = 1 = j_\mu(a)j_\lambda(b)$. Nach Definition der Norm gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\mu' \geq \mu$ ein ν mit $\nu \geq \mu'$ und $\nu \geq \lambda$, so dass

$$\max(\|1 - \phi_{\mu\nu}(a)\phi_{\lambda\nu}(b)\|, \|1 - \phi_{\lambda\nu}(b)\phi_{\mu\nu}(a)\|) \leq \varepsilon.$$

Wählt man $\varepsilon < 1$, so folgt, dass $\phi_{\mu\nu}(a)\phi_{\lambda\nu}(b)$ und $\phi_{\lambda\nu}(b)\phi_{\mu\nu}(a)$ in A_ν invertierbar sind, so dass $\phi_{\mu\nu}(a)$ in A_ν invertierbar ist. \square

Beweis von Theorem 3.1.5. Der Fall für lokale C^* -Algebren folgt leicht aus den anderen Aussagen, da die Norm auf A in diesem Fall eine C^* -Norm ist. Da Unitalisierung und Matrixalgebren mit normierten induktiven Limites vertauschen, kann man annehmen, dass die A_μ und $\phi_{\mu\nu}$ unital sind, und es reicht, die Abgeschlossenheit unter holomorphem Funktionalkalkül für A zu prüfen.

Sei $a \in A$ und f holomorph auf einer offenen Umgebung U von $\sigma_{\widehat{A}}(a)$. Sei $b \in A_\mu$ mit $j_\mu(b) = a$ und D eine abgeschlossene Kreisscheibe, die U enthält und deren Radius

$$R > \limsup_{\nu} \|\phi_{\mu\nu}(b)\| \geq \|a\|$$

ist. Sei $z \in D \setminus U$. Dann ist $z - a$ invertierbar in A , also gibt es nach Lemma 3.1.6 für jedes $\mu' \geq \mu$ ein $\nu \geq \mu'$, so dass $z - \phi_{\mu\nu}(b)$ in A_ν invertierbar ist. Es gibt also eine Umgebung V von z , so dass für jedes $w \in V$ das Element $w - \phi_{\mu\nu}(b)$ in A_ν invertierbar ist.

Da $D \setminus U$ kompakt ist, folgt, dass es ein $\nu \geq \mu$ gibt, so dass $w - \phi_{\mu\nu}(b)$ für alle $w \in D \setminus U$ in A_ν invertierbar ist, d.h.

$$\sigma_{A_\nu}(\phi_{\mu\nu}(b)) \subseteq U$$

(da das Spektrum aufgrund der Annahme an R in D enthalten ist). Da A_ν eine lokale Banachalgebra ist, folgt, dass $f(\phi_{\mu\nu}(b)) \in A_\nu$ ist. Offenbar ist also

$$f(a) = j_\nu(f(\phi_{\mu\nu}(b))) \in A.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Konstruktion 3.1.7 (Unendliche Matrixalgebra). Sei A eine lokale C^* -Algebra. Wir betrachten das induktive System, das durch die Folge

$$\phi_n : M_n(A) \longrightarrow M_{n+1}(A) : a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

injektiver $*$ -Morphismen gegeben ist.

Sei $M_\infty(A)$ der algebraische induktive Limes. Gemäß Aufgabe 1 (3–4) aus Übung 10 ist die Limeshalbnorm auf $M_\infty(A)$ eine C^* -Norm. Also ist $M_\infty(A)$ nach Theorem 3.1.5 mit dieser Norm eine lokale C^* -Algebra.

Die Vervollständigung von $M_\infty(A)$ wird $A \otimes \mathcal{K}$ notiert und heißt die *Stabilisierung von A* . Eine C^* -Algebra A heißt *stabil*, falls sie isomorph zu ihrer Stabilisierung ist. (Äquivalent ist, dass $A \cong M_2(A)$.)

Proposition 3.1.8. Sei $\phi : A \longrightarrow B$ ein unitaler, surjektiver beschränkter Morphismus unitaler lokaler Banachalgebren. Dann ist $\phi(A_0^\times) = B_0^\times$. Sind A und B lokale C^* -Algebren und ϕ ein $*$ -Morphismus, so gilt $\phi(U(A)_0) = U(B)_0$. Hierbei bezeichne 0 die Zusammenhangskomponente der Eins in den jeweiligen Gruppen.

Beweis. Dies folgt sofort aus dem folgenden Lemma 3.1.9. □

Lemma 3.1.9. Sei A eine unitale lokale Banachalgebra. Dann ist A_0^\times die Untergruppe von A^\times , die von den e^x , $x \in A$, erzeugt wird. Ist A eine lokale C^* -Algebra, so wird $U(A)_0$ von den e^x , $x = -x^* \in A$, erzeugt.

Beweis. Sicher gilt für $x \in A$, dass $e^x \in A^\times$ ist. Weiter ist e^{tx} ein Pfad von 1 zu e^x , also in A_0^\times enthalten. Da die \log -Reihe um 1 den Konvergenzradius 1 besitzt, folgt, dass die offene Kugel um 1 mit Radius 1 im Bild von \exp liegt. Damit ist die von $\exp(A)$ erzeugte Untergruppe H offen, wie auch all ihre Nebenklassen Hg in A_0^\times . Da die Hg eine Partition von A_0^\times bilden, sind sie auch abgeschlossen. Insbesondere gilt dies für H selbst. Es folgt also, dass A_0^\times von $\exp(A)$ erzeugt wird. Der unitäre Fall ist analog. □

3.2 Äquivalenz von Idempotenten und Projektionen

Definition 3.2.1. Sei A eine Algebra. Ein *Idempotent* ist ein $e \in A$ mit $e^2 = e$. Falls A eine $*$ -Algebra ist, sind die Projektionen also genau die selbstadjungierten Idempotenten. Die Menge der Idempotenten von A wird $\text{Idem}(A)$ geschrieben, die Menge der Projektionen $\text{Proj}(A)$.

Wir sagen, Idempotenten e und f seien

algebraisch äquivalent ($e \sim f$), falls es $x, y \in A$ mit $e = xy$ und $yx = f$ gibt;

ähnlich ($e \sim_s f$), falls es ein invertierbares $z \in \tilde{A}$ gibt mit $zez^{-1} = f$;

homotop ($e \sim_h f$), falls es einen norm-stetigen Pfad

$$(e_t) : [0, 1] \longrightarrow \text{Idem}(A)$$

gibt mit $e_0 = e$ und $e_1 = f$. Der Pfad (e_t) heißt *Homotopie*.

Im letzteren Fall nehmen wir an, dass A normiert ist.

Sei A eine $*$ -Algebra. Wir sagen, Projektionen p und q seien

Murray-von Neumann-äquivalent ($p \sim_{MvN} q$) falls es eine partielle Isometrie $u \in A$ gibt, so dass $p = u^*u$ und $q = uu^*$;

unitär äquivalent ($p \sim_u q$) falls es ein $u \in U(\tilde{A})$ mit $upu^* = q$ gibt.

Im folgenden nehmen wir an, dass A eine lokale C^* -Algebra ist (obwohl einige der folgenden Aussagen unter allgemeineren Voraussetzungen gelten).

Bemerkung 3.2.2. Die Relationen \sim_h , \sim_s und \sim_u sind Äquivalenzrelationen. Es gelten folgende offensichtliche Implikationen:

$$\sim_u \implies \sim_s$$

$$\sim_{MvN} \implies \sim$$

Wir werden zeigen, dass auch \sim und \sim_{MvN} Äquivalenzrelationen sind, und die fehlenden Beziehungen zwischen den fünf definierten Relationen ausloten.

Für die Überlegungen zu \sim ist der folgende Satz fundamental.

Proposition 3.2.3. Falls $e \sim f$ mit $e, f \in \text{Idem}(A)$, so gibt es $x, y \in A$ mit

$$xy = e, \quad yx = f, \quad x = exf, \quad y = fye.$$

Beweis. Zunächst seien $a, b \in A$ gegeben mit $e = ab$ und $f = ba$. Setze $x := eaf$ und $y := fbe$, so dass

$$exf = e^2af^2 = eaf = x, \quad fye = y.$$

Es gilt

$$xy = eaf^2be = eababe = e^4 = e$$

und analog $yx = f$. □

Bemerkung 3.2.4. Gilt $x = exf$, so folgt $x = ex = xf$. Z.B. rechnet man:

$$ex = e^2xf = exf = x.$$

Korollar 3.2.5. Die Relation \sim ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Offensichtlich ist \sim reflexiv und symmetrisch. Gelte $e \sim f$ und $f \sim g$. Seien $x, y, z, w \in A$ mit

$$e = xy, \quad f = yx = zw, \quad g = wz, \quad y = fye, \quad z = fzg, \quad w = gwf.$$

Dann folgt

$$(xz)(wy) = xfy = xy = e, \quad (wy)(xz) = wfx = wz = g,$$

also $x \sim z$ und somit die Behauptung. □

Definition 3.2.6. Sind e und f Idempotente, so heißen e und f orthogonal ($e \perp f$), falls $ef = fe = 0$. Insbesondere gilt stets $e \perp (1 - e)$ in \tilde{A} .

Korollar 3.2.7. Sind $e_i \sim f_i, i = 1, 2, e_1 \perp e_2, f_1 \perp f_2$, so folgt $e_1 + e_2 \sim f_1 + f_2$.

Beweis. Für $i = 1, 2$ seien $x_i, y_i \in A$ mit

$$e_i = x_i y_i, \quad f_i = y_i e_i, \quad x_i = e_i x_i f_i, \quad y_i = f_i y_i e_i.$$

Dann gilt

$$x_2 y_1 = x_2 f_2 f_1 y_1 = 0$$

und analog $x_i y_j = y_j x_i = 0$ für alle $i \neq j$. Es folgt

$$(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = e_1 + e_2$$

und analog $(y_1 + y_2)(x_1 + x_2) = f_1 + f_2$. □

Für Projektionen kann man die algebraische durch Murray-von Neumann-Äquivalenz ersetzen.

Proposition 3.2.8. Seien $p, q \in \text{Proj}(A)$. Genau dann gilt $p \sim q$, wenn $p \sim_{M_{\mathbb{N}}} q$ gilt. Insbesondere ist $\sim_{M_{\mathbb{N}}}$ eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Seien $x, y \in A$ mit

$$p = xy, \quad q = yx, \quad x = pxq, \quad y = qyp.$$

Dann gilt

$$p = p^*p = y^*x^*xy \leq \|x\|^2 y^*y,$$

also ist y^*y in pAp invertierbar. Es gibt also ein $r \in pAp$ mit $r|y| = |y|r = p$, insbesondere $r = prp$. Sei $u := yr$. Dann gilt

$$u|y| = yr|y| = yp = y, \quad u^*u = ry^*yr = p^2 = p.$$

Andererseits ist

$$quu^* = qyr^2y^* = yr^2y^* = uu^*$$

und $uu^*q = uu^*$, also $uu^* \leq q$ nach Aufgabe 2 von Übung 12. Umgekehrt gilt

$$q = yxx^*y^* \leq \|x\|^2 yy^* = \|x\|^2 u|y|^2 u^* \leq \|x\|^2 \|y\|^2 uu^*,$$

so dass $q \leq uu^*$, auch nach Aufgabe 2 von Übung 12. Dies zeigt $q = uu^*$. \square

⊥ 11.1.2017

⌈ 16.1.2017

Ähnlichkeit und algebraische Äquivalenz stehen wie folgt in Beziehung.

Proposition 3.2.9. *Es gilt $e \sim_s f$ genau dann, wenn $e \sim f$ und $1 - e \sim 1 - f$.*

Beweis. Sei $zez^{-1} = f$. Setze $x := ez^{-1}$ und $y := ze$; dann gilt $xy = e$ und $yx = zez^{-1} = f$, also $e \sim f$. Da auch $z(1 - e)z^{-1} = 1 - f$, folgt $1 - e \sim 1 - f$.

Umgekehrt seien $x, y \in A$ und $a, b \in \tilde{A}$ mit

$$\begin{aligned} e &= xy, & f &= yx, & x &= exf, & y &= fye, \\ 1 - e &= ab, & 1 - f &= ba, & a &= (1 - e)a(1 - f), & b &= (1 - f)b(1 - e). \end{aligned}$$

Es gilt

$$xb = xf(1 - f)b = 0$$

und analog $ay = 0$. Somit

$$(x + a)(y + b) = xy + ab = e + 1 - e = 1,$$

und analog $(y + b)(x + a) = 1$, also ist $z := x + a \in \tilde{A}$ invertierbar mit $z^{-1} = y + b$. Es gilt

$$af = fb = 0$$

und folglich

$$zfz^{-1} = (x + a)f(y + b) = xfy = xy = e.$$

Damit gilt $e \sim_s f$ und die Behauptung. \square

Beispiel 3.2.10. Im allgemeinen folgt aus $e \sim f$ nicht, dass $e \sim_s f$. In der Tat, ist $p = 1 - |e_0\rangle\langle e_0|$ in $\ell^2(\mathbb{N})$, so gilt $p = \widehat{S}\widehat{S}^*$ und $1 = \widehat{S}^*\widehat{S}$, wobei \widehat{S} der einseitige Shiftoperator sei, also ist $p \sim 1$. Es ist aber $p \not\sim_s 1$, da p nicht invertierbar ist.

Die Unterscheidung zwischen \sim und \sim_s entfällt für Matrizen.

Proposition 3.2.11. *Sei $e \sim f$. Dann gilt*

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ in } M_2(A).$$

Beweis. Seien $x, y \in A$ wie in Proposition 3.2.3. Definiere

$$z := \begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-e & e \\ e & 1-e \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1-e & e \\ e & 1-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$x(1-f) = (1-e)x = y(1-e) = (1-f)y = 0,$$

also

$$zw = \begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1-f+yx & 0 \\ 0 & xy+1-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und analog $zw = 1$, also ist z invertierbar in $M_2(A) \sim M_2(\widetilde{A})$ mit $z^{-1} = w$.

Es gilt

$$\begin{aligned} z \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w &= \begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-f & y \\ x & 1-e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Für Projektionen kann man Ähnlichkeit durch unitäre Äquivalenz ersetzen.

Proposition 3.2.12. *Seien $p, q \in \text{Proj}(A)$. Genau dann gilt $p \sim_s q$, wenn $p \sim_u q$.*

Beweis. Aufgabe 2 von Übung 4. □

Falls Idempotente nah genug aneinander liegen, sind sie ähnlich und homotop.

Proposition 3.2.13. *Seien $e, f \in \text{Idem}(A)$ mit $\|e - f\| < \|2e - 1\|^{-1}$. Mit*

$$v := 1 + (2e - 1)(2f - 1), \quad z := \frac{v}{2},$$

gilt $z \in \widetilde{A}^\times$ (d.h. invertierbar) und

$$z^{-1}ez = f, \quad \|z - 1\| \leq \|2e - 1\| \|e - f\|,$$

also folgt $e \sim_s f$. Es gilt auch $e \sim_h f$.

Beweis. Es gilt

$$v + 2(2e - 1)(e - f) = 1 + (2e - 1)^2 = 2,$$

also ist v invertierbar, denn $\|2e - 1\| \|e - f\| < 1$. Es gilt

$$ev = e(2f - 1) + e = 2ef = vf.$$

Also folgt $z \in \tilde{A}^\times$ und $ez = zf$, d.h. $e \sim_s f$. Weiter sei

$$w_t := tz + 1 - t \in \tilde{A}^\times.$$

Es gilt mit $e_t := w_t^{-1}ew_t$, dass $e_t \in \text{Idem}(A)$ und

$$e_0 = z^{-1}ez = f,$$

sowie $e_1 = e$. □

Korollar 3.2.14. Seien $p, q \in \text{Proj}(A)$ mit $\|p - q\| < 1$. Dann gilt $p \sim_h q$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $2p - 1$ selbstadjungiert und unitär, also gilt $\|2p - 1\| = 1$. Die Behauptung folgt aus Proposition 3.2.13. □

Homotopie ist stärker als Ähnlichkeit.

Korollar 3.2.15. Sei $e \sim_h f$ mit Homotopie (e_t) . Dann gibt es einen norm-stetigen Pfad $(z_t) \subseteq \tilde{A}^\times$ mit $z_0 = 1$ und $z_t^{-1}ez_t = e_t$ für alle $t \in [0, 1]$, also gilt $e \sim_s f$. Sind e, f Projektionen, die vermöge einer Homotopie in $\text{Proj}(A)$ homotop sind, so kann man annehmen, dass $z_t \in U(\tilde{A})$ liegt.

Beweis. Sei $M > 0$, so dass $\|2e_t - 1\| \leq M$ für alle $t \in [0, 1]$. Es seien weiter $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$, so dass $\|e_s - e_t\| < \frac{1}{M}$, wann immer $s, t \in [t_i, t_{i+1}]$ für ein $i, 0 \leq i < n$. Seien

$$\left. \begin{aligned} v_t^i &:= 1 + (2e_{t_i} - 1)(2e_t - 1), \\ u_t^i &:= \frac{v_t^i}{2}, \\ z_t &:= u_{t_1}^0 \cdots u_{t_i}^{i-1} u_t^i, \end{aligned} \right\} (t \in [t_i, t_{i+1}]),$$

wobei $0 \leq i < n$. Aus Proposition 3.2.13 folgt $u_t^i \in \tilde{A}^\times$. Dann ist $z_t \in \tilde{A}^\times$ wohldefiniert und stetig in Abhängigkeit von t , da $u_{t_{i+1}}^{i+1} = 1$ und folglich

$$u_{t_1}^0 \cdots u_{t_{i+1}}^i = u_{t_1}^0 \cdots u_{t_{i+1}}^i u_t^{i+1} \Big|_{t=t_{i+1}}.$$

Aus Proposition 3.2.13 folgt weiter

$$z_t^{-1}ez_t = (u_t^i)^{-1}(u_{t_i}^{i-1})^{-1} \cdots (u_{t_1}^1)^{-1} e_0 u_{t_1}^1 \cdots u_{t_i}^{i-1} u_t^i = (u_t^i)^{-1} e_{t_i} u_t^i = e_t$$

für $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Damit gilt die Behauptung. □

Beispiel 3.2.16. Aus $e \sim_s f$ folgt im allgemeinen nicht, dass $e \sim_h f$. In der Tat betrachte man $A = M_2(\mathcal{C}(\mathbb{S}^3))$. Sei $p : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{S}^2$ die Hopf-Faserung, d.h. die Verknüpfung der Inklusion $\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ mit der kanonischen Projektion $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Sei E das Geradenbündel (Vektorbündel von Rang eins) auf \mathbb{S}^3 , das durch Zurückziehung des tautologischen Bündels auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ vermöge p gegeben ist, d.h.

$$E = \{(z, w, z', w') \in (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{C} : (z', w') = \lambda(z, w)\}.$$

Da das tautologische Bündel ein Unterbündel des trivialen Vektorbündels auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ von Rang 2 ist, ist E durch einen Idempotent $e \in \text{Idem}(A)$ definiert (vgl. Aufgabe 4 auf Übung 12). Sei $f = \text{diag}(1, 0)$ das Idempotent, welches zum trivialen Geradenbündel auf \mathbb{S}^3 gehört. Da die Hopf-Faserung nicht homotop zu einer Konstanten ist, ist $e \not\sim_h f$.

Man kann aber zeigen, dass $e \sim_s f$: In der Tat gilt explizit

$$e(z, w) = \begin{pmatrix} z\bar{z} & z\bar{w} \\ \bar{z}w & w\bar{w} \end{pmatrix} = u(z, w)fu(z, w)^*,$$

wobei wir $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ auffassen und u wie folgt definiert ist:

$$u(z, w) := \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$uu^* = u^*u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt, da $|z|^2 + |w|^2 = 1$ für $(z, w) \in \mathbb{S}^3$.

Diese Unterscheidung entfällt, wenn man zu Matrixalgebren übergeht.

Proposition 3.2.17. *Es gelte $e \sim_s f$. Dann folgt*

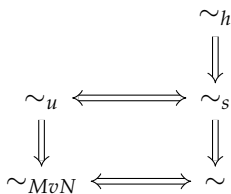
$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } M_2(A).$$

Beweis. Sei $z \in \tilde{A}^\times$ mit $zez^{-1} = f$ und (u_t) ein Pfad in $GL_2(A)$ von 1 zu $\text{diag}(z, z^{-1})$, gemäß Aufgabe 3 von Übung 12. Man setze

$$e_t := u_t \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u_t^{-1} \in \text{Idem}(M_2(A)).$$

Es folgt $e_0 = \text{diag}(e, 0)$ und $e_1 = \text{diag}(zez^{-1}, 0) = \text{diag}(f, 0)$. □

Bemerkung 3.2.18. Zusammenfassend haben wir das folgende Diagramm von Implikationen:



Die horizontalen Implikationen und die linke vertikale Implikation gelten nur für Projektionen. Die vertikalen Implikationen lassen sich im allgemeinen nicht umkehren, es sei denn, man geht zu 2×2 -Matrizen über.

Wir schließen unsere Betrachtungen mit den folgenden Sätzen ab. Der erste zeigt, dass man o.B.d.A. nur Projektionen betrachten kann.

Proposition 3.2.19. *Jedes Idempotent in A ist homotop zu einer Projektion. Sind $p \sim_h q$ homotope Projektionen, so existiert eine Homotopie in $\text{Proj}(A)$ von p zu q .*

Beweis. Sei $e \in \text{Idem}(A)$. Dann ist

$$z := 1 + (e - e^*)(e^* - e) \in \tilde{A}$$

invertierbar und positiv. Es gilt

$$\begin{aligned}
 (e - e^*)^2 e &= (e - e^*)(e - e^* e) = e - e^* e - e e^* e + e^* e = e - e e^* e, \\
 e(e - e^*)^2 &= e - e e^* e,
 \end{aligned}$$

also $ze = ee^* e = ez$. Mit $p := ee^* z^{-1} = z^{-1} ee^* \in A$ gilt folglich $p = p^*$ und

$$p^2 = z^{-1} ee^* ee^* z^{-1} = ee^* z^{-1} = p \in \text{Proj}(A).$$

Es gilt $ep = p$ und $pe = z^{-1} ee^* e = e$, also für alle $t \in \mathbb{C}$

$$(1 + t(p - e))(1 - t(p - e)) = 1 - t^2(e - p)^2 = 1 - t^2(e - ep - pe + p) = 1.$$

Mit $u_t := 1 + t(p - e) \in \tilde{A}^\times$ und $p_t := u_t^{-1} e u_t$ ist

$$p_1 = (1 - p + e)e(1 - e + p) = (e - pe + e)p = ep = p,$$

also $e \sim_h p$. Dies zeigt die erste Behauptung.

Ist q eine Projektion und (e_t) eine Homotopie von Idempotenten von p zu q , so ist $e_t e_t^* (1 + (e_t - e_t^*)(e_t^* - e_t))$ eine Homotopie von Projektionen. □

⌞ 16.1.2017

⌞ 18.1.2017

Der nächste Satz zeigt, dass man Ähnlichkeit in induktiven Limiten o.B.d.A. in den approximierenden Algebren betrachten kann.

Proposition 3.2.20. Sei $(A_\mu, \phi_{\mu\nu})$ ein normiertes induktives System lokaler Banachalgebren und A der normierte induktive Limes. Ist $e \in \text{Idem}(A)$, so gibt es für jedes μ ein $\nu \geq \mu$ und ein $e_0 \in \text{Idem}(A_\nu)$, so dass $j_\nu(e_0) = e$. Sind $e, f \in \text{Idem}(A)$ mit $e \sim_s f$ in A , so gibt es für jedes μ ein $\nu \geq \mu$ sowie $e_0, f_0 \in A_\nu$, so dass $e = j_\nu(e_0)$, $f = j_\nu(f_0)$ und $e_0 \sim_s f_0$ in A_ν .

Beweis. Sei $\mu' \geq \mu$ und $a \in A_{\mu'}$, so dass $e = j_{\mu'}(a)$. Nach Lemma 3.1.6 gilt

$$\bigcap_{\nu \geq \mu'} \sigma_{A_\nu}(\phi_{\mu'\nu}(a)) = \sigma_A(e) = \{0, 1\}.$$

Daher gibt es ein $\mu'' \geq \mu'$ und disjunkte offene Umgebungen U bzw. V von 0 bzw. 1, so dass für alle $\nu \geq \mu''$ gilt $\sigma_{A_\nu}(\phi_{\mu'\nu}(a)) \subseteq U \cup V$. Dann ist $e_0 = f(\phi_{\mu'\nu}(a)) \in \text{Idem}(A_\nu)$, wobei $f = 0$ auf U und $f = 1$ auf V .

Seien nun $e \sim_s f$ und μ gegeben. Nach dem ersten Teil gibt es $\mu' \geq \mu$ und für alle $\nu \geq \mu'$ $e_0, f_0 \in \text{Idem}(A_\nu)$ mit $j_\nu(e_0) = e$, $j_\nu(f_0) = f$. Sei $z \in \tilde{A}^\times$ mit $zez^{-1} = f$. Wir können nach Lemma 3.1.6 annehmen, dass es $w \in \tilde{A}_\nu^\times$ mit $j_\nu(w) = z$ gibt.

Sei $f_1 := we_0w^{-1}$. Da $j_\nu(f_1) = j_\nu(e_0)$ gilt, können wir durch Vergrößerung von ν annehmen, dass $\|f_0 - f_1\|$ hinreichend klein ist, so dass nach Proposition 3.2.13 folgt, dass $f_1 \sim_s f_0$ ist. Die Behauptung folgt. \square

3.3 Die K_0 -Gruppe

Im folgenden sei A eine lokale C^* -Algebra.

Definition 3.3.1. Sei $V(A)$ der Quotient $\text{Idem}(M_\infty(A))/\sim$. Aus den Ergebnissen von Abschnitt 3.2 folgt, dass man dasselbe erhält, wenn man statt \sim die Relationen \sim_s oder \sim_h betrachtet, oder stattdessen den Quotienten von $\text{Proj}(M_\infty(A))$ modulo einer der Relationen $\sim = \sim_{MvN}$, $\sim_s = \sim_u$ oder \sim_h nimmt. Gemäß Proposition 3.2.20 können wir die Äquivalenz immer in (hinreichend großen) endlichen Matrixalgebren betrachten.

Konstruktion 3.3.2 (Monoidstruktur auf $V(A)$). Für $[e], [f] \in V(A)$ definiert man

$$[e] + [f] := [e' + f'],$$

wobei $e' \in [e]$ und $f' \in [f]$ so gewählt sind, dass $e' \perp f'$ gilt. Dies ist nach Korollar 3.2.7 wohldefiniert und macht $V(A)$ zu einem abelschen Monoid mit dem neutralen Element $[0]$.

Bemerkung 3.3.3. (i) Per Konstruktion gilt $V(A) \cong V(B)$, falls $M_\infty(A) \cong M_\infty(B)$. Insbesondere gilt $V(A) \cong V(M_n(A))$.

(ii) Nach Aufgabe 1 von Übung 12 ist $V(A) = \text{Idem}(A \otimes \mathcal{K}) / \sim_s$. Daher folgt $V(A) \cong V(B)$ sogar bereits aus $A \otimes \mathcal{K} \cong B \otimes \mathcal{K}$. Im Falle der letzteren Bedingung sagt man, A und B seien *stabil isomorph*.

(iii) Mit Proposition 3.2.13 folgt, dass $V(A)$ abzählbar ist, falls A separabel ist.

Beispiel 3.3.4. (i) Es gilt

$$V(\mathbb{C}) = V(M_n(\mathbb{C})) = V(\mathcal{K}) = \mathbb{N}.$$

(ii) Es gilt für einen separablen unendlich-dimensionalen Hilbertraum \mathcal{H} :

$$V(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}, \quad n + \infty := \infty + n := \infty,$$

denn alle Orthogonalprojektionen vom gleichen Rang sind unitär äquivalent. Das Monoid $V(A)$ muss also nicht kürzbar sein (und ist daher im allgemeinen nicht Untermonoid einer Gruppe).

(iii) Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist $V(\mathcal{C}(X))$ genau das Monoid der stabilen Homotopieklassen von Vektorbündeln auf X (Theorem von Swan, Aufgabe 4 von Übung 12).

Konstruktion 3.3.5 (Funktorialität von $V(A)$). Sei $\phi : A \rightarrow B$ ein $*$ -Morphismus. Wir definieren

$$\phi_* : V(A) \rightarrow V(B)$$

durch

$$\phi_*([e]) := [\phi(e)],$$

wobei für $e = (e_{ij}) \in \text{Idem}(M_n(A))$

$$\phi(e) := (\phi(e_{ij})) \in \text{Idem}(M_n(B))$$

sei. Nach dem ersten Teil von Proposition 3.2.20 und der Definition von \sim ist ϕ_* wohldefiniert. Man sieht leicht ein, dass

$$(\text{id}_A)_* = \text{id}_{V(A)}, \quad (\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$$

gilt, wann immer $\psi : B \rightarrow C$ ein weiterer $*$ -Morphismus ist.

Definition 3.3.6. Seien $\phi_0, \phi_1 : A \rightarrow B$ $*$ -Morphismen von lokalen C^* -Algebren. Dann heißen ϕ_0 und ϕ_1 *homotop*, falls es einen $*$ -Morphismus $\phi : A \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], B)$ gibt, so dass

$$\text{ev}_t \circ \phi = \phi_t, \quad \forall t = 0, 1.$$

Hierbei sei $\text{ev}_t : \mathcal{C}([0, 1], B) \rightarrow B$ die Auswertung an $t \in [0, 1]$. Ein solches ϕ heißt *Homotopie* von ϕ_0 zu ϕ_1 .

Proposition 3.3.7. Die Zuordnung $A \mapsto V(A)$, $\phi \mapsto \phi_*$ definiert einen Funktor V von lokalen C^* -Algebren zu abelschen Monoiden. Er hat die folgenden Eigenschaften.

(i) V ist homotopie-invariant: Sind $\phi_0, \phi_1 : A \rightarrow B$ homotope $*$ -Morphismen, so ist $(\phi_0)_* = (\phi_1)_*$.

(ii) V ist additiv: Es gilt $V(A \oplus B) \cong V(A) \oplus V(B)$.

(iii) V vertauscht mit induktiven Limiten: Ist A der normierte oder Banachalgebra-induktive Limes eines induktiven Systems von lokalen C^* -Algebren $(A_\mu, \phi_{\mu\nu})$, so ist $V(A)$ der algebraische direkte Limes von $(V(A_\mu), (\phi_{\mu\nu})_*)$.

Beweis. (i). Sei $e \in \text{Idem}(M_n(A))$ und ϕ eine Homotopie von ϕ_0 zu ϕ_1 . Dann ist $\phi_0(e) \sim_h \phi_1(f)$ vermöge der Homotopie $\phi_t(e)$, wobei $\phi_t := e v_t \circ \phi$.

(ii). Es gilt $M_\infty(A \oplus B) \cong M_\infty(A) \oplus M_\infty(B)$. Die algebraische Äquivalenz ~ kann man per Definition koordinatenweise prüfen.

(iii). Laut Aufgabe 1 von Übung 12 kann man zum normierten induktiven Limes übergehen. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 3.2.20. \square

Konstruktion 3.3.8 (Grothendieck-Gruppe). Sei H eine abelsche Halbgruppe. Sei \sim die folgende Äquivalenzrelation auf $H \times H$: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ genau dann, wenn es ein $z \in H$ gibt mit

$$x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z.$$

Wir definieren $K(H) := (H \times H) / \sim$. Dann ist $K(H)$ eine abelsche Gruppe mit der Verknüpfung

$$[(x_1, y_1)] + [(x_2, y_2)] := [(x_1 + x_2, y_1 + y_2)]$$

und wird *Grothendieck-Gruppe* genannt. Die Elemente $[(x, y)]$ notiert man $x - y$.

Definition 3.3.9 (K_{00} -Gruppe). Wir definieren

$$K_{00}(A) := K(V(A)).$$

Ist $\phi : A \rightarrow B$ ein $*$ -Morphismus, so bezeichnen wir den induzierten Morphismus abelscher Gruppen $K_{00}(A) \rightarrow K_{00}(B)$ mit ϕ_* . Die Zuordnung $A \mapsto K_{00}(A)$, $\phi \mapsto \phi_*$ definiert einen Funktor K_{00} von lokalen C^* -Algebren zu abelschen Gruppen.

Beispiel 3.3.10. (i) Es gilt

$$K_{00}(\mathbb{C}) = K_{00}(M_n(\mathbb{C})) = K_{00}(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}.$$

(ii) Es gilt für jeden separablen unendlich-dimensionalen Hilbertraum \mathcal{H} :

$$K_{00}(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = 0,$$

da $n + \infty = \infty$ für alle $n \in V(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$.

(iii) Sei X ein zusammenhängender, nicht-kompakter, lokal-kompakter Hausdorffraum. Es gilt $V(\mathcal{C}_0(X)) = 0$ (Aufgabe 1, Übung 13), also $K_{00}(\mathcal{C}_0(X)) = 0$. Das letzte Beispiel zeigt, dass K_{00} für nicht-unitale C^* -Algebren nicht immer gute Ergebnisse liefert. Wir müssen daher eine andere Definition für K_0 finden.

Konstruktion 3.3.11 (K_0 -Gruppe). Für eine lokale C^* -Algebra definieren wir $A^+ := A \times \mathbb{C}$ mit den Verknüpfungen

$$(a, z)(b, w) := (ab + wa + zb, zw), \quad (a, z)^* := (a^*, \bar{z}).$$

Die Elemente von A^+ schreiben wir $a + z$. Ist A nicht-unital, so ist A^+ $*$ -isomorph zu \tilde{A} und hat daher die Struktur einer lokalen C^* -Algebra. Ist A unital, so kann man

$$\phi : A^+ \longrightarrow A \oplus \mathbb{C} : a + z \longmapsto (a + z1_A) \oplus z$$

betrachten. Dies ist wiederum ein $*$ -Morphismus, also ist A^+ wiederum eine lokale C^* -Algebra. Dabei hat $A \oplus \mathbb{C}$ die C^* -Norm

$$\|a \oplus z\| := \max(\|a\|, |z|).$$

Sei $\pi : A^+ \longrightarrow A^+/A$ die kanonische Projektion. Dann ist $A^+/A = \mathbb{C}$, also $K_{00}(A^+/A) = \mathbb{Z}$. Wir definieren

$$K_0(A) := \ker \pi_* \subseteq K_{00}(A^+).$$

Ist $\phi : A \longrightarrow B$ ein $*$ -Morphismus, so induziert $\phi_*^+ : K_{00}(A^+) \longrightarrow K_{00}(B^+)$ offenbar einen Morphismus abelscher Gruppen $\phi_* : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$. Damit wird ein weiterer Funktor K_0 von lokalen C^* -Algebren zu abelschen Gruppen definiert.

⌊ 18.1.2017

⌋ 23.1.2017

Der folgende Satz ist offensichtlich.

Proposition 3.3.12. *Die Funktoren K_{00} und K_0 sind homotopie-invariant, additiv und vertauschen mit induktiven Limites.*

Korollar 3.3.13. *Es gilt $K_{00}(A) \cong K_{00}(A \otimes \mathcal{K})$ und $K_0(A) \cong K_0(A \otimes \mathcal{K})$.*

Beweis. Die Aussage für K_0 folgt aus der für V . Die kanonischen Abbildungen $A \rightarrow M_n(A) : a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ induzieren Isomorphismen der K_0 -Gruppen. Da K_0 mit Banachalgebra-induktiven Limites vertauscht erhält man einen Isomorphismus $K_0(A) \cong K_0(A \otimes \mathcal{K})$. \square

Proposition 3.3.14 (Standard-Bild für K_0). (i) Die Elemente von $K_0(A)$ sind genau die Elemente von $K_{00}(A^+)$, die der Form $[p] - [q]$ mit $p, q \in \text{Proj}(M_k(A^+))$ und $p - q \in M_k(A)$ sind.

(ii) Die Elemente von $K_0(A)$ sind genau diejenigen der Form $[p] - [p_n]$, wobei $p \in \text{Proj}(M_k(A^+))$ mit $k \geq n$ ist und $p - p_n \in M_k(A)$ gilt. Hierbei setzen wir

$$p_n := \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \in M_k(A^+)$$

mit genau n Einsen auf der Diagonalen.

(iii) Ist $[p] - [q] = 0$ in $K_0(A)$ mit p, q wie in (i), so gibt es ein m mit

$$\text{diag}(p, p_m) \sim \text{diag}(q, p_m) \quad \text{in } M_{k+m}(A^+).$$

Es gibt ein $n \geq m$, so dass man in $M_{k+n}(A^+)$ die Relation \sim durch \sim_u oder \sim_n ersetzen kann.

Lemma 3.3.15. Sei $p \in \text{Proj}(M_k(A^+))$ mit $\pi(p) \sim p_n \in M_k(\mathbb{C})$. Dann gibt es $p' \sim_u p$ mit

$$p' \equiv p_n \quad (M_\infty(A)).$$

Beweis. Da $M_k(\mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^k)$ und \mathbb{C}^k endlich-dimensional ist, sind Projektionen durch ihren Rang bis auf unitäre Äquivalenz klassifiziert (Spektralsatz). Daher folgt aus $\pi(p) \sim p_n$, dass $u\pi(p)u^* = p_n$ für ein $u \in U_k(\mathbb{C}) = U(k)$.

Wir können u in $U_k(A^+)$ auffassen. Mit $p' := upu^*$ gilt

$$\pi(p') = u\pi(p)u^* = p_n = \pi(p_n),$$

also $p' - p_n \in M_k(A)$. \square

Beweis von Proposition 3.3.14. (i). Sind $p, q \in \text{Proj}(M_k(A^+))$ mit $p - q \in M_k(A)$, so gilt $\pi(p) = \pi(q)$ und folglich $\pi_*([p] - [q]) = 0$.

Sei umgekehrt $[p] - [q] \in K_0(A)$ mit $p, q \in \text{Proj}(M_k(A^+))$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$0 = \pi_*([p] - [q]) = [\pi(p)] - [\pi(q)] \quad \text{in } K_{00}(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}.$$

Da $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N}$ ein kürzbares Monoid ist, folgt daraus $[\pi(p)] = [\pi(q)] = [p_n]$ für ein n . Nach Lemma 3.3.15 gibt es $p' \sim_u p, q' \sim_u q$ mit

$$p' \equiv q' \equiv p_n \quad (M_k(A)),$$

d.h. $p' - q' \in M_k(A)$. Da $[p] - [q] = [p'] - [q']$ ist, folgt die Behauptung.

(ii). Sei $[p] - [q] \in K_{00}(A)$, wobei p, q der Form wie in (i) seien. Wegen Aufgabe 1 auf Blatt 12 ist $q \leq p_n$ genau dann, wenn $p_n q = q$ ist. Für $n \geq k$ gilt daher $p_n q = q$. Dann ist $p_n - q$ also eine Projektion. Durch Konjugation mit unitären Elementen können wir p die Diagonale herabbewegen, so dass es ein $p' \sim_u p$ mit $p' \perp p_n$ gibt. Es gilt auch $p' \perp p_n - q$, also

$$[p_n - q] + [q] = [p_n]$$

in $V(A^+)$, so dass in $K_{00}(A^+)$ gilt

$$[p' + p_n - q] - [p_n] = [p'] + [p_n - q] - [p_n] = [p'] - [q] = [p] - [q].$$

(iii). Es gibt ein $r \in \text{Proj}(M_m(A^+))$ mit

$$[p] + [r] = [q] + [r] \quad \text{in } V(A^+).$$

Dann ist $r \leq p_m$, also

$$\begin{aligned} [\text{diag}(p, p_m)] &= [p] + [p_m] = [p] + [r] + [p_m - r] \\ &= [q] + [r] + [p_m - r] = [\text{diag}(q, p_m)], \end{aligned}$$

d.h. $\text{diag}(p, p_m) \sim \text{diag}(q, p_m)$. Für ein $n \geq m$ kann man \sim durch \sim_u oder \sim_h ersetzen, wie aus den Ergebnissen von Abschnitt 3.2 folgt. \square

Konstruktion 3.3.16. Wir betrachten die Abbildung

$$V(A^+) \longrightarrow K_0(A) : [p] \longmapsto [p] - [p_n],$$

wobei n der Rang der Projektion $\pi(p) \in M_n(\mathbb{C})$ sei. Sind $p \perp q$ mit $\text{rk } \pi(q) = m$, so ist $\pi(p) \perp \pi(q)$, also hat $\pi(p + q)$ Rang $n + m$. Es folgt, dass die Abbildung additiv ist und einen Morphismus abelscher Gruppen $K_{00}(A^+) \longrightarrow K_0(A)$ induziert. Die Verknüpfung mit der kanonischen Abbildung $K_{00}(A) \longrightarrow K_{00}(\tilde{A})$ liefert einen Morphismus abelscher Gruppen

$$\omega_A : K_{00}(A) \longrightarrow K_0(A).$$

Wir zeigen nun, dass ω_A manchmal ein Isomorphismus ist.

Definition 3.3.17. Eine lokale C^* -Algebra A heißt *stabil unital*, falls $M_\infty(A)$ eine Fasteins aus Projektionen besitzt.

Bemerkung 3.3.18. Ein unitales A ist stabil unital. Aus Aufgabe 1 auf Blatt 12 folgt, dass A genau dann stabil unital ist, wenn $A \otimes \mathcal{K}$ eine Fasteins aus Projektionen besitzt.

Proposition 3.3.19. Sei A stabil unital. Dann ist $\omega_A : K_{00}(A) \longrightarrow K_0(A)$ ein Isomorphismus abelscher Gruppen. Insbesondere gilt dies, falls A unital ist.

Beweis. Unter der Voraussetzung an A enthält $M_\infty(A)$ eine dichte lokale C^* -Unteralgebra, die der algebraische induktive Limes unitaler lokaler C^* -Algebren ist. (Man betrachte die Unteralgebren der Form $pM_n(A)p$, wobei $p \in M_n(A)$ zu der Fasteins gehört.) Da K_{00} und K_0 mit induktiven Limites vertauschen, reicht es, die Aussage im unitalen Fall zu beweisen.

In diesem Fall ist $A^+ \cong A \oplus \mathbb{C}$, wobei π der Projektion auf die zweite Komponente entspricht. Es folgt $K_{00}(A^+) \cong K_{00}(A) \oplus \mathbb{Z}$, wobei $K_{00}(A)$ genau $\ker \pi_*$ ist. Aus den Definitionen sieht man, dass ω_A die Identität von $K_{00}(A)$ ist. \square

Beispiel 3.3.20. Es gilt $K_0(\mathcal{K}) = K_0(\mathbb{C}) = K_{00}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$.

Theorem 3.3.21. Sei $J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal, $j : J \rightarrow A$ die Inklusion und $q : A \rightarrow A/J$ die kanonische Projektion. Dann ist die Sequenz

$$K_0(J) \xrightarrow{j_*} K_0(A) \xrightarrow{q_*} K_0(A/J)$$

exakt, d.h. $\ker q_* = \text{im } j_*$.

Beweis. Sei $[p] - [p_n] \in K_0(J)$, wobei $p \equiv p_n \pmod{M_n(J)}$. Dann ist

$$q_*(j_*([p] - [p_n])) = [q(p)] - [q(p_n)] = [q(p_n)] - [q(p_n)] = 0.$$

Somit $\text{im } j_* \subseteq \text{im } q_*$. \square

23.1.2017

25.1.2017

Beweis von Theorem 3.3.21 (Fortsetzung). Sei umgekehrt $[p] - [p_n] \in \ker q_*$ mit $p \equiv p_n \pmod{M_k(A)}$. Nach Proposition 3.3.14 (iii) gibt es $r \geq k + m$ und ein Element $u \in U_r((A/J)^+)$

$$u \text{diag}(q(p), p_m, 0)u^* = \text{diag}(p_n, p_m, 0) = p_{n+m} \text{ in } M_r((A/J)^+)$$

Da $\text{diag}(u, u^*)$ nach Aufgabe 3 von Übung 12 in $U_{2r}((A/J)^+_0)$ liegt, gibt es nach Proposition 3.1.8 ein $v \in U_{2r}(A^+)$ mit $q(v) = \text{diag}(u, u^*)$. Definiere

$$f := v \text{diag}(p, p_m, 0)v^* \in M_{2r}(A^+).$$

Dann gilt $q(f) = p_{n+m}$, d.h. $f \in M_{2r}(J^+)$ und $f \equiv p_{n+m} \pmod{M_{2r}(J)}$. Damit

$$[e] - [p_n] = [\text{diag}(e, p_m, 0)] - [p_{n+m}] = [f] - [p_{n+m}] \in \text{im } j_*.$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Beispiel 3.3.22. Im allgemeinen ist weder j_* injektiv noch q_* surjektiv.

Um die fehlende Exaktheit zu kurieren, braucht man höhere K -Gruppen.

3.4 K_1 und höhere K -Gruppen

Im folgenden sei A eine lokale C^* -Algebra.

Konstruktion 3.4.1 (K_1 -Gruppe). Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(A) &:= \{u \in \mathrm{GL}_n(A^+) \mid u \equiv 1_n \pmod{M_n(A)}\}, \\ U_n(A) &:= U_n(A^+) \cap \mathrm{GL}_n(A). \end{aligned}$$

Im unitalen Fall gibt dies eine zu den üblichen isomorphen topologische Gruppe in Norm-Topologie. Die Gruppen $\mathrm{GL}_n(A)$ bilden ein induktives System vermöge

$$\mathrm{GL}_n(A) \longrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}(A) : u \longmapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der algebraische induktive Limes ist eine Gruppe $\mathrm{GL}_\infty(A)$ und eine topologische Gruppe in der induktiven Limes-Topologie (Mengen $U \subseteq \mathrm{GL}_\infty(A)$ sind offen, falls $\mathrm{GL}_n(A) \cap U$ für alle n offen ist). Die Elemente von $\mathrm{GL}_\infty(A)$ sind invertierbare unendliche Matrizen mit Diagonaleinträgen in $1_{A^+} + A$ und Außerdiagonaleinträgen in A , die fast immer $= 1$ bzw. $= 0$ sind.

Man sieht leicht, dass $\mathrm{GL}_\infty(A)_0$ der induktive Limes der $\mathrm{GL}_n(A)_0$ ist. (Man benutze, dass $\mathrm{GL}_n(A)$ lokal wegzusammenhängend ist.) Analoges gilt für $U_\infty(A) := \varinjlim_n U_n(A)$ und $U_\infty(A)_0$.

Wir definieren $K_1(A)$ als die Quotientengruppe

$$K_1(A) := \mathrm{GL}_\infty(A) / \mathrm{GL}_\infty(A)_0.$$

Wie in Aufgabe 2 von Übung 4 sieht man, dass

$$K_1(A) \cong U_\infty(A) / U_\infty(A)_0.$$

Jeder $*$ -Morphismus $\phi : A \longrightarrow B$ induziert einen Gruppen-Morphismus

$$\phi_* : K_1(A) \longrightarrow K_1(B).$$

Proposition 3.4.2. *Es gilt*

$$K_1(A) = \varinjlim_n \mathrm{GL}_n(A) / \mathrm{GL}_n(A)_0 = \varinjlim_n U_n(A) / U_n(A)_0$$

Beweis. Dies folgt sofort aus dem folgenden Lemma 3.4.3. □

Lemma 3.4.3. *Seien $u_0, u_1 \in \mathrm{GL}_n(A)$ (bzw. $U_n(A)$) so dass $u_0 u_1^{-1} \in \mathrm{GL}_\infty(A)_0$ (bzw. $U_\infty(A)_0$). Dann existiert ein $m \geq n$, so dass $u_0 u_1^{-1} \in \mathrm{GL}_m(A)_0$ (bzw. $U_m(A)_0$).*

Beweis. Dies ist die wesentliche Aussage in der folgenden Limes-Relation:

$$\mathrm{GL}_\infty(A)_0 = \varinjlim_n \mathrm{GL}_n(A)_0, \quad U_\infty(A)_0 = \varinjlim_n U_n(A)_0,$$

also folgt die Behauptung. □

Proposition 3.4.4. Für alle $u, v \in GL_n(A)$ gilt $[uv] = [\text{diag}(u, v)]$, also ist die Gruppe $K_1(A)$ abelsch.

Beweis. Dies folgt aus Proposition 3.4.2 und Aufgabe 3 von Übung 12. □

Definition 3.4.5 (Einhängung). Die *Einhängung* (Englisch: suspension) von A ist per Definition

$$SA := \mathcal{C}_0((0, 1), A) \cong \{f \in \mathcal{C}(S^1, A) \mid f(1) = 0\}$$

mit punktweisen Operationen und der Sup-Norm. Dann ist SA wiederum eine lokale C^* -Algebra und vollständig, wenn dies für A gilt.

Jeder $*$ -Morphismus $\phi : A \rightarrow B$ induziert einen $*$ -Morphismus

$$S\phi : SA \rightarrow SB : f \mapsto \phi \circ f.$$

Bemerkung 3.4.6. Man beachte $SM_n(A) \cong M_n(SA)$, sowie

$$\begin{aligned} (SA)^+ &= \{f \in \mathcal{C}([0, 1], A^+) \mid f(0) = f(1) = \lambda \in \mathbf{C}, \forall t \exists x_t \in A : f(t) = \lambda + x_t\} \\ &\cong \{f \in \mathcal{C}(S^1, A^+) \mid f(1) = \lambda \in \mathbf{C}, \forall z \exists x_z \in A : f(z) = \lambda + x_z\}. \end{aligned}$$

D.h., Elemente von $(SA)^+$ sind Schleifen f in A^+ , die modulo A konstant $= f(1)$ sind.

Theorem 3.4.7. Für alle lokalen C^* -Algebren A gibt es einen Isomorphismus

$$\theta_A : K_1(A) \rightarrow K_0(SA),$$

so dass für jeden $*$ -Morphismus $\phi : A \rightarrow B$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} K_1(A) & \xrightarrow{\phi_*} & K_1(B) \\ \theta_A \downarrow & & \downarrow \theta_B \\ K_0(SA) & \xrightarrow{(S\phi)_*} & K_0(SB) \end{array}$$

D.h., in der Sprache der Kategorientheorie ist $\theta = (\theta_A)$ eine natürliche Äquivalenz $K_1 \rightarrow K_0 \circ S$.

Beweis. Es sei $u \in U_n(A)$ und nach Aufgabe 3 von Übung 12 $v = (v_t)$ ein Pfad von 1 zu $\text{diag}(u, u^*)$ in $U_{2n}(A)$ (man beachte, dass der dort konstruierte Pfad modulo $M_{2n}(A)$ gleich Eins ist, da $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ ist). Wir definieren

$$p_t := v_t p_n v_t^*$$

Es gilt $p_0 = p_1 = p_n$ und

$$p_t \equiv p_n \quad (M_{2n}(A)),$$

also ist $p = (p_t) \in \text{Proj}(M_{2n}((SA)^+))$ und

$$\theta_A([u]) := [p] - [p_n] \in K_0(A),$$

gemäß Proposition 3.3.14 (ii), wobei p_n die "konstante Schleife" bezeichne. (Da $v = (v_t)$ im allgemeinen keine Schleife ist, ist das Element $\theta_A([u])$ nicht-trivial!) Sei $[u'] = [u]$. Aufgrund von Proposition 3.4.2 gibt es für hinreichend großes n Pfade a_t und b_t in $U_n(A)$ von 1 zu $(u')^*u$ bzw. von 1 zu $u'u^*$. Seien v_t bzw. v'_t Pfade in $U_{2n}(A)$ von 1 zu $\text{diag}(u, u^*)$ bzw. zu $\text{diag}(u', (u')^*)$ und

$$p_t := v_t p_n v_t^*, \quad p'_t := v'_t p_n (v'_t)^*.$$

Sei

$$x_t := v'_t \text{diag}(a_t, b_t) v_t^* \in U_{2n}(A).$$

Dann gilt $x_0 = 1$ und

$$x_1 = \text{diag}(u', (u')^*) \text{diag}((u')^*u, u'u^*) \text{diag}(u^*, u) = 1$$

und $x_t \equiv 1$ modulo $M_{2n}(A)$, also ist $x = (x_t) \in U_{2n}((SA)^+)$. Es gilt

$$(x p x^*)_t = u'_t \text{diag}(a_t, b_t) p_n \text{diag}(a_t^*, b_t^*) (u'_t)^* = u'_t p_n (u'_t)^* = p'_t,$$

also

$$[p] - [p_n] = [p'] - [p_n].$$

Dies zeigt, dass θ_A wohldefiniert ist. Aus Proposition 3.4.4 folgt leicht, dass θ_A ein Morphismus abelscher Gruppen ist. Die Natürlichkeit (Kommutativität des Diagramms) ist ebenfalls leicht zu prüfen.

Als nächstes zeigen wir Injektivität. Sei also $\theta_A([u]) = 0$ und v, p wie oben. Aus Proposition 3.3.14 (iii) folgt für hinreichend großes k die Existenz von $w \in U(M_k(SA)^+)$ mit

$$w \text{diag}(v, 1) \text{diag}(p_n, p_m) \text{diag}(v^*, 1) w^* = w \text{diag}(p, p_m) w^* = \text{diag}(p_n, p_m).$$

Damit hat $w \text{diag}(v, 1)$ die Form $\text{diag}(a, b)$ mit Matrizen $a \in U_n((SA)^+)$ und $b \in U_{k-n}((SB)^+)$. Es gilt $w_0 = w_1 = 1$ und $w_t \equiv 1$ modulo $M_k(A)$, also ist

$$a_0 = 1, \quad a_1 = u,$$

was bedeutet, dass $u \in U_n(A)_0$ ist. □

⌊ 25.1.2017

⌋ 30.1.2016

Beweis von Theorem 3.4.7 (Fortsetzung). Es bleibt die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $[p] - [p_n]$ mit $p \in \text{Proj}(M_k((SA)^+))$ und $p - p_n \in M_k(SA)$. Dann ist $p = (p_t)$ mit $p_0 = p_1 = p_n$ und

$$p_t \equiv p_n \quad (M_k(A)).$$

Mit Korollar 3.2.15 gibt es einen stetigen Pfad $u = (u_t)$ in $U_k(A)$ mit $u_0 = 1$ und $u_t p_n u_t^* = p_t$. Da $u_1 p_n = p_n u_1$, ist u_1 der Form $\text{diag}(v, w)$ mit $v \in U_n(A)$ und $w \in U_{k-n}(A)$. Indem man k erhöht und u durch $\text{diag}(u, w^*, v^*)$ ersetzt, kann man (nach Aufgabe 3 von Übung 12) annehmen, dass es einen Pfad $b = (b_t)$ in $U_{k-n}(A)$ von w nach $\text{diag}(v^*, 1_{k-2n})$ gibt.

Sei $z = (z_t)$ ein Pfad in $U_k(A)$ von 1 zu $\text{diag}(v, v^*, 1_{k-2n})$ und setze $q_t := z_t p_n z_t^*$, so dass

$$\theta_A([v]) = [q] - [p_n].$$

Setze $a_t := w^* b_t$ und $x_t := u_t \text{diag}(1_n, a_t) z_t^*$. Dann gilt $x_0 = 1$ und

$$x_1 = \text{diag}(v, w) \text{diag}(1_n, w^* \text{diag}(v^*, 1_{k-2n})) \text{diag}(v^*, v, 1_{k-2n}) = 1,$$

so dass $x \in U(M_k((SA)^+))$ ist. Es folgt $[p] = [q]$ und damit die Behauptung. \square

Korollar 3.4.8. *Der Funktor K_1 von lokalen C^* -Algebren zu abelschen Gruppen, gegeben durch $A \mapsto K_1(A)$, $\phi \mapsto \phi_*$, ist homotopie-invariant, additiv und vertauscht mit induktiven Limites. Für jede lokale C^* -Algebra und jedes abgeschlossene Ideal $J \subseteq A$ ist die Sequenz*

$$K_1(J) \xrightarrow{j_*} K_1(A) \xrightarrow{q_*} K_1(A/J),$$

wobei $j : J \rightarrow A$ die Inklusion ist und $q : A \rightarrow A/J$ die kanonische Projektion, exakt. Schließlich gilt für jede lokale C^* -Algebra A , dass $K_1(A) \cong K_1(A \otimes \mathcal{K})$ ist.

Beweis. Dies folgt mit Theorem 3.4.7 aus den entsprechenden Aussage für K_0 . Dazu beachte man, dass $S(A/J) \cong SA/SJ$ ist und $M_n(SA) \cong S(M_n(A))$, woraus $S(A \otimes \mathcal{K}) \cong SA \otimes \mathcal{K}$ folgt. \square

In Anbetracht der Aussage von Theorem 3.4.7 ist die folgende Definition natürlich.

Definition 3.4.9 (Höhere K -Gruppen). Für $n \geq 2$ definieren wir induktiv

$$K_n(A) := K_{n-1}(SA) \cong K_0(S^n A).$$

3.5 Lange exakte Sequenz

Um die fehlende Exaktheit der Funktoren K_0 und K_1 zu kurieren, führen wir eine lange exakte Sequenz ein. Sei dazu

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} A \xrightarrow{q} A/J \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz, d.h. j sei die Inklusion eines abgeschlossenen Ideals in A und q die kanonische Projektion.

Konstruktion 3.5.1 (Verbindender Homomorphismus). Sei $u \in U_n(A/J)$ und $v \in U_{2n}(A)$ ein Lift von $\text{diag}(u, u^*)$, der nach Aufgabe 3 von Übung 12 existiert. Es sei

$$\partial([u]) := [vp_n v^*] - [p_n] \in K_0(A).$$

Es gilt

$$\varrho(vp_n v^*) = \text{diag}(u, u^*) p_n \text{diag}(u^*, u) = p_n,$$

also $vp_n v^* - p_n \in M_{2n}(J)$ und folglich $\partial([u]) \in K_0(J)$ nach Proposition 3.3.14.

Proposition 3.5.2. Die Vorschrift ∂ ist als Abbildung $K_1(A/J) \rightarrow K_0(J)$ wohldefiniert und ein Morphismus abelscher Gruppen.

Beweis. Zum Beweis der Wohldefiniertheit sei zunächst w ein weiterer unitärer Lift von $\text{diag}(u, u^*)$. Sei $z := wv^{-1}$. Dann ist $\varrho(z) = 1$, also $z \in U_{2n}(J)$ und folglich

$$[wp_n w] - [p_n] = [zvp_n v^* z^*] - [p_n] = [vp_n v^*] - [p_n]$$

in $K_0(J)$. Daher ist die Definition unabhängig von der Wahl des Lifts.

Als nächstes sei $u' \in U_n(A/J)$ mit $[u'] = [u]$ in $K_1(A/J)$. Dann gilt $u^* u', u(u')^* \in U_n(A/J)_0$, so dass es nach Proposition 3.1.8 $a, b \in U_n(A)$ mit $\varrho(a) = u^* u'$ und $\varrho(b) = u(u')^*$ gibt. Es gilt

$$\varrho(v \text{diag}(a, b)) = \text{diag}(u, u^*) \text{diag}(u^* u', u(u')^*) = \text{diag}(u', (u')^*)$$

und

$$[v \text{diag}(a, b) p_n \text{diag}(a^*, b^*) v^*] - [p_n] = [vp_n v^*] - [p_n],$$

also ist $\partial([u])$ unabhängig von allen Wahlen wohldefiniert.

Dass ∂ ein Gruppensomorphismus ist, folgt leicht aus Proposition 3.4.4. \square

Definition 3.5.3. Der kanonische Morphismus abelscher Gruppen

$$\partial : K_1(A/J) \rightarrow K_0(J)$$

heißt *Indexabbildung*.

Bemerkung 3.5.4. Die Indexabbildung ist natürlich, d.h. für jeden $*$ -Morphismus $\phi : A \rightarrow B$ und alle abgeschlossenen Ideale $J \subseteq A$ und $I \subseteq B$ mit $\phi(J) \subseteq I$ ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} K_1(A/J) & \xrightarrow{\tilde{\phi}_*} & K_1(B/I) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ K_0(A) & \xrightarrow{\phi} & K_0(B) \end{array}$$

Dabei ist $\tilde{\phi} : A/J \rightarrow B/I$ der von ϕ induzierte $*$ -Morphismus. Die Kommutativität folgt sofort aus den Definitionen.

Theorem 3.5.5. *Die folgende Sequenz ist exakt:*

$$K_1(J) \xrightarrow{j_*} K_1(A) \xrightarrow{q_*} K_1(A/J) \xrightarrow{\partial} K_0(J) \xrightarrow{j_*} K_0(A) \xrightarrow{q_*} K_0(A/J)$$

Da S kurze exakte Sequenzen erhält, gilt die entsprechende Aussage auch für K_{n+1} und K_n anstelle von K_1 und K_0 .

Beweis. Mit Theorem 3.3.21 und Korollar 3.4.8 ist die Exaktheit an allen Stellen außer an $K_1(A/J)$ und $K_0(J)$ bereits nachgewiesen worden.

Exaktheit an $K_1(A/J)$. Sei $u \in U_n(A)$. Dann ist $v := \text{diag}(u, u^*)$ ein Lift von $\text{diag}(q(u), q(u)^*)$. Da $\text{diag}(u, u^*)$ mit p_n kommutiert, ist $\partial([u]) = 0$. Somit gilt im $q_* \subseteq \ker \partial$.

Umgekehrt sei $u \in U_n(A/J)$ mit $\partial([u]) = 0$. Sei $v \in U_{2n}(A)$ ein Lift von $\text{diag}(u, u^*)$. Dann gilt $[vp_n v^*] - [p_n] = 0$ in $K_0(J)$.

Wir definieren eine partielle Isometrie $w := vp_n \in M_{2n}(A^+)$ mit $w^*w = p_n$ und $q := ww^* = vp_n v^*$. Es gilt $\pi(w) = \text{diag}(u, 0)$. Es gibt nach Proposition 3.3.14 (iii) ein m und ein $k \geq m + 2n$ mit

$$\text{diag}(q, p_m) \sim_u \text{diag}(p_n, p_m)$$

in $M_k(J^+)$. Wegen Proposition 3.2.9 gibt es eine partielle Isometrie $w' \in M_k(J^+)$ mit

$$(w')^*w' = \text{diag}(1_{2n} - p_n, 1_{k-2n} - p_m), \quad w'(w')^* = \text{diag}(1_{2n} - q, 1_{k-2n} - p_m)$$

Es ist

$$w' \text{diag}(p_n, 0) = w'(w')^*w' \text{diag}(p_n, 0) = 0$$

und

$$\text{diag}(p_n, 0)q(w') = \text{diag}(p_n, 0)q(w'(w')^*w') = \text{diag}(p_n(1 - p_n)w', 0) = 0,$$

also $q(w') = \text{diag}(0, u')$ für ein $u' \in U_{k-2n}(\mathbb{C}) = U(k-2n)$. (Die Einträge der Matrix u' sind in $\{0, 1\}$, da $w' \in M_k(J^+)$ gilt.)

Sei $z := \text{diag}(w, p_m) + w'$. Dann ist $w' \perp \text{diag}(w, p_m)$, und es gilt

$$z^*z = \text{diag}(w^*w, p_m) + (w')^*w' = 1, \quad zz^* = 1,$$

also folgt $z \in U_k(A^+)$. Es gilt

$$q(z) = \text{diag}(u, p_m) + \text{diag}(0, u') = \text{diag}(u, u'') \in U_k(\mathbb{C}) = U(k)$$

mit $u'' \in U(k-n)$. Schließlich sei $z' := \text{diag}(1_n, (u'')^*)z$. Dann gilt

$$q(z') = \text{diag}(u, 1)$$

und

$$\pi(z') = \text{diag}(\pi(u), 1) = 1,$$

also $z' \in U_k(A)$. Es gilt

$$\varrho_*([z']) = [\varrho(z')] = [u],$$

also ist $\text{im } \varrho_* = \ker \partial$. □

⊥ 30.1.2017

⌈ 1.2.2017

Beweis von Theorem 3.5.5 (Fortsetzung). Exaktheit an $K_0(J)$. Sei $u \in U_n(A/J)$ und $v \in U_{2n}(A)$ mit $\varrho(v) = \text{diag}(u, u^*)$. Dann gilt

$$j_*(\partial([u])) = [vp_nv^*] - [p_n] = 0$$

in $K_0(A)$, da $v \in U_{2n}(A)$. Somit gilt $\text{im } \partial \subseteq \ker j_*$.

Umgekehrt sei $[p] - [p_n] \in K_0(J)$, wobei $p \in M_{2n}(J^+)$ mit $p \equiv p_n \pmod{M_{2n}(J)}$ und $[p] - [p_n] = 0$ in $K_0(A)$. Dann gibt es ein m , ein $k \geq n + m$ und ein $u \in U_k(A^+)$, so dass

$$u \text{diag}(p_n, p_m)u^* = \text{diag}(p, p_m).$$

Durch Vergrößerung von n kann man annehmen, dass $up_nu^* = p$ für ein $u \in U_{4n}(A)_0$. Es gilt

$$\varrho(u)p_n = \varrho(up) = \varrho(pu) = p_n\varrho(u),$$

also $\varrho(u) = \text{diag}(u_1, u_2)$ mit $u_1 \in U_n(A/J)$ und $u_2 \in U_{3n}(A/J)$. Indem man n vergrößert und u_2 durch $\text{diag}(u_2, u_2^*, u_1^*)$ ersetzt, kann man annehmen, dass es einen Pfad in $U_{3n}(A/J)$ von u_2 nach $\text{diag}(u_1^*, 1_{2n})$ gibt. Damit folgt, dass $u_2^* \text{diag}(u_1^*, 1) \in U_{3n}(A/J)_0$ gilt. Nach Proposition 3.1.8 gibt es ein $v \in U_{3n}(A)$ mit $\varrho(v) = u_2^* \text{diag}(u_1^*, 1)$. Mit $w := u \text{diag}(1_n, v)$ erhält man

$$\varrho(w) = \text{diag}(u_1, u_2) \text{diag}(1, u_2^*) \text{diag}(1, u_1^*, 1) = \text{diag}(u_1, u_1^*, 1_{2n})$$

und

$$p = up_nu^* = u \text{diag}(1_n, v)p_n \text{diag}(1_n, v^*)u^* = wp_nw^*,$$

also folgt $\partial([u_1]) = [p] - [p_n]$ und $\ker j_* = \text{im } \partial$. □

Korollar 3.5.6. Die kurze exakte Sequenz lokaler C^* -Algebren

$$0 \longrightarrow J \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\varrho} A/J \longrightarrow 0$$

spalte, d.h. es gebe einen $*$ -Morphismus $\sigma : A/J \longrightarrow A$ mit $\varrho \circ \sigma = \text{id}_{A/J}$. Dann ist die Sequenz abelscher Gruppen

$$0 \longrightarrow K_n(J) \xrightarrow{j_*} K_n(A) \xrightarrow{\varrho_*} K_n(A/J) \longrightarrow 0$$

für jedes n exakt und spaltet. Folglich ist $K_n(A) \cong K_n(J) \oplus K_n(A/J)$.

Beweis. Indem man A durch $S^n A$ ersetzt (Theorem 3.4.7), reicht es, die Aussage für $n = 0$ zu zeigen. Wegen $\varrho_* \circ \sigma_* = \text{id}$ sind

$$\varrho_* : K_0(A) \longrightarrow K_0(A/J), \quad \varrho_* : K_1(A) \longrightarrow K_0(A/J)$$

surjektiv. Dies zeigt die Exaktheit an $K_0(A/J)$ und wegen Theorem 3.5.5, dass

$$\ker \partial = K_1(A/J),$$

so dass $\partial : K_1(A/J) \longrightarrow K_0(J)$ die Nullabbildung ist. Wiederum aus Theorem 3.5.5 folgt $\ker j_* = 0$, d.h., die Exaktheit an $K_0(J)$. \square

Korollar 3.5.7. Die Inklusion $A \subseteq A^+$ induziert einen Isomorphismus abelscher Gruppen $K_1(A) \longrightarrow K_1(A^+)$.

Beweis. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^+ \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

spaltet, also ist nach Korollar 3.5.6 die folgende kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen exakt:

$$0 \longrightarrow K_1(A) \longrightarrow K_1(A^+) \xrightarrow{\pi_*} K_1(\mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

Nach Theorem 3.4.7 und Beispiel 3.3.10 (iii) gilt weiter

$$K_1(\mathbb{C}) \cong K_0(S\mathbb{C}) = K_0(\mathcal{C}_0((0,1))) = 0,$$

also ist π_* die Nullabbildung. Daraus folgt die Behauptung. \square

3.6 Bott-Periodizität

Das folgende Theorem wird als *Bott-Periodizität* bezeichnet, weil es in gewissem Sinne das Theorem von Raoul Bott (1957) über die Periodizität der stabilen Homotopiegruppen der unitären Gruppe verallgemeinert. Man kann Botts Theorem wie folgt formulieren:

$$\pi_n(U(\infty)) \cong \pi_{n+2}(U(\infty)),$$

wobei $U(\infty) := U_\infty(\mathbb{C})$. Es folgt nun die Periodizitätsaussage, die uns im Kontext der K -Theorie von C^* -Algebren interessiert. (Dieses Theorem wird von Blackadar [5, Notes for Chapter IV] Atiyah [3] zugeschrieben.)

Theorem 3.6.1 (Bott-Periodizität). Sei A eine lokale C^* -Algebra. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus abelscher Gruppen $K_1(SA) \longrightarrow K_0(A)$.

Wir folgen einem Beweis von Cuntz [7]. Um diesen vorzubereiten, verallgemeinern wir die Toeplitzerweiterung auf die Situation "über A ".

Konstruktion 3.6.2 (Toeplitz-Erweiterung). Sei $A \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine C^* -Algebra und \mathcal{T}_A die von A und dem Toeplitz-Operator $u = T_z$ erzeugte C^* -Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes H^2)$. Dann ist \mathcal{T}_A die C^* -Algebra zu den Erzeugern u und $a \in A$ und den Relationen $u^*u = 1$, $au = ua$, $a \in A$, sowie den $*$ -algebraischen Relationen von A . Die Algebra $\Omega_A := \mathcal{C}(S^1, A)$ ist ebenfalls eine C^* -Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes H^2)$. Durch $u \mapsto z$ wird ein eindeutiger surjektiver $*$ -Morphismus

$$\pi_A : \mathcal{T}_A \longrightarrow \Omega_A$$

definiert (vgl. Theorem 2.4.4).

Der Kern von π_A wird erzeugt von A und $e := 1 - uu^* = |1\rangle\langle 1|$. Es folgt aus Theorem 2.4.4, dass $\ker \pi_A \cong A \otimes \mathcal{K}$. Wir haben die folgende exakte Sequenz, die als *Toeplitz-Erweiterung* bekannt ist:

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T}_A \xrightarrow{\pi_A} \Omega_A \longrightarrow 0. \quad (3.6.1)$$

Es sei $q_A := \text{ev}_1 \circ \pi_A : \mathcal{T}_A \longrightarrow A$ und $\mathcal{T}_{A,0} := \ker q$. Dann wird $\mathcal{T}_{A,0}$ von A und $1 - u$ erzeugt. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{A,0} \longrightarrow \mathcal{T}_A \xrightarrow{q_A} A \longrightarrow 0 \quad (3.6.2)$$

spaltet vermöge $\sigma_A : A \longrightarrow \mathcal{T}_A$, definiert durch

$$(\sigma_A(a)\psi)(z) := a\psi(z), \quad \forall a \in A, \psi \in \mathcal{H} \otimes H^2, z \in S^1.$$

Daher gilt nach Korollar 3.5.6, dass $K_\bullet(\mathcal{T}_{A,0}) \cong \ker(q_A)_*$.

Proposition 3.6.3. *Die Abbildung $(q_A)_* : K_\bullet(\mathcal{T}_A) \longrightarrow K_\bullet(A)$ ist invertierbar mit Inversem $(\sigma_A)_*$. Insbesondere gilt $K_\bullet(\mathcal{T}_{A,0}) = 0$.*

Bevor wir diese Proposition beweisen, zeigen wir, wie man mit ihrer Hilfe das Theorem 3.6.1 beweisen kann.

Beweis von Theorem 3.6.1. Es ist nach Korollar 3.1.4 keine Einschränkung anzunehmen, dass A eine C^* -Algebra ist. Dies tun wir nun in Folge.

Schränken wir die kurze exakte Sequenz in Gleichung (3.6.1) auf $\mathcal{T}_{A,0}$ ein, so erhalten wir die folgende kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{T}_{A,0} \xrightarrow{\pi_A} SA \longrightarrow 0. \quad (3.6.3)$$

Wenden wir hierauf nun die lange exakte Sequenz in K -Theorie (Theorem 3.5.5) an, so erhalten wir die folgende exakte Sequenz abelscher Gruppen:

$$K_1(\mathcal{T}_{A,0}) \xrightarrow{(\pi_A)_*} K_1(SA) \xrightarrow{\partial} K_0(A \otimes \mathcal{K}) \longrightarrow K_0(\mathcal{T}_{A,0}).$$

Nach Proposition 3.6.3 sind die äußeren Gruppen $= 0$, also ist die Indexabbildung $\partial : K_1(SA) \rightarrow K_0(A \otimes \mathcal{K})$ ein Isomorphismus. Da $K_0(A) \cong K_0(A \otimes \mathcal{K})$, folgt, dass $K_0(A) \cong K_1(SA)$ ist. Da beide Isomorphismen natürlich sind, folgt die Behauptung. \square

L 1.2.2017

7 6.2.2017

Um den Beweis von Theorem 3.6.1 abzuschließen, beweisen wir nun Proposition 3.6.3. Dazu zunächst ein Lemma.

Lemma 3.6.4. *Sei $s \in U(A)$ selbstadjungiert. Dann ist $s \in U(A)_0$.*

Beweis. Sei $p := \frac{1}{2}(1 + s)$, so dass $s = 2p - 1$. Wir definieren

$$u_t := p + e^{\pi i(2t-1)}(1 - p)$$

für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist

$$u_t^* u_t = p^2 + e^{-\pi i(2t-1)} e^{\pi i(2t-1)} (1 - p)^2 = p + 1 - p = 1 = u_t u_t^*,$$

d.h. u_t ist unitär. Da $u_0 = s$ und $u_1 = 1$, folgt die Behauptung. \square

Beweis von Proposition 3.6.3. Da $q_A \circ \sigma_A = \text{id}_A$, gilt $(q_A)_* \circ (\sigma_A)_* = \text{id}_{K_*(A)}$. Sei $\widehat{\mathcal{T}}_A$ die C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H} \otimes H^2 \otimes H^2)$, die von Af , Aw und Av erzeugt wird, wobei

$$f := e \otimes 1, \quad v := u \otimes 1, \quad w := e \otimes u.$$

Dann ist die von Af und Aw erzeugte Unter-C*-Algebra *-isomorph zu $\mathcal{T}_A \otimes \mathcal{K}$ und die von v erzeugte *-isomorph zu \mathcal{T}_A . Es gibt also eine kurze exakte Sequenz von *-Morphismen

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_A \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{j} \widehat{\mathcal{T}}_A \xrightarrow{p} \mathcal{T}_A \longrightarrow 0,$$

wobei $p(Af) = p(Aw) = 0$ und $p(av) = au$ für alle $a \in A$.

Wir zeigen nun, dass diese Sequenz spaltet, und definieren verschiedene aber homotope Schnitte. Dazu seien $g := e \otimes e$ und

$$u_0 := v(1 - f)v^* + wv^* + vw^* + g, \quad u_1 = v(1 - f)v^* + fv^* + vf.$$

Offenbar sind u_0 und u_1 selbstadjungiert. Da

$$v^*v = 1, \quad f = 1 - vv^*, \quad fv = v^*f = 0,$$

folgt

$$u_1^2 = v(1 - f)v^* + vfv^* + f = vv^* + f = 1,$$

also ist u_1 unitär. Weiter gilt

$$v^*w = w^*v = 0, \quad wf = w, \quad fw^* = w^*, \quad gv = v^*g = 0, \quad gw = w^*g = 0,$$

also folgt

$$u_0^2 = v(1-f)v^* + ww^* + vw^*wv^* + g$$

Da weiterhin

$$w^*w = e \otimes u^*u = f, \quad f - ww^* = e \otimes (1 - uu^*) = g,$$

folgt hieraus

$$u_0^2 = vv^* + f = 1,$$

so dass auch u_0 unitär ist. Nach Lemma 3.6.4 gibt es einen Pfad (u_t) in $U(\widehat{\mathcal{T}}_A)$ von u_0 nach u_1 . Für alle $t \in [0, 1]$ sei

$$\phi_t : \mathcal{T}_A \longrightarrow \widehat{\mathcal{T}}_A$$

der eindeutige $*$ -Morphismus mit $\phi_t(au) = au_t v$ für alle $a \in A$. Per Konstruktion sind ϕ_0 und ϕ_1 homotop. Es gilt

$$\phi_0(au) = a(v(1-f) + w), \quad \phi_1(au) = a(v(1-f) + f),$$

also

$$p(\phi_0(au)) = p(\phi_1(au)) = au,$$

so dass $p \circ \phi_0 = p \circ \phi_1 = \text{id}_{\mathcal{T}_A}$.

Wir definieren weiter

$$\overline{\mathcal{T}}_A := \{(a, b) \in \widehat{\mathcal{T}}_A \oplus \mathcal{T}_A \mid p(a) = b\}.$$

Dann haben wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_A \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{(j, 0)} \overline{\mathcal{T}}_A \xrightarrow{p_2} \mathcal{T}_A \longrightarrow 0.$$

Wir definieren nun

$$\psi_t : \mathcal{T}_A \longrightarrow \overline{\mathcal{T}}_A : x \longmapsto (\phi_t(x), x).$$

Dann sind ψ_0, ψ_1 homotope Schnitte von p_2 . Es gilt

$$\psi_0(au) = (a(v(1-f) + w), au), \quad \psi_1(au) = (a(v(1-f) + f), au),$$

also $\psi_0 = \psi \oplus \omega$, wobei $\psi, \omega : \mathcal{T}_A \longrightarrow \overline{\mathcal{T}}_A$ bestimmt sind durch

$$\psi(au) := (a(v(1-f) + w), au), \quad \omega(au) := (aw, 0).$$

Andererseits gilt

$$\omega(a) = \omega(au^*u) = aw^*w = af,$$

so dass $\psi_1 = \psi \oplus \omega \circ \sigma_A \circ \varrho_A$.

Wegen Korollar 3.5.6 ist

$$K_\bullet(\overline{\mathcal{T}}_A) \cong K_\bullet(\mathcal{T}_A) \oplus K_\bullet(\mathcal{T}_A)$$

In der Zerlegung folgt

$$\omega_* \circ (\sigma_A)_* \circ (q_A)_* = \omega_*.$$

In der Identifizierung von \mathcal{K} mit $\mathbb{C} \otimes \mathcal{K}$ entspricht $e = |1\rangle\langle 1|$ der Projektion p_1 . Daher ist ω bis auf $*$ -Isomorphismen schlicht die kanonische Abbildung $\mathcal{T}_A \rightarrow M_\infty(\mathcal{T}_A) \rightarrow \mathcal{T}_A \otimes \mathcal{K}$. Nach Korollar 3.3.13 ist ω_* ein Isomorphismus, also folgt die Behauptung. \square

Korollar 3.6.5. *Es gibt natürliche Isomorphismen*

$$K_n(A) \cong \begin{cases} K_0(A), & \text{falls } 2|n, \\ K_1(A), & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Beweis. Nach Theorem 3.6.1 und Theorem 3.4.7 gilt

$$K_0(A) \cong K_1(SA) = K_2(A), \quad K_1(A) \cong K_0(SA) \cong K_1(S^2A) = K_3(A).$$

Aus der Definition der höheren K -Gruppen folgt die Behauptung. \square

Der Isomorphismus in Theorem 3.6.1 wird in der Regel auf andere Weise konstruiert. Wir zeigen nun, dass diese Konstruktion bis auf ein Vorzeichen genau zu invers der von uns beschriebenen (die auf Cuntz [7] zurückgeht) ist.

Konstruktion 3.6.6 (Bottabbildung). Sei A eine lokale C^* -Algebra und ein Element $[p] - [p_n] \in K_0(A)$ gegeben, wobei $k \geq n$, $p \in \text{Proj}(M_k(A^+))$ und $p - p_n \in M_k(A)$ sei. Wir setzen

$$f_p(t) := e^{2\pi it} p + 1 - p.$$

Dann gilt

$$f_p^* f_p = p + 1 - p = 1 = f_p f_p^*,$$

d.h. f_p ist eine Schleife in $U_k(A^+)$. Offenbar gilt $f_p f_{p_n}^{-1} \in U_k((SA)^+)$, so dass wir

$$\beta_A([p] - [p_n]) := [f_p f_{p_n}^{-1}] \in K_1(SA)$$

definieren können. Ist $p' \sim_h p$, so ist f_p homotop zu $f_{p'}$ mit Basispunkt 1. Es folgt, dass $\beta_A : K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$ wohldefiniert ist. Man sieht mit Proposition 3.4.4 leicht ein, dass β_A additiv ist. Diese Abbildung heißt *Bottabbildung*.

Sie ist offenbar natürlich, d.h. für jeden $*$ -Morphismus $\phi : A \rightarrow B$ lokaler C^* -Algebren kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \xrightarrow{\phi_*} & K_0(B) \\ \beta_A \downarrow & & \downarrow \beta_B \\ K_1(SA) & \xrightarrow{(\mathcal{S}\phi)_*} & K_1(SB). \end{array}$$

Proposition 3.6.7. *Das Negative $-\beta_A$ der Bottabbildung ist invers zu dem im Beweis von Theorem 3.6.1 konstruierten Isomorphismus $K_1(SA) \rightarrow K_0(A)$.*

Beweis. Wir machen intensiven Gebrauch davon, dass alle Abbildungen, die wir betrachten müssen, natürliche Transformationen sind. Durch Betrachtung der spaltenden kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^+ \xrightarrow{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

sieht man leicht ein, dass es reicht, die Behauptung für unitalen A zu beweisen. Sei $\partial : K_1 \circ S \rightarrow K_0(- \otimes \mathcal{K})$ die Indexabbildung zur reduzierten Toeplitzerweiterung (3.6.3). Wie im Beweis von Theorem 3.6.1 gezeigt, ist ∂ ein natürlicher Isomorphismus. Weiterhin sei $\sigma : K_0 \rightarrow K_0(- \otimes \mathcal{K})$ der natürliche Isomorphismus, der durch die $*$ -Morphismen

$$A \longrightarrow A \otimes \mathcal{K} \subseteq \mathcal{T}_A : a \longmapsto ae$$

induziert ist. Der in Theorem 3.6.1 konstruierte natürliche Isomorphismus $K_1 \circ S \rightarrow K_0$ ist gerade $\sigma^{-1} \circ \partial$. Da ∂ und σ natürliche Isomorphismen sind, wird es also reichen zu zeigen, dass $-\sigma^{-1} \circ \partial \circ \beta = \text{id}$ ist. Dies ist aber eine Gleichheit von natürlichen Transformationen $K_0 \rightarrow K_0$, wobei diese als Funktoren auf unitalen C^* -Algebren aufgefasst werden.

Wie in Übung 14 gezeigt (siehe vor allem Aufgabe 3), ist eine solche Transformation durch ihre Wirkung auf $A = \mathbb{C}$ und dort durch ihren Wert auf $[1]$ wohldefiniert. Es gilt $\sigma_{\mathbb{C}}([1]) = [e]$ und per Konstruktion $\beta_{\mathbb{C}}([1]) = [z]$, wobei $z \in \Omega$ die Identität von S^1 ist.

Ein Lift von $\text{diag}(z, \bar{z})$ in \mathcal{T} ist gegeben durch

$$v := \begin{pmatrix} u & e \\ 0 & u^* \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$vv^* = \begin{pmatrix} uu^* + e & u^*e \\ eu & u^*u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v^*v = \begin{pmatrix} u^*u & u^*e \\ eu & 1 + uu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist v unitär. Damit ist

$$\partial([z]) = [vp_1v^*] - [p_1] = \begin{bmatrix} uu^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

6.2.2017

8.2.2017

Theorem 3.6.8 (Exakte Sechs-Term-Sequenz). *Sei $J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann gibt es ein exaktes Diagramm von Morphismen abelscher Gruppen*

$$\begin{array}{ccccc} K_0(J) & \xrightarrow{j_*} & K_0(A) & \xrightarrow{q_*} & K_0(A/J) \\ \partial \uparrow & & & & \downarrow \partial \\ K_1(A/J) & \xleftarrow{q_*} & K_1(A) & \xleftarrow{j_*} & K_1(J). \end{array}$$

Hierbei ist $\partial : K_0(A/J) \rightarrow K_1(J)$ die Verknüpfung von $\partial : K_2(A/J) \rightarrow K_1(J)$ mit der Bottabbildung $\beta_{A/J}$.

Beweis. Dies folgt sofort aus Theorem 3.5.5 und Theorem 3.6.1. □

Bemerkung 3.6.9. Die Abbildung $\partial : K_0(A/J) \rightarrow K_1(J)$ aus Theorem 3.6.8 heißt *Exponentialabbildung*, denn es gilt

$$\partial([p] - [p_n]) = [\exp(2\pi ix)],$$

wobei $p \in \text{Proj}(M_k(A^+))$ mit $p - p_n \in M_k(A)$ ist und $x \in M_k(A^+)$ selbstadjungiert ist mit $q(x) = p$. Für einen Beweis siehe [14, Proposition 12.2.2].

3.7 Bibliographische Notizen zu Kapitel 3

Das Kapitel ist weitestgehend eine Auswahl von Resultaten aus dem Buch von Blackadar [5]. An einigen Stellen bedienen wir uns des Buchs von Wegge-Olsen [15], so z.B. in Proposition 3.3.14 (iii) und im Beweis von Theorem 3.5.5. Der Beweis der Bott-Periodizität folgt Cuntz [6, 7] (siehe auch [5, Section 9.4.2]), der von Proposition 3.6.7 (deren Aussage bekannt ist) ist eine eigene Ergänzung.

A

Grundlagen aus der Funktionalanalysis

A.1 Lokal-konvexe Vektorräume

Im folgenden seien E und F Vektorräume über \mathbb{C} .

Definition A.1.1 (Lokal-konvexe Vektorräume). Eine *Halbnorm* auf E ist eine Funktion $p : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \quad p(zx) = |z|p(x), \quad \forall x, y \in E, z \in \mathbb{C}.$$

Für jede endliche Menge P von Halbnormen auf E , $x \in E$ und $r > 0$, sei

$$U_r^P(x) := \{y \in E \mid \forall p \in P : p(x - y) < r\}.$$

Ist \mathcal{P} eine beliebige Menge von Halbnormen, so ist die von \mathcal{P} erzeugte Topologie per Definition die grösste Topologie, für die alle Mengen der Form $U_r^P(x)$ mit $P \subseteq \mathcal{P}$ endlich, $r > 0$ und $x \in E$, offen sind. Ist E mit einer von einer Menge von Halbnormen erzeugten Hausdorff-Topologie versehen, so heißt E ein *lokal-konvexer Vektorraum*.

Für einen lokal-konvexen Vektorraum ist der *Dualraum* E' per Definition die Menge der stetigen linearen Funktionale $E \rightarrow \mathbb{C}$.

Bemerkung A.1.2. Ist E ein lokal-konvexer Vektorraum, so ist die Topologie von E von der Menge aller auf E stetigen Halbnormen erzeugt.

Beispiel A.1.3 (Schwach*-Topologie). Sei E ein lokal-konvexer Vektorraum. Der Dualraum wird mit der von den Halbnormen

$$p_x : E' \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : \mu \mapsto |\mu(x)|$$

mit beliebigem $x \in E$ erzeugten Topologie zu einem lokal-konvexen Vektorraum. Diese Topologie heißt *schwach*-Topologie* oder $\sigma(E', E)$ -Topologie. Wir schreiben E'_σ für E' mit der schwach*-Topologie.

Beispiel A.1.4 (Schwache Topologie). Sei E ein lokal-konvexer Vektorraum. Die schwache Topologie oder $\sigma(E, E')$ -Topologie auf E ist erzeugt von den Halbnormen

$$p_\mu : E \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} : x \longmapsto |\mu(x)|,$$

wobei $\mu \in E'$ beliebig ist. Nach dem folgenden Theorem von Hahn-Banach ist diese Topologie Hausdorff, so dass E mit der schwachen Topologie ein lokal-konvexer Vektorraum ist. Die schwache Topologie auf E ist offensichtlich größer als die gegebene Topologie. Wir schreiben E_σ für E mit der schwachen Topologie.

Theorem A.1.5 (Hahn-Banach). Sei E ein lokal-konvexer Vektorraum und $F \subseteq E$ ein Untervektorraum. Für jede stetige Linearform $\nu \in F'$ gibt es eine stetige Linearform $\mu \in E'$ mit $\mu|_F = \nu$.

Korollar A.1.6. Sei E ein lokal-konvexer Vektorraum und $x \in E$. Ist $\mu(x) = 0$ für alle $\mu \in E'$, so ist $x = 0$.

Bemerkung A.1.7. Nach Korollar A.1.6 ist die Abbildung

$$E \longrightarrow \prod_{\mu \in E'} \mathbb{C} : x \longmapsto (\mu(x))_{\mu \in E'}$$

injektiv. Die schwache Topologie auf E ist die Relativtopologie bezüglich der Produkttopologie auf dem direkten Produkt.

Korollar A.1.8. Sei E ein lokal-konvexer Vektorraum. Die Abbildung

$$E \longrightarrow (E'_\sigma)' : x \longmapsto (\mu \longmapsto \mu(x))$$

ist eine Bijektion. Sie ist ein Homöomorphismus $E_\sigma \longrightarrow (E'_\sigma)'$.

Bemerkung A.1.9. Versieht man E' mit einer feineren als der schwach*-Topologie, so ist $(E')'$ in der Regel größer als E . So ist z.B. für einen Banachraum E das doppelte Dual $(E')'$, wobei E' mit der dualen Norm versehen wird, im allgemeinen größer als E . Dies ist z.B. der Fall, wenn $E = \ell^1(\mathbb{N})$ der Raum der absolut summierbaren Folgen ist.

Definition A.1.10 (Beschränkte Mengen). Sei E ein lokal-konvexer Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subseteq E$ heißt *beschränkt*, falls

$$\sup p(B) < \infty$$

für jede stetige Halbnorm p auf E .

Proposition A.1.11 (Banach-Alaoglu). *Sei E ein lokal-konvexer Vektorraum und $B \subseteq E$ beschränkt. Dann ist B relativ kompakt in der schwachen Topologie auf E . Analog gilt: Ist $B' \subseteq E'$ beschränkt in einer Topologie, die feiner als die schwach*-Topologie ist, so ist B' relativ kompakt in der schwach*-Topologie.*

Beweis. Das Bild von B in $\prod_{\mu \in E'} \mathbb{C}$ unter der Abbildung aus Bemerkung A.1.7 ist enthalten in $K := \prod_{\mu \in E'} B_{r_\mu}(0)$ für gewisse $\infty > r_\mu > 0$, wobei

$$B_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| \leq r\}.$$

Nach dem Satz von Tychonov ist K kompakt. Analog argumentiert man in der dualen Situation. \square

Bemerkung A.1.12. Gemäß Korollar A.1.8 kann man die erste Aussage von Proposition A.1.11 aus der zweiten schließen.

Theorem A.1.13 (Eberlein-Šmulian). *Sei E ein Banachraum und $K \subseteq E$ eine Teilmenge, die bezüglich E_σ folgenkompakt ist. Dann ist K kompakt in E_σ .*

A.2 Satz von Stone-Weierstrass

Theorem A.2.1 (Stone-Weierstrass). *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $A \subseteq \mathcal{C}(X)$ eine unitale C^* -Unteralgebra. Falls A die Punkte von X trennt, d.h. zu $x, y \in X$, $x \neq y$, gibt es $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$, so ist $A = \mathcal{C}(X)$.*

Dies folgt leicht aus folgendem Satz (Übungen).

Proposition A.2.2. *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $A \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ eine abgeschlossene unitale Unteralgebra. Falls A die Punkte von X trennt, dann ist $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.*

Korollar A.2.3. *Sei X ein lokal-kompakter Hausdorffraum und $A \subseteq \mathcal{C}_0(X)$ eine C^* -Unteralgebra. Falls A die Punkte von X trennt und zudem für alle $x \in X$ ein $f \in A$ mit $f(x) \neq 0$ existiert, so ist $A = \mathcal{C}_0(X)$.*

Beweisskizze. Sei $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von X . Dann ist $\tilde{A} \subseteq \mathcal{C}(\tilde{X})$ eine C^* -Unteralgebra. Die Unteralgebra A (bzw. $\mathcal{C}_0(X)$) ist hierin identifiziert als die Menge der $f \in \tilde{A}$ (bzw. $f \in \mathcal{C}(\tilde{X})$) mit $f(\infty) = 0$. Nach der Voraussetzung trennt \tilde{A} die Punkte von \tilde{X} , so dass $\tilde{A} = \mathcal{C}(\tilde{X})$ nach Theorem A.2.1. Die Behauptung folgt. \square

A.3 Banach- und Hilberträume

Theorem A.3.1 (Darstellungssatz von Riesz). *Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum. Die antilineare Abbildung*

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}' : \psi \longmapsto \langle \psi | := (\phi \longmapsto \langle \psi | \phi \rangle)$$

ist ein isometrischer Antiisomorphismus.

Theorem A.3.2 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit). Sei (T_λ) ein Netz in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $T\psi = \lim_\lambda T_\lambda\psi$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$. Dann ist $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Proposition A.3.3 (Lemma von Riesz). Sei E ein normierter Raum, $F \subseteq E$ ein abgeschlossener Untervektorraum und $0 < \varepsilon < 1$. Dann gibt es ein $v \in E$ mit $\|v\| = 1$ und $\text{dist}(v, F) > \varepsilon$.

Beweis. Sei $u \notin F$ und $r := \text{dist}(u, F) > 0$. Sei $\delta > 0$, so dass $r > (r + \delta)\varepsilon$. Es gibt ein $x \in F$ mit $\|x - u\| < r + \delta$. Sei $v := \|x - u\|^{-1}(x - u)$, so dass $\|v\| = 1$. Es folgt

$$\text{dist}(v, F) = \|x - u\|^{-1} \text{dist}(u, F) = \frac{r}{r + \delta} > \varepsilon,$$

also die Behauptung. □

Korollar A.3.4. Sei E ein normierter Raum, dessen Einheitskugel kompakt ist. Dann ist E endlich-dimensional.

Beweis. Sei E unendlich-dimensional und $0 < \alpha < 1$. Per Induktion konstruiert man mit Proposition A.3.3 (v_n) , $\|v_n\| = 1$, so dass $\text{dist}(x_n, \langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle) > \alpha$. Da (v_n) keine konvergente Teilfolge enthält, folgt, dass die Einheitskugel von E nicht kompakt ist. □

Theorem A.3.5 (Spektralsatz für kompakte Operatoren). Sei x ein kompakter Operator auf einem Hilbertraum \mathcal{H} . Dann sind alle $\lambda \in \sigma(x)$, $\lambda \neq 0$, Eigenwerte mit endlicher Multiplizität. Das Spektrum $\sigma(x)$ ist abzählbar und 0 ist der einzig mögliche Häufungspunkt. Ist \mathcal{H} unendlich-dimensional, so ist $0 \in \sigma(x)$.

Proposition A.3.6. Sei K ein kompakter Operator auf \mathcal{H} . Dann ist K vollständig stetig (Englisch: completely continuous), d.h. ist (ψ_n) eine schwach konvergente Folge in \mathcal{H} , so ist $(K\psi_n)$ in Norm konvergent.

Beweis. Es gelte $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n$ schwach in \mathcal{H} . Dann ist (ψ_n) beschränkt, also $(K\psi_n)$ relativ kompakt. Aufgrund der Kompaktheit reicht es zu zeigen, dass jede konvergente Teilfolge von $(K\psi_n)$ den gleichen Grenzwert besitzt. Ist $(K\psi_{n_k})$ eine konvergente Teilfolge, so ist für alle $\zeta \in \mathcal{H}$

$$\left\langle \zeta \left| \lim_{k \rightarrow \infty} K\psi_{n_k} \right. \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle K^* \zeta | \psi_{n_k} \rangle = \langle K^* \zeta | \psi \rangle = \langle \zeta | K\psi \rangle,$$

d.h. der Grenzwert der Teilfolge ist $K\psi$. □

Theorem A.3.7 (Parseval-Gleichung). Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum. Dann besitzt \mathcal{H} eine Hilbertbasis, d.h. eine paarweise orthogonale Menge B von Einheitsvektoren, so dass $\langle B \rangle_{\mathbb{C}}$ dicht ist. Ist B eine Hilbertbasis, so gilt für jedes $\xi \in \mathcal{H}$

$$\xi = \sum_{\eta \in B} \langle \eta | \xi \rangle \eta,$$

in dem Sinne, dass das Netz $(\sum_{\eta \in \lambda} \langle \eta | \xi \rangle \eta)$, indiziert über die Menge

$$\Lambda = \{ \lambda \subseteq B \mid \#\lambda < \infty \}$$

der endlichen Teilmengen von B , gerichtet vermöge Inklusion, in \mathcal{H} gegen ξ konvergiert.

Stichwortverzeichnis

- Absolutbetrag, 16
- AF-Algebra, 54
- *-Algebra, 5

- B*-Algebra, 39
- Banach-*-Algebra, 5
- Banach-Algebra, 5
- Bikommutant, 31
- Bottabbildung, 101
- Bratteli-Diagramm, 54
 - erbliche Knotenmenge, 61
 - gerichtete Knotenmenge, 61

- C*-Algebra, 5
 - reelle, 39
 - von Erzeuger und Relationen definiert, 65
- CAR-Algebra, 54

- Darstellung
 - von Erzeugern und Relationen, 64
- *-Darstellung, 24
 - nicht ausgeartet, 24
- *-Darstellung
 - reduzibel, 39
 - reelle, 45
 - treu, 28
 - unitär äquivalent, 51

- Einhängung, 91
- erblich, 20
- Erwartung, 71
 - treu, 71
- Erzeuger, 64
- Exponentialabbildung, 103
- Extrempunkt, 37

- Fasteins, 18
- Fouriertransformation, 66
- freie *-Algebra, 64
- Funktionalkalkül
 - stetiger, 12

- Gelfand-Abbildung, 11
- Gelfand-Spektrum, 10
- gerichtete Menge, 18
- Grenzwert, 18
- Grothendieck-Gruppe, 85

- Halbnorm, 105
 - von Halbnormen erzeugte Topologie, 105
- Hardy-Raum, 67
- Hilbertbasis, 109
- homotop, 84
- Homotopie, 76, 84

- Idempotent, 76
 - ähnlich, 76
 - algebraisch äquivalent, 76
 - homotop, 76
 - orthogonal, 77
 - im Unendlichen
 - verschwinden, 6
- Indexabbildung, 94
- induktiver Limes, 54
- irrationale Rotationsalgebra, 70

- Kommutant, 31
- Konvergenz
 - von Netzen, 18

- lokal-konvexer Vektorraum, 105
 - beschränkte Teilmenge, 106
 - Dualraum, 105
- lokale Banachalgebra, 73
- lokale C*-Algebra, 73

- Matrix der partiellen Vielfachheiten, 53
- maximale Spektrum, 10
- *-Morphismus, 5

- Netz, 18

- nichtkommutatives *-Polynom, 64
- normal, 5

- operator-monoton fallend, 16
- operator-monoton wachsend, 16

- partielle Isometrie, 33
- positiv, 14
 - für B*-Algebren, 41
- positive Linearform, 22
- Projektion, 49
 - Murray-von Neumann-äquivalent, 76
 - unitär äquivalent, 76

- *-Relation, 64
- Resolvente, 7

- schwach*-Topologie, 105
- schwache Operatortopologie, 29
- schwache Topologie, 106
- selbstadjungiert, 5
- Shiftoperator, 66
 - einseitig, 66
- Spektralradius, 7
- Spektrum, 7
 - für B*-Algebren, 41
- Spur, 71
- stabil, 75
- stabil isomorph, 84
- stabil unital, 88
- Stabilisierung, 75
- stark stetig, 34
- starke Operatortopologie, 29
- Szegő-Projektion, 67

- Toeplitz-Erweiterung, 98
- Toeplitz-Operator, 67
- Toeplitzalgebra, 69
- trennend, 28

UHF-Algebra, 63

unitär, 5

universelle Einhüllende

C^* -Algebra, 66

vollständig stetig, 108

von Neumann-Algebra, 32

W^* -Algebra, 32

zulässig, 64

Zustand, 22

rein, 37

zyklischer Vektor, 24

Symbolverzeichnis

- ϕ^* , konjugierte Linearform, 27
 $q(a), q_A(a)$, Spektralradius von a in A , 7
 $\sigma(E, E')$, schwache Topologie auf E , 106
 $\sigma(E', E)$, schwach*-Topologie auf E' , 105
 $\sigma(a), \sigma_A(a)$, Spektrum von a in A , 7
 $\mathcal{C}_0(X, \tau_0)$, \mathbb{Z}_2 -äquivalente, stetige und im Unendlichen verschwindende Funktionen, 40
 E'_σ, E' mit der schwach*-Topologie, 105
 $\text{Idem}(A)$, Idempotente von A , 76
 M'' , Bikommutant von M , 31
 M' , Kommutant von M , 31
 $\text{Proj}(A)$, Projektionen von A , 76
 $S, S(A)$, Zustände von A , 27
 T_f , Toeplitz-Operator, 67
 \hat{A} , Gelfand-Spektrum von A , 10
 $|a|$, Absolutbetrag von a , 16
 $a \leq b$, Ordnung, definiert durch $b - a$ positiv, 14
 A_{sa} , Menge der selbstadjungierten Elemente, 14
 \tilde{A} , Unitalisierung von A , 6
 $\mathcal{C}_0(X)$, stetige Funktionen auf X , die im Unendlichen verschwinden, 6
 E_σ, E mit der schwachen Topologie, 106
 $f(a)$, Wert des stetigen Funktionalkalküls von a an f , 12
 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, kompakte Operatoren auf \mathcal{H} , 6
 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, beschränkte Operatoren auf \mathcal{H} , 6
 $R_a(z)$, Resolvente von a , 7
 $\text{Spec}_m(A)$, maximales Spektrum von A , 10

Verzeichnis der Definitionen

- *-Darstellungen von B^* -Algebren, 45
- beschränkte Mengen, 106
- Bottabbildung, 101
- Bratteli-Diagramm, 53
- C^* -Algebren, 5
- Einhängung, 91
- erbliche Kegel, 20
- Erwartungen, 71
- Erzeuger und Relationen, 64
- Fasteins, 18
- Funktorialität von $V(A)$, 84
- Gelfand-Spektrum, 10
- GNS-Konstruktion, 24
- Grothendieck-Gruppe, 85
- höhere K -Gruppen, 93
- irrationale Rotationsalgebra, 70
- irreduzible *-Darstellungen, 39
- Kommutanten, 31
- K_0 -Gruppe, 86
- K_1 -Gruppe, 90
- K_{00} -Gruppe, 85
- lokal-konvexe Vektorräume, 105
- lokale C^* -Algebren, 73
- Matrix der partiellen Vielfachheiten, 53
- maximales Spektrum, 9
- Monoidstruktur auf $V(A)$, 83
- Netze und Konvergenz, 18
- operator-monoton wachsende Funktionen, 16
- partielle Isometrien, 32
- positive Elemente, 14
- Projektionen, 49
- reelle C^* - und B^* -Algebren, 39
- reine Zustände, 37
- Spektra in B^* -Algebren, 40
- Spektrum und Spektralradius, 7
- Spuren, 71
- stark stetige Funktionen, 34
- starke und schwache Operatortopologie, 29
- stetiger Funktionalkalkül, 12
- Toeplitz-Erweiterung, 98
- unendliche Matrixalgebra, 75
- unitäre Äquivalenz von Darstellungen, 50
- verbindender Homomorphismus, 93
- von Neumann-Algebren, 32

Verzeichnis der Sätze

- Arens-Kaplansky, 41
- Banach-Alaoglu, 106
- Bott-Periodizität, 97
- Bratteli, 55
- Coburn, 69
- Darstellungssatz von Riesz,
107
- Eberlein-Šmulian, 107
- exakte Sechs-Term-Sequenz,
103
- Fukumiya, Kelley-Vaught, 14
- Gelfand-Naimark, 11
- Hahn-Banach, 106
- I. Segal, 20
- Ingelstam, 45
- Kadisons Transitivitätssatz,
36
- Kaplanskys Dichtesatz, 34
- Lemma von Riesz, 108
- Parseval-Gleichung, 108
- Polarzerlegung, 33
- Prinzip der gleichmäßigen
Beschränktheit, 108
- Spektralsatz für kompakte
Operatoren, 108
- Standard-Bild für K_0 , 87
- Stone-Weierstrass, 107
- von Neumanns Bikommutan-
tenttheorem,
31
- Wold-Zerlegung, 69

Verzeichnis der Beispiele und Bemerkungen

Darstellungen und positive
Linearformen, 24

schwach*-Topologie, 105
schwache Topologie, 105

Literatur

- [1] R. Arens. „Representation of $*$ -algebras“. In: *Duke Math. J.* 14 (1947), S. 269–282.
- [2] R. Arens und I. Kaplansky. „Topological representation of algebras“. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 63 (1948), S. 457–481.
- [3] M. Atiyah. „Bott periodicity and the index of elliptic operators“. In: *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 19 (1968), S. 113–140.
- [4] B. Blackadar. „Shape theory for C^* -algebras“. In: *Math. Scand.* 56.2 (1985), S. 249–275. DOI: 10.7146/math.scand.a-12100.
- [5] B. Blackadar. *K-Theory for Operator Algebras*. Second. Bd. 5. Mathematical Sciences Research Institute Publications. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [6] J. Cuntz. „K-theory for certain C^* -algebras. II“. In: *J. Operator Theory* 5.1 (1981), S. 101–108.
- [7] J. Cuntz. „K-theory and C^* -algebras“. In: *Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis (Bielefeld, 1982)*. Bd. 1046. Lecture Notes in Math. Berlin: Springer, 1984, S. 55–79. DOI: 10.1007/BFb0072018.
- [8] K. Davidson. *C^* -Algebras by Example*. Bd. 6. Fields Institute Monographs. Providence, RI: American Mathematical Society, 1996. DOI: 10.1090/fim/006.
- [9] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Bd. 10-I. Pure and Applied Mathematics. Enlarged and corrected printing. New York-London: Academic Press, 1969.
- [10] L. Ingelstam. „Real Banach algebras“. In: *Ark. Mat.* 5 (1964), S. 239–270.
- [11] R. Meise und D. Vogt. *Introduction to Functional Analysis*. Bd. 2. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Translated from the German by M. S. Ramanujan and revised by the authors. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1997.
- [12] G. Murphy. *C^* -Algebras and Operator Theory*. Boston, MA: Academic Press, Inc., 1990.

- [13] G. Pedersen. *C^* -Algebras and Their Automorphism Groups*. Bd. 14. London Mathematical Society Monographs. London-New York: Academic Press, Inc., 1979.
- [14] M. Rørdam, F. Larsen und N. Laustsen. *An introduction to K -theory for C^* -algebras*. Bd. 49. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [15] N. E. Wegge-Olsen. *K -theory and C^* -algebras*. Oxford Science Publications. New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 1993.