

**ÜBUNGEN ZU “C\*-ALGEBREN UND K-THEORIE”**  
**ÜBUNGSBLATT 9**  
**ABGABE: 19.12.2016**

VL: PD DR. A. ALLDRIDGE; ÜBUNGEN: CH. MAX, MSC, D. OSTERMAYR, MSC

**Aufgabe 1.** Es bezeichne  $C \subseteq [0, 1]$  die Cantor-Menge, (4 Punkte)

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n, \quad C_{n+1} := \frac{1}{3}C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\right), \quad C_1 := [0, 1].$$

(1) Zeige, dass  $\mathcal{C}(C)$  eine AF-Algebra ist.

(2) Finde einen injektiven \*-Morphismus  $\mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}(C)$  und zeige, dass  $\mathcal{C}([0, 1])$  keine AF-Algebra ist.

**Aufgabe 2.** Es sei  $\mathcal{H}$  ein separabler Hilbertraum und  $a : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  eine lineare Abbildung. Diese Abbildung erfüllt die kanonische Antikommutationsrelationen (CAR), falls für alle  $z, w \in \mathcal{H}$  folgendes gilt: (8 Punkte)

$$\begin{aligned} a(z)a(w) + a(z)a(w) &= 0 \\ a(z)^*a(w) + a(w)a(z)^* &= \langle z|w \rangle \end{aligned} \tag{i}$$

Sei im Folgenden eine solche Abbildung gegeben. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(1) Durch die Wahl einer Hilbertbasis  $(e_j)$  auf  $\mathcal{H}$  können die CAR (i) wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} a_k a_l + a_k a_l &= 0 \\ a_k^* a_l + a_l a_k^* &= \delta_{kl} \end{aligned} \tag{ii}$$

wobei  $a_j := a(e_j)$ . Für einen Einheitsvektor  $z \in \mathcal{H}$  ist der Operator  $a(z)$  eine partielle Isometrie und es gilt  $C^*(a(z)) \cong M_2(\mathbb{C})$ .

(2) Wenn  $\dim \mathcal{H} = n < \infty$  ist, ist  $a(\mathcal{H})$  \*-isomorph zu  $M_{2^n}(\mathbb{C})$ .

(3) Seien  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  separable Hilberträume und  $(a_l)$  und  $(b_k)$  abzählbare Folgen in  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$  und  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ , die (ii) erfüllen. Dann existiert ein eindeutiger \*-Isomorphismus

$$\pi : C^*(a_1, a_2, \dots) \rightarrow C^*(b_1, b_2, \dots),$$

s.d.  $\pi(a_k) = b_k \forall k \in \mathbb{N}$ .

(4) Seien nun  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  separable komplexe Hilberträume und

$$a : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), \quad b : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$$

lineare Abbildungen, die (i) erfüllen. Dann existiert zu jedem unitären  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  ein eindeutiger \*-Isomorphismus  $\alpha_U : C^*(a(\mathcal{H}_1)) \rightarrow C^*(b(\mathcal{H}_2))$ , so dass

$$\alpha_U(a(z)) = b(Ua(z)), \quad \forall z \in \mathcal{H}_1.$$

(5)  $C^*(a(\mathcal{H}))$  ist isomorph zur CAR-Algebra aus Beispiel 2.2.6.