ÜBUNGEN ZU "C*-ALGEBREN UND K-THEORIE"
ÜBUNGSBLATT 7
ABGABE: 5.12.2016

VL: PD DR. A. ALLDRIDGE; ÜBUNGEN: CH. MAX, MSC, D. OSTERMAYR, MSC

Aufgabe 1. Es sei A eine C*-Algebra und (4 Punkte)

$$B(A) := \{a \in A \,|\, \|a\| \leq 1\}\,.$$

Zeigen Sie:

(1) Wenn A unital ist, so ist 1 ein Extremalpunkt von $B(A)$.

(2) Ein Element $p \in A$ ist eine Projektion (d.h. $p = p^* = p^2$) genau dann, wenn p ein Extremalpunkt von $B(A)_+ = B(A) \cap A_+$ ist.

Aufgabe 2. (6 Punkte)

(1) Zeigen Sie: Die linearen Automorphismen auf $M_2(\mathbb{C})$ sind von der Form

$$\mathrm{Ad}_U : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}), \quad X \mapsto U^* X U \tag{1}$$

mit $U \in U_2(\mathbb{C})$ und die linearen Antiautomorphismen auf $M_2(\mathbb{C})$ sind unitär äquivalent zur Transposition, d.h. sie sind von der Form

$$\tau : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C}), \quad X \mapsto U^* X^t U \tag{2}$$

mit $U \in U_2(\mathbb{C})$.

(2) Zeigen Sie: Für einen involutiven linearen Antiautomorphismus der Form (2) gilt zusätzlich, dass U symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

(3) Seien τ_1, τ_2 involutive lineare Antiautomorphismen. Dann heißen τ_1 und τ_2 äquivalent ($\tau_1 \sim \tau_2$), falls ein $g \in U_2(\mathbb{C})$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}_g"] & M_2(\mathbb{C}) \arrow[d, "\mathrm{Ad}_g"] \\ M_2(\mathbb{C}) \arrow[r, "\tau_2"] & M_2(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

kommutativ ist. Zeigen Sie: Durch $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller involutiven linearen Antiautomorphismen wohldefiniert und sie spaltet diese in zwei Äquivalenzklassen.

(4) Seien τ_1, τ_2 zwei äquivalente lineare involutive Antiautomorpohismen. Zeigen Sie: Dann sind die zugehörigen reellen C*-Algebren unitär äquivalent.

(5) Zeigen Sie, dass die reellen C*-Algebren, deren Komplexifizierung $M_2(\mathbb{C})$ ist, sind bis auf unitäre Äquivalenz die reellen 2×2-Matrizen $M_2(\mathbb{R})$ und die Quaternionen $\mathbb{H}$.