ÜBUNGEN ZU "C*-ALGEBREN UND K-THEORIE"
ÜBUNGSBLATT 6
ABGABE: 28.11.2016

VL: PD DR. A. ALLDRIDGE; ÜBUNGEN: CH. MAX, MSC, D. OSTERMAYR, MSC

Aufgabe 1. Sei (X, μ) ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$. Sei $L^\infty(X, \mu)$ der Raum der (Äquivalenzklassen modulo f.ü. Gleichheit) wesentlich beschränkter μ-messbarer Funktionen und $L^2(X, \mu)$ der Hilbertraum der (Äquivalenzklassen…) quadratintegrierbaren Funktionen auf (X, μ). Man zeige: (6 Punkte)

(1) $L^\infty(X, \mu)$ ist eine Algebra bezüglich punktweiser Multiplikation und eine C^*-Algebra bezüglich $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

(2) $\pi\colon L^\infty(X, \mu) \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(X, \mu))$, $f \longmapsto L_f$, wobei $L_f(\psi) = f\psi$, definiert einen isometrischen $*$-Morphismus.

(3) Sei $T \in \pi(L^\infty(X, \mu))'$, dann gilt $T(1) \in L^\infty(X, \mu)$ und $||T(1)||_\infty \leq ||T||$, wobei 1 die konstante Funktion $X \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \longmapsto 1$, bezeichnet.

(4) $L^\infty(X, \mu)$ ist bezüglich π eine von Neumann-Algebra.

Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass $\pi(L^\infty(X, \mu))' = \pi(L^\infty(X, \mu))$. Man zeige dazu

$$T = L_{T(1)}, \quad \forall T \in \pi(L^\infty(X, \mu))'.$$

Aufgabe 2. Sei A eine kommutative C^*-Algebra und $\pi\colon A \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine irreduzible Darstellung. Man zeige, dass $\mathcal{H}$ eindimensional ist. (3 Punkte)

Hinweis: Aus Theorem 1.8.2 folgt $\pi(A)' = \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. (Es gibt aber auch andere Beweisvarianten.)

Aufgabe 3. Sei ϕ ein reiner Zustand der C^*-Algebra A. Man zeige $A/N_\phi = H_\phi$. Hierbei sind (3 Punkte)

$$N_\phi = \left\{a \in A \;\middle|\; \phi(a^*a) = 0\right\}$$

und H_ϕ wie in Konstruktion 1.6.3 im Skript.