# ÜBUNGEN ZU “C*-ALGEBREN UND K-THEORIE”
# ÜBUNGSBLATT 5
# ABGABE: 21.11.2016

VL: PD DR. A. ALLDRIDGE; ÜBUNGEN: CH. MAX, MSC, D. OSTERMAYR, MSC

**Aufgabe 1.** Sei $A$ eine C*-Algebra, $I$ ein abgeschlossenes Ideal in $A$ und $J$ ein abgeschlossenes Ideal in $I$. Zeigen Sie, dass $J$ dann auch ein Ideal in $A$ ist. (2 Punkte)

**Aufgabe 2.** Es sei $A$ eine C*-Algebra. Zeigen Sie folgende Aussagen. (4 Punkte)

(1) Für ein abgeschlossenes Linksideal $L$ in $A$ ist $B \coloneqq L \cap L^*$ eine erbliche C*-Unteralgebra von $A$ (d.h. $B_+$ ist ein erblicher Kegel).

(2) Für eine erbliche C*-Unteralgebra $B$ von $A$ ist

$$L(B) \coloneqq \left\{ a \in A \,\middle|\, a^* a \in B \right\}$$

ein abgeschlossenes Linksideal.

(3) Die Abbildung $\phi : L \longmapsto L \cap L^*$ ist eine Bijektion von der Menge aller abgeschlossenen Linksideale in $A$ auf die Menge aller erblichen C*-Unteralgebren von $A$ mit Umkehrung $\phi^{-1} : B \longmapsto L(B)$.

**Aufgabe 3.** Sei $\phi$ eine positive Linearform auf einer C*-Algebra $A$ und $\left(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \psi_\phi\right)$ die zugehörige Darstellung aus der GNS-Konstruktion. Zeigen Sie, dass für jede positive Linearform $\psi \leqslant \phi$ (d.h. $(\phi - \psi)(A_+) \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 0}$) ein eindeutiges Element $a \in \pi_\phi(A)'$ mit $0 \leqslant a \leqslant 1$ existiert, so dass (4 Punkte)

$$\psi(x) = \left\langle \psi_\phi \,\middle|\, \pi_\phi(x) a \psi_\phi \right\rangle \quad \forall x \in A.$$