ÜBUNGEN ZU "C*-ALGEBREN UND K-THEORIE"
ÜBUNGSBLATT 14
ABGABE: 6.2.2017

VL: PD DR. A. ALLDRIDGE; ÜBUNGEN: CH. MAX, MSC, D. OSTERMAYR, MSC

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie die folgende Isomorphismen abelscher Gruppen und bestimmen Sie Repräsentanten für die Erzeuger:

(i) $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$, $K_1(\mathbb{C}) = 0$.

(ii) $K_0(\mathbb{C}^+) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $K_1(\mathbb{C}^+) = 0$.

(iii) $K_0(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) \cong \mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) \cong \mathbb{Z}$.

(b) Sei $f_n : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $f_n(z) = z^n$, und $f_n^\sharp : \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ der induzierte Morphismus $f_n^\sharp(g) = g \circ f_n$. Man berechne $(f_n^\sharp)_*$ auf $K_i(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$ $(i \in \{0, 1\})$.

Aufgabe 2. Sei A eine unitale C*-Algebra. Man zeige: (6 Punkte)

(a) Für $n \geqslant 1$ induzieren die Abbildungen

$$\iota_n : A \longrightarrow M_n(A),\ a \longmapsto \mathrm{diag}(a, 0_{n-1})$$
$$\varepsilon_n : A \longrightarrow M_n(A),\ a \longmapsto \mathrm{diag}(a, 1_{n-1})$$

einen Isomorphismus auf K_0 bzw. auf K_1.

(b) Für jedes $x \in K_0(A)$ gibt es ein $n \geqslant 1$ und einen unitalen $*$-Morphismus $\psi : \mathbb{C}^+ \to M_n(A)$, so dass x im Bild der folgenden Abbildung liegt:

$$((\iota_n)_*)^{-1} \circ \psi_* : K_0(\mathbb{C}^+) \longrightarrow K_0(A).$$

(c) Für jedes Element $x \in K_1(A)$ gibt es ein $n \geqslant 1$ und einen unitalen $*$-Morphismus $\psi : \mathcal{C}(\mathbb{S}^1) \longrightarrow M_n(A)$, so dass x im Bild der folgenden Abbildung liegt:

$$((\varepsilon_n)_*)^{-1} \circ \psi_* : K_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow K_1(A).$$

Aufgabe 3. Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$. Eine natürliche Transformation $F : K_{\varepsilon_1} \longrightarrow K_{\varepsilon_2}$ (4 Punkte) besteht aus einer Familie von Gruppenhomomorphismen

$$F_A : K_{\varepsilon_1}(A) \longrightarrow K_{\varepsilon_2}(A),$$

für jede unitale C*-Algebra A, so dass für jeden unitalen $*$-Morphismus $\psi : A \longrightarrow B$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
K_{\varepsilon_1}(A) \arrow[r, "F_A"] \arrow[d, "\psi_*"'] & K_{\varepsilon_2}(A) \arrow[d, "\psi_*"] \\
K_{\varepsilon_1}(B) \arrow[r, "F_B"'] & K_{\varepsilon_2}(B)
\end{tikzcd}$$

Man zeige die folgenden Aussagen:

(a) Ist $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| = 1$, so ist $F_A = 0$ für alle A.

(b) Ist $|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| = 0$, so gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass $F_A(x) = k \cdot x$ für jede unitale C^*-Algebra A und jedes $x \in K_{\varepsilon_1}(A)$.

(c) Bis auf Multiplikation mit ± 1 gibt es höchstens einen natürlichen Isomorphismus $K_0 \longrightarrow K_2$. Dabei ist ein natürlicher Isomorphismus eine natürliche Transformation F, so dass alle F_A Gruppenisomorphismen sind.

Hinweis: Man benutze Aufgabe 2, um die Aussage auf $K_0(\mathbb{C}^+)$ und $K_1(\mathcal{C}(\mathbb{S}^1))$ zurückzuführen.