# ÜBUNGEN ZU "C*-ALGEBREN UND K-THEORIE"
# ÜBUNGSBLATT 13
# ABGABE: 30.1.2017

VL: PD DR. A. ALLDRIDGE; ÜBUNGEN: CH. MAX, MSC, D. OSTERMAYR, MSC

**Aufgabe 1.** Sei $X$ ein zusammenhängender, nicht-kompakter, lokal-kompakter Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass dann gilt $V(\mathcal{C}_0(X)) = 0$. (3 Punkte)

**Aufgabe 2.** Sei (4 Punkte)

$$A = \{ f \in \mathcal{C}([0,1], M_2(\mathbb{C})) \bigm| \exists\, x, y \in \mathbb{C} : f(0) = \operatorname{diag}(x, 0), f(1) = \operatorname{diag}(y, y) \},$$

als C*-Unteralgebra von $\mathcal{C}([0,1], M_2(\mathbb{C}))$. Berechnen Sie $A^+$ und zeigen Sie folgendes:

(1) $A$ enthält keine nicht-verschwindenden Projektionen.
(2) $M_2(A)$ enthält nicht-triviale Projektionen.
(3) Es gilt $V(A) \cong \mathbb{N}$ und

$$V(A^+) \cong \{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \mid m, n \geq 0, m+n \text{ gerade } \},$$

wobei die Monoidstruktur auf der letzteren Menge von $\mathbb{Z}^2$ induziert sei.

**Aufgabe 3.** Sei $A$ eine C*-Algebra und $\tau$ eine Spur auf $A$. Weiterhin sei die Abbildung $\tau_n : M_n(A) \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch (4 Punkte)

$$\tau_n(a) = \sum_{i=1}^{n} \tau(a_{ii}), \quad \forall a = (a_{ij}) \in M_n(A).$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(1) $\frac{1}{n}\tau_n$ ist eine Spur auf $M_n(A)$ und setzt sich eindeutig auf $A^+$ fort.
(2) $\tau$ induziert einen Homomorphismus $\tau_* : K_0(A) \to \mathbb{C}$ mit $\tau_*([p]-[q]) = \tau(p)-\tau(q)$ für alle $[p]-[q] \in K_0(A)$.

**Aufgabe 4.** Sei $J \subseteq A$ ein abgeschlossenes Ideal der C*-Algebra $A$, $j : J \longrightarrow A$ die Inklusion und $\varrho : A \to A/J$ die kanonische Projektion. Betrachten Sie die Sequenz (4 Punkte)

$$K_0(J) \xrightarrow{j_*} K_0(A) \xrightarrow{\varrho_*} K_0(A/J).$$

Zeigen Sie anhand von jeweils einem Beispiel, dass

(1) $j_*$ im allgemeinen nicht injektiv ist und
(2) $\varrho_*$ im allgemeinen nicht surjektiv ist.