ÜBUNGEN ZU “C*-ALGEBREN UND K-THEORIE”
ÜBUNGSBLATT 12
ABGABE: 23.1.2017

VL: PD DR. A. ALLDRIDGE; ÜBUNGEN: CH. MAX, MSC, D. OSTERMAYR, MSC

Aufgabe 1. Sei A eine lokale Banachalgebra, $e, f \in \mathrm{Idem}(\widehat{A})$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $e_0 \in \mathrm{Idem}(A)$ mit $\|e - e_0\| < \varepsilon$; falls weiter $e \sim_s f$, so gibt es ein $f_0 \in \mathrm{Idem}(A)$ mit $\|f - f_0\| < \varepsilon$ und $e_0 \sim_s f_0$. (3 Punkte)

Aufgabe 2. Sei A eine lokale C*-Algebra und seien $p, q \in A$ Projektionen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (4 Punkte)

(i) $p \leqslant q$;
(ii) $p \leqslant \lambda q$ für ein $\lambda > 0$;
(iii) $pq = qp = p$;
(iv) $q - p$ ist eine Projektion.

Aufgabe 3. Sei A eine unitale lokale Banachalgebra und seien $x, y \in A^\times$. Zeigen Sie: Es existiert in $\mathrm{GL}_2(A) = M_2(A)^\times$ ein stetiger Pfad von $\mathrm{diag}(xy, 1)$ zu $\mathrm{diag}(x, y)$; ist A eine lokale C*-Algebra und sind $x, y \in U(A)$, so kann man annehmen, dass der Pfad in $U_2(A)$ verläuft. (4 Punkte)

Aufgabe 4. Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Gegeben ein Hausdorffraum E, eine stetige Surjektion $p : E \longrightarrow X$ und eine $\mathbb{C}$-Vektorraumstruktur auf jeder Faser $E_x \coloneqq p^{-1}(\{x\}) \subseteq E$, so sagt man, dass E ein Vektorbündel auf X sei, falls es eine offene Überdeckung (U_i) von X und Homöomorphismen $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{C}^{r_i}$ gibt, so dass (a) $p = p_1 \circ \varphi_i$ auf $p^{-1}(U_i)$, (b) $p_2 \circ \varphi_i|_{E_x} : E_x \longrightarrow \mathbb{C}^{r_i}$ für alle $x \in U_i$ linear ist, sowie (c) für $U_{ij} \coloneqq U_i \cap U_j \neq \emptyset$ gilt $r = r_i = r_j$ und eine stetige Abbildung $g_{ij} : U_{ij} \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ existiert, so dass (6 Punkte)

$$\varphi_j^{-1}(x, g_{ij}(x)v) = \varphi_i^{-1}(x, v), \quad \forall x \in U_{ij}, v \in \mathbb{C}^r.$$

Der Schnittmodul von E ist die Menge

$$\Gamma(X, E) \coloneqq \{ s : X \longrightarrow E \mid s \text{ stetig}, p \circ s = \mathrm{id}_X \}.$$

Dann ist $\Gamma(X, E)$ ein Modul über $A \coloneqq \mathcal{C}(X)$ vermöge

$$(s_1 + s_2)(x) \coloneqq s_1(x) + s_2(x), \quad (fs)(x) \coloneqq f(x)s(x) \quad \text{in } E_x,$$

für alle $s, s_1, s_2 \in \Gamma(X, E)$, $f \in A$, $x \in X$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Ist (E, p) ein Vektorbündel über A, so gibt es ein $e \in \mathrm{Idem}(M_n(A))$, so dass $\Gamma(X, E) \cong eA^n$ als A-Modul. Hierbei wirkt A auf dem zweiten Raum durch Rechtsmultiplikation. Hinweis: Mithilfe einer Teilung der Eins bette man E in ein triviales Vektorbündel $(X \times \mathbb{C}^n, p_1)$ ein.

(2) Für $e \in \mathrm{Idem}(M_n(A))$ ist

$$E \coloneqq \{ (x, v) \mid x \in X, v \in e(x)(\mathbb{C}^n) \} \subseteq X \times \mathbb{C}^n,$$

versehen mit der Relativtopologie, $p \coloneqq p_1|_E$ und der induzierten faserweisen Struktur, ein Vektorbündel auf X, dessen Schnittmodul genau eA^n ist.