ÜBUNGEN ZU "C*-ALGEBREN UND K-THEORIE"
ÜBUNGSBLATT 10
ABGABE: 9.1.2017

VL: PD DR. A. ALLDRIDGE; ÜBUNGEN: CH. MAX, MSC, D. OSTERMAYR, MSC

Aufgabe 1. Sei $(I, \leqslant)$ eine gerichtete Menge und $\big(A_\mu, \phi_{\mu\nu}\big)$ ein gerichtetes System von Algebren A_μ und Algebramorphismen $\phi_{\mu\nu} : A_\mu \longrightarrow A_\nu$ für $\mu \leqslant \nu$, d.h. (6 Punkte)

$$\phi_{\mu\lambda} = \phi_{\nu\lambda} \circ \phi_{\mu\nu}, \quad \forall \mu \leqslant \nu \leqslant \lambda.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Es existiert bis auf kanonischen Isomorphismus genau eine Algebra A (alternativ $\varinjlim_I A_\mu$), zusammen mit Algebramorphismen $j_\mu \colon A_\mu \longrightarrow A$ mit $j_\mu = j_\nu \circ \phi_{\mu\nu}$ für alle $\mu \leqslant \nu$, mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Algebra B und jede Familie von Algebramorphismen $f_\mu \colon A_\mu \longrightarrow B$ mit der Eigenschaft $f_\mu = f_\nu \circ \phi_{\mu\nu}$ für alle $\mu \leqslant \nu$ existiert genau ein Algebramorphismus $f \colon A \longrightarrow B$ mit $f \circ j_\mu = f_\mu$ für alle μ.
In diesem Fall heißt A der *(algebraische) induktive Limes* der A_μ.
Hinweis: Man definiere eine geeignete Äquivalenzrelation $(\mu, a_\mu) \sim (\nu, a_\nu)$ auf der disjunkten Vereinigung $\bigcup_{\mu \in I} A_\mu$.
(2) Seien nun A_μ Banachalgebren und $\phi_{\mu\nu}$, wobei

$$\limsup_{\nu \geqslant \mu} \|\phi_{\mu\nu}(a)\|_{A_\nu} < \infty$$

für alle $\mu \in I$ und alle $a \in A_\mu$ gelte. Dann existiert bis auf kanonischen Isomorphismus genau eine Banachalgebra A (alternativ $\varinjlim_I A_\mu$), zusammen mit Morphismen von Banachalgebren (d.h. beschränkten Algebramorphismen) $j_\mu \colon A_\mu \longrightarrow A$ mit $j_\mu = j_\nu \circ \phi_{\mu\nu}$ für alle $\mu \leqslant \nu$, mit der folgenden Eigenschaft: Für jede Banachalgebra B und jede Familie von Morphismen $f_\mu \colon A_\mu \longrightarrow B$ mit der Eigenschaft $f_\mu = f_\nu \circ \phi_{\mu\nu}$ für alle $\mu \leqslant \nu$ und $||f_\mu|| \leq C$ für eine Konstante $C \geq 0$ und alle μ existiert genau ein Banachalgebramorphismus $f \colon A \longrightarrow B$ mit $f \circ j_\mu = f_\mu$ für alle μ.
In diesem Fall heißt A der *Banachalgebra-induktive Limes* der A_μ.
Hinweis: Man benutze, dass $\limsup_{\nu \geqslant \mu} ||\phi_{\mu\nu}(a)||_{A_\nu}$ auf dem algebraischen induktiven Limes eine Halbnorm $\|\cdot\|'_A$ induziert.
(3) Sind die A_μ in (2) C*-Algebren und sind die $\phi_{\mu\nu}$ $*$-Morphismen, so ist die Banachalgebra A aus (2) eine C*-Algebra.
(4) Sind alle Morphismen $\phi_{\mu\nu}$ in (2) Isometrien, so ist die Halbnorm $\|\cdot\|'_A$ aus (2) eine Norm und der Banachalgebra-induktive Limes ist die Vervollständigung des algebraischen induktives Limes aus (1) bezüglich dieser Norm.

Aufgabe 2. Sei (A_ℓ, ϕ_ℓ) eine Folge von C*-Algebren A_ℓ zusammen mit $*$-Morphismen $\phi_\ell : A_\ell \longrightarrow A_{\ell+1}$. Zeigen Sie, dass eine Folge (B_m, ψ_m) von C*-Algebren B_m und injektiven $*$-Morphismen $\psi_m : B_m \longrightarrow B_{m+1}$ existiert, so dass (4 Punkte)

$$\varinjlim_{\mathbb{N}} A_\ell \cong \varinjlim_{\mathbb{N}} B_\ell.$$

(6 Punkte) **Aufgabe 3.** Eine Derivation auf einer C*-Algebra A ist eine beschränkte lineare Abbildung $\delta : A \longrightarrow A$ mit der Eigenschaft

$$\delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \quad \forall a, b \in A.$$

Eine Derivation heißt *innere Derivation*, wenn ein $x \in A$ existiert, so dass

$$\delta(a) = \delta_x(a) := [x, a] = xa - ax, \quad \forall a \in A$$

gilt. Eine Derivation, die der punktweise Limes innerer Derivationen ist, wird *fast-innere Derivation* genannt. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(1) Jede Derivation auf einer endlich-dimensionalen C*-Algebra ist eine innere Derivation.

Hinweis: Betrachten Sie eine endliche Gruppe von unitären Elementen aus A, die zusammen A aufspannen.

(2) Jede Derivation auf einer AF-Algebra A ist eine fast-innere Derivation.

(3) Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, so ist jede Derivation auf $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ der Form δ_x für ein $x \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(5 Punkte) **Aufgabe 4.**

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1)$ $*$-isomorph zu der durch den Erzeuger x und die Relationen

$$x^*x = 1, \quad xx^* = 1$$

definierten C*-Algebra ist.

(2) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}_0((0, 1])$ $*$-isomorph zu der durch den Erzeuger x und die Relationen

$$x = x^*, \quad \|x\| \leqslant 1, \quad \|1 - x\| \leqslant 1$$

definierten C*-Algebra ist.

(3) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}([0, 1])$ $*$-isomorph zu der durch die Erzeuger $1, x$ und die Relationen

$$x = x^*, \quad \|x\| \leqslant 1, \quad \|1 - x\| \leqslant 1, \quad x1 = 1x = x, \quad 1 = 1^* = 1^2$$

definierten C*-Algebra ist.

Wir wünschen Ihnen ein schönes Weihnachtsfest und ein gutes neues Jahr 2017!