ÜBUNGEN ZU “C^*-ALGEBREN UND K-THEORIE”
ÜBUNGSBLATT 1
ABGABE: 24.10.2016

VL: PD DR. A. ALLDRIDGE; ÜBUNGEN: CH. MAX, MSC, D. OSTERMAYR, MSC

Aufgabe 1. (4 Punkte)
a) Sei A eine unitale Banach-Algebra und $a \in A$ mit $0 \leqslant \|a\| < 1$. Man zeige, dass die Summe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k$$

absolut konvergiert und

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = (1-a)^{-1}.$$

b) Sei A eine unitale C^*-Algebra. Zeigen Sie für $a \in A$ mit $0 \leqslant \|a\| < 1$:

$$a(1-a^*a)^{-1} = (1-aa^*)^{-1}a$$

c) Beweisen Sie Lemma 1.1.12 aus der Vorlesung:
Sei A eine unitale Banach-$*$-Algebra oder eine nicht notwendig unitale C*-Algebra. Es gilt

$$\|\chi\| \leqslant 1, \quad \forall \chi \in \mathrm{Spec}_{\mathfrak{m}}(A).$$

Aufgabe 2. Es sei A eine unitale Algebra. (4 Punkte)
a) Zeigen Sie

$$\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\} \quad \forall\, a, b \in A.$$

Beweisen Sie dazu zunächst für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(ba)$:

$$\big(a(ba-\lambda)^{-1}b - 1\big)\big(ab-\lambda\big) = \lambda$$

b) Zeigen Sie für invertierbares $a \in A$:

$$\lambda \in \sigma(a) \iff 1/\lambda \in \sigma\big(a^{-1}\big)$$