

Eichfeldtheorie

Alexander Aldridge

13. Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Prinzipalbündel	5
1.1	Faserbündel	5
1.2	Prinzipalbündel	9
1.3	Assoziierte Bündel	12
1.4	Reduktionen der Strukturgruppe	17
2	Zusammenhänge in Prinzipalbündeln	23
2.1	Zusammenhänge und Atiyah-Sequenz	23
2.2	Der Raum aller Zusammenhänge	31
2.3	Paralleltransport	33
2.4	Krümmung	35
2.5	Eichtransformationen	38
2.6	U(1)-Prinzipalzusammenhänge	40
3	Chern-Weil-Theorie	45
3.1	Der Chern-Weil-Homomorphismus	45
3.2	Chern-Klassen	50
3.3	Pontryagin-Klassen	55
4	Yang-Mills-Instantonen	57
4.1	Die Yang-Mills-Gleichung	57
4.2	Der Modulraum selbstdualer Zusammenhänge	62
4.3	Die ADHM-Konstruktion von Instantonen	66
A	Liegruppen	71
A.1	Liegruppen und Liealgebren	71
A.2	Quotienten, homogene Räume und Bahnen	74
B	Der Satz von Frobenius	77
B.1	Distributionen und Blätterungen	77

4

INHALTSVERZEICHNIS

Index

79

Literaturverzeichnis

81

Kapitel 1

Prinzipalbündel

1.1 Faserbündel

Definition 1.1.1 (Faserbündel). Sei $p : E \rightarrow B$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten E und B . Für eine offene Menge $U \subseteq B$ schreiben wir $E|_U := p^{-1}(U)$. Ein (glatter) Diffeomorphismus $\tau : E|_U \rightarrow U \times F$ (wobei F eine weitere Mannigfaltigkeit sei) heißt *lokale Trivialisierung* oder *Bündelkarte*, falls τ über B ist, das heißt, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E|_U & \xrightarrow{\tau} & U \times F \\ p \downarrow & \swarrow p_1 & \\ U & & \end{array}$$

Hierbei sei p_1 die erste Projektion. In diesem Fall gilt $E_x := p^{-1}(x) \cong F$ für alle $x \in U$ und F (bzw. seine Isomorphieklasse) heißt *Fasertyp* von (E, p, B) an $x \in U$.

Das Tripel (E, p, B) heißt *Faserbündel* (mit *Totalraum* E und *Basis* B), falls B eine Überdeckung durch offene Mengen U besitzt, so dass es eine auf $E|_U$ definierte lokale Trivialisierung gibt.

Seien (E, p, B) und (E', p', B) Faserbündel. Eine Abbildung $\varphi : E \rightarrow E'$ heißt *Bündelmorphismus*, falls er über B liegt, d.h., dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & E' \\ p \searrow & & \downarrow p' \\ & & B \end{array}$$

Die Faserbündel bilden mit den Bündelmorphismen eine Kategorie. Insbesondere sind Faserbündel (E, p, B) und (E', p', B) *isomorph* genau dann, wenn es einen Diffeomorphismus $\varphi : E \rightarrow E'$ gibt, der ein Bündelmorphismus ist.

Bemerkung 1.1.2. Verkürzend sagt man oft, $E \rightarrow B$, E/B oder E sei ein Faserbündel, wenn man (E, p, B) meint. Man schreibt oft $F \rightarrow E \rightarrow M$, wenn man meint, (E, p, B) sei ein Faserbündel vom Fasertyp F . Der Fasertyp von $x \in B$ ist lokal konstant.

Beispiel 1.1.3. Seien B und F Mannigfaltigkeiten. Dann ist $p_1 : M \times F \rightarrow B$ ein Faserbündel vom Fasertyp F , das *triviale Bündel*. Jedes hierzu isomorphe Faserbündel heißt ebenfalls trivial.

Beispiel 1.1.4. Ist $p : E \rightarrow B$ eine Überlagerung, so ist (E, p, B) ein Faserbündel, dessen Fasertyp auf einer gegebenen Zusammenhangskomponente die jeweilige Decktransformationsgruppe mit der diskreten Topologie ist.

Beispiel 1.1.5. Ist B eine Mannigfaltigkeit von reiner Dimension n , so ist der Totalraum des Tangentialbündels TB ein Faserbündel vom Fasertyp \mathbb{R}^n .

Beispiel 1.1.6. Die Gruppe \mathbb{Z} wirke auf $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ durch

$$(x, y) \cdot n = (x + n, (-1)^n y).$$

Der Quotient ist das Möbiusband M . Die durch $(x, y) \mapsto x$ induzierte Abbildung $M \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$ ist ein Faserbündel mit Fasertyp $(-1, 1)$.

Beispiel 1.1.7. Sei Γ die von den Diffeomorphismen $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\sigma_1(x, y) := (x + 1, -y), \quad \sigma_2(x, y) := (x, y + 1)$$

erzeugte Untergruppe von $\text{Diff}(\mathbb{R}^2)$. Der Quotient $K := \mathbb{R}^2/\Gamma$ ist die Kleinsche Flasche. Die Abbildung $(x, y) \mapsto x$ induziert die Projektion $p : K \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$ eines Faserbündels mit Fasertyp \mathbb{S}^1 .

Konstruktion 1.1.8 (Bündelatlas und Cozyklen). Sei (E, p, B) ein Faserbündel vom Fasertyp F und (U_i) eine offene Überdeckung von B mit lokalen Trivialisierungen $\tau_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times F$. Dies nennt man einen *Bündelatlas*.

Sei $U_{ij} := U_i \cap U_j$. Dann gilt

$$((\tau_i|_{U_{ij}}) \circ (\tau_j|_{U_{ij}})^{-1})(b, f) = (b, \tau_{ij}(b)(f)) \quad (1.1.1)$$

für gewisse Diffeomorphismen $\tau_{ij}(b) : F \rightarrow F$, $b \in U_{ij}$. Die Abbildungen

$$\tau_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{Diff}(F)$$

sind derart, dass $\tau_{ij}(b)(f)$ glatt von (b, f) abhängt und die *Cozykelbedingung*

$$\tau_{ij}(b)\tau_{jk}(b) = \tau_{ik}(b), \quad \tau_{ii}(b) = \text{id}_F \quad (1.1.2)$$

für alle $b \in U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k$ bzw. alle $b \in U_i$ erfüllt ist.

Proposition 1.1.9 (Faserbündel und Cozyklen). *Seien B und F Mannigfaltigkeiten. Sei (U_i) eine offene Überdeckung von B und seien $\tau_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{Diff}(F)$ Abbildungen, so dass $\tau_{ij}(b)(f)$ glatt von (b, f) abhängt und Gleichung (1.1.2) für alle i, j und alle $b \in U_{ij}$ erfüllt sei.*

(i) *Es existiert ein Faserbündel $p : E \rightarrow B$ mit Bündelatlant $(\tau_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times F)$, so dass Gleichung (1.1.1) gilt.*

(ii) *Ist $p' : E' \rightarrow B$ ein Faserbündel und sind $\varphi_i : U_i \times F \rightarrow E'|_{U_i}$ Bündelmorphismen, so dass*

$$\varphi_i(b, \varphi_{ij}(b)(f)) = \varphi_j(b, f)$$

für alle $b \in U_{ij}$, $f \in F$, so gibt es genau einen Bündelmorphismus $\varphi : E \rightarrow E'$, so dass $\varphi_i \circ \tau_i = \varphi$ auf $E|_{U_i}$, für alle i .

(iii) *Insbesondere ist (E, p, B) eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus und ein Cozykel (τ'_{ij}) mit gleicher Faser auf der gleichen Überdeckung gibt Anlass zu einem isomorphen Bündel genau dann, wenn es Abbildungen $\sigma_i : U_i \rightarrow \text{Diff}(F)$ gibt, so dass $\sigma_i(b)(f)$ glatt von (b, f) abhängt und die folgende Gleichung:*

$$\tau_{ij}(b)\sigma_j(b) = \sigma_i(b)\tau'_{ij}(b) \quad (1.1.3)$$

für alle $b \in U_{ij}$, i, j gilt.

Beweis. (i). Man definiert den topologischen Raum

$$E := \coprod_i U_i \times F / \sim,$$

wobei die Äquivalenzrelation \sim definiert ist durch

$$b = b' \in U_{ij}, \quad f = \tau_{ij}(b')(f')$$

für alle $(b, f) \in U_i \times F$ und $(b', f') \in U_j \times F$. Die Projektion $p : E \rightarrow B$ ist induziert durch die Abbildung, die $(b, f) \in U_i \times F$ auf b abbildet. Man zeigt leicht, dass E Hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Die lokalen Trivialisierungen $\tau_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times F$ sind induziert von

der Identität des Raums $U_i \times F$. Es gilt Gleichung (1.1.1), und es folgt, dass die τ_i einen glatten Atlas definieren. Also ist E eine Mannigfaltigkeit und sogar ein Faserbündel.

(ii). Dies ist offensichtlich.

(iii). Dies Eindeutigkeitsaussage folgt aus (ii). Sei (τ'_{ij}) ein Cozykel mit induziertem Faserbündel (E', p, M) und Bündelatlas (τ'_i) . Sei $\varphi : E \rightarrow E'$ ein Bündelisomorphismus. Sei $\sigma_i : U_i \rightarrow \text{Diff}(F)$ definiert durch

$$(\tau_i'^{-1} \circ \varphi \circ \tau_i)(b, f) = (b, \sigma_i(b)(f)).$$

Dann folgt Gleichung (1.1.3) aus Gleichung (1.1.1). Die umgekehrte Implikation folgt mit Hilfe von Teil (ii). \square

Korollar 1.1.10 (Pullback-Faserbündel). *Sei (E, p, B) ein Faserbündel vom Fasertyp F und $\psi : B' \rightarrow B$ eine glatte Abbildung. Dann ist*

$$\psi^*E := \{(b, e) \in B' \times E \mid \psi(b) = p(e)\}$$

mit ein Faserbündel vom Fasertyp F mit der Projektion $(b, e) \mapsto b$.

Beweis. Sei (τ_{ij}) ein Cozykel zu einem Bündelatlas von E . Dann ist $(\tau_{ij} \circ \psi)$ ein Cozykel auf B' , dessen induziertes Bündel (nach Proposition 1.1.9) sich als Menge mit ψ^*E identifiziert (etwa mit Teil (ii), *loc. cit.*). \square

Gelegentlich wird es nützlich sein, die Existenz globaler Schnitte von Faserbündeln abstrakt zu beweisen. Hierzu ist folgendes Kriterium hilfreich.

Proposition 1.1.11. *Sei E ein Faserbündel vom Fasertyp \mathbb{R}^N , $A \subseteq B$ abgeschlossen und s_0 ein auf A definierter lokaler Schnitt. Dann besitzt E einen globalen Schnitt s , so dass $s|_A = s_0|_A$. Indem man $A = \emptyset$ betrachtet, folgt insbesondere, dass E einen globalen Schnitt besitzt.*

Beweis. Sei $(U_n)_{n \geq 1}$ eine abzählbare Überdeckung von B mit $\overline{U_n} \subseteq V_n$, wobei $V_n \subseteq B$ offen sei mit Bündelkarten $\tau_n : E|_{V_n} \rightarrow V_n \times \mathbb{R}^n$. Setze

$$A_0 := A, \quad A_n := \overline{U_n} \cup A_{n-1}, \quad C_n := \overline{U_n} \cap A_{n-1}.$$

Angenommen $n \geq 1$ und für $j < n$ gebe es lokale Schnitte s_j auf A_j , so dass $s_j|_{A_{j-1}} = s_{j-1}$. Definiere

$$h := p_2 \circ \tau_n \circ s_{n-1}|_{C_n} : C_n \rightarrow \mathbb{R}^N.$$

Da C_n und $\overline{U_n}$ abgeschlossen in B sind, gibt es eine glatte Abbildung $h' : \overline{U_n} \rightarrow \mathbb{R}^N$, so dass $h'|_{C_n} = h|_{C_n}$ ist. Definiere

$$s_n := \begin{cases} \tau_n^{-1} \circ (\text{id}, h'), & \text{auf } \overline{U_n}, \\ s_{n-1}, & \text{auf } A_{n-1}. \end{cases}$$

Dann ist s_n ein glatter lokaler Schnitt.

Induktiv haben wir nun bewiesen, dass die obige Aussage für alle n gilt. Wir können daher

$$s := s_n \quad \text{auf } A_n$$

definieren. Dies ist wohldefiniert und gibt einen glatten Schnitt. \square

Bemerkung 1.1.12. Allgemeiner kann man als Fasertyp in Proposition 1.1.11 jede Mannigfaltigkeit F nehmen, die eine Einbettung in \mathbb{R}^N mit einer Retraktion $\mathbb{R}^N \rightarrow F$ besitzt.

1.2 Prinzipalbündel

Definition 1.2.1 (Prinzipalbündel). Sei $a : P \times G \rightarrow P$ eine Rechtswirkung der Liegruppe G und $p : P \rightarrow B$ eine G -invariante glatte Abbildung. Dann heißt (P, p, B, a, G) ein G -Prinzipalbündel, falls es einen Bündelatlas aus G -äquivalenten lokalen Trivialisierungen $\tau_i : P|_{U_i} \rightarrow U_i \times G$ gibt, d.h.

$$\tau_i(p \cdot g) = \tau_i(p) \cdot g$$

für alle $p \in P|_{U_i}$, $g \in G$, wobei G auf $U_i \times G$ auf dem zweiten Faktor durch Rechtstranslationen wirke.

Ein Bündelmorphismus $\varphi : P \rightarrow P'$ heißt *Morphismus von G -Prinzipalbündeln*, falls er G -äquivalent ist.

Bemerkung 1.2.2.

(i) Wir sagen oft einfach, dass P ein G -Prinzipalbündel ist. Ist dies der Fall, so ist P ein Faserbündel vom Fasertyp G .

(ii) Ist auf P eine G -Rechtswirkung a gegeben, die eine surjektive Submersion $p : P \rightarrow B$ invariant lässt und einfach transitiv auf Fasern ist, so ist (P, p, B, a, G) ein G -Prinzipalbündel. Ist nämlich $s : U \rightarrow P$ ein lokaler Schnitt ($p \circ s = \text{id}_U$), so ist

$$\varphi : U \times G \rightarrow P|_U : (b, g) \mapsto s(b) \cdot g$$

eine G -äquivariante glatte Bijektion. Da φ in $T_b s$ transversal zu $T_{s(b)} P_b$ ist, ist φ lokal und folglich global umkehrbar, und es folgt, dass (P, p, B, a, G) ein G -Prinzipalbündel ist.

(iii) Ist $a : P \times G \rightarrow P$ eine freie, eigentliche Wirkung, so existiert $B := P/G$ und die kanonische Projektion $p : P \rightarrow B$ ist eine surjektive Submersion, vgl. Korollar A.2.4. Aus Teil (ii) folgt, dass (P, p, B, a, G) ein G -Prinzipalbündel ist.

(iv) Ist umgekehrt P ein G -Prinzipalbündel mit Basis B , so ist die G -Wirkung frei und eigentlich, da dies in den lokalen Trivialisierungen gilt. Weiterhin ist die von p induzierte Abbildung $P/G \rightarrow B$ ein Isomorphismus.

(v) Der Beweis von Teil (ii) zeigt auch, dass ein G -Prinzipalbündel genau dann trivial (also als G -Prinzipalbündel isomorph zu $B \times G$) ist, wenn es einen globalen Schnitt besitzt. Insbesondere ist jedes Prinzipalbündel für $G = (\mathbb{R}^N, +)$ trivial, vgl. Proposition 1.1.11.

(vi) Jeder Morphismus von G -Prinzipalbündeln (über der gleichen Basis) ist ein Isomorphismus.

Durch Spezialisierung erhalten wir aus Konstruktion 1.1.8 und Proposition 1.1.9 und deren Beweisen die folgenden Ergebnisse.

Konstruktion 1.2.3 (G -Cozyklen). Sei (P, p, B) ein G -Prinzipalbündel und $\tau_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times G$ ein Bündelatlas aus G -äquivarianten lokalen Trivialisierungen. Dann ist durch die Gleichung

$$((\tau_i|_{U_{ij}}) \circ (\tau_j|_{U_{ij}})^{-1})(b, g) = (b, g \cdot g_{ij}(b)) \quad (1.2.1)$$

für alle $b \in U_{ij}$ eine glatte Abbildung $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G$ definiert, für die die Cozykelbedingung

$$g_{ij}(b)g_{jk}(b) = g_{ik}(b), \quad g_{ii}(b) = 1_G \quad (1.2.2)$$

für alle $b \in U_{ijk}$ bzw. $b \in U_i$ gilt. Wir nennen solch eine Familie (g_{ij}) einen G -Cozykel.

Proposition 1.2.4 (Prinzipalbündel und G -Cozyklen). *Seien B eine Mannigfaltigkeit und G eine Liegruppe. Sei (U_i) eine offene Überdeckung von B und $(g_{ij} : U_{ij} \rightarrow G)$ ein G -Cozykel.*

(i) *Es existiert ein G -Prinzipalbündel $p : P \rightarrow B$ mit äquivariantem Bündelatlas $(\tau_i : P|_{U_i} \rightarrow U_i \times G)$, so dass Gleichung (1.2.1) gilt.*

(ii) Ist $p' : E' \rightarrow B$ ein G -Prinzipalbündel und sind $\varphi_i : U_i \times G \rightarrow P'|_{U_i}$ äquivariante Bündelmorphismen, so dass

$$\varphi_i(b, g \cdot g_{ij}(b)) = \varphi_j(b, g)$$

für alle $b \in U_{ij}$, $g \in G$, gilt, so gibt es genau einen Isomorphismus $\varphi : P \rightarrow P'$ von G -Prinzipalbündeln, so dass $\varphi_i \circ \tau_i = \varphi$ auf $P|_{U_i}$ ist, für alle i .

(iii) Insbesondere ist (P, p, B) eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus und ein Cozykel (g'_{ij}) mit gleicher Faser auf der gleichen Überdeckung gibt Anlass zu einem isomorphen Bündel genau dann, wenn es glatte Abbildungen $h_i : U_i \rightarrow G$ gibt, so dass die folgende Gleichung:

$$g_{ij}(b)h_j(b) = h_i(b)g'_{ij}(b) \quad (1.2.3)$$

für alle $b \in U_{ij}$, i, j gilt.

Korollar 1.2.5 (Pullback-Prinzipalbündel). Sei (P, π, B, a, G) ein G -Prinzipalbündel und $\psi : B' \rightarrow B$ eine glatte Abbildung. Dann ist

$$\psi^*E := \{(b, p) \in B' \times P \mid \psi(b) = \pi(p)\}$$

ein G -Prinzipalbündel mit der Projektion $(b, p) \mapsto b$.

Beispiel 1.2.6. Sei G eine Liegruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Aus Bemerkung 1.2.2 (iii) folgt, dass die kanonische Projektion $G \rightarrow G/H$ ein H -Prinzipalbündel ist.

Beispiel 1.2.7. Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n und $(\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n)$ ein Atlas. Das *Rahmenbündel* $\mathrm{GL}(M) \rightarrow M$ ist definiert durch den $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ -Cozykel

$$g_{ij} : U_{ij} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad g_{ij}(x) := D(\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(\varphi_i(x)).$$

Der Totalraum von $\mathrm{GL}(M)$ kann identifiziert werden mit

$$\{(x, v_1, \dots, v_n) \mid x \in M, \{v_1, \dots, v_n\} \text{ Basis von } M\}$$

mit der Projektion $(x, v_1, \dots) \mapsto x$.

Beispiel 1.2.8. Sei \mathbb{F} eine reelle Divisionalgebra (d.h. \mathbb{R} , \mathbb{C} , oder \mathbb{H}) und $k \leq n$. Die (reelle, komplexe, bzw. quaternionische) *Stiefelmannigfaltigkeit* ist

$$V_{k,n}(\mathbb{F}) := \{V \in \mathbb{F}^{n \times k} \mid V^*V = 1_k\}.$$

Sie trägt eine freie Rechtswirkung der Liegruppe

$$\mathbb{U}_k(\mathbb{F}) := \{g \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{F}) \mid g^*g = 1_k\}$$

d.h. der orthogonalen, unitären, bzw. unitär-symplektischen Gruppe. Da diese Gruppe kompakt ist, ist die Wirkung eigentlich. Die $V \in V_{k,n}(\mathbb{F})$ sind gerade die isometrischen Einbettungen

$$\mathbb{F}^k \longrightarrow \mathbb{F}^n.$$

Folglich ist $V_{k,n}/U_n(\mathbb{K})$ isomorph zur (reellen, komplexen, bzw. quaternionischen) *Graßmann-Mannigfaltigkeit*

$$G_{k,n}(\mathbb{F}) := \{V \subseteq \mathbb{F}^n \mid V \text{ } k\text{-dimensionaler } \mathbb{F}\text{-Rechtsunterraum}\}.$$

Man erhält $\mathbb{U}_k(\mathbb{F})$ -Prinzipalbündel mit Totalraum $V_{k,n}(\mathbb{F})$ und Basis $G_{k,n}(\mathbb{F})$.

Für $k = 1$ erhält man $V_{1,n}(\mathbb{F}) = \mathbb{S}(\mathbb{F}^n) = \mathbb{S}^{nd-1}$ ($d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}$), $G_{1,n}(\mathbb{F}) = \mathbb{F}\mathbb{P}^{n-1}$ und $U_1(\mathbb{F}) = \mathbb{S}(\mathbb{F}) = \mathbb{S}^{d-1}$, wobei $\mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$.

Im Fall $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $k = 1$ und $n = 2$ erhält man als Spezialfall die *Hopf-Faserung* $\mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2$.

1.3 Assoziierte Bündel

Prinzipalbündel erlauben es, auf natürliche Weise “assozierte” Faserbündel zu konstruieren. Oft ist viel der geometrischen Information auf der Ebene der Prinzipalbündel kodiert.

Konstruktion 1.3.1 (Assoziiertes Faserbündel). Sei $\pi : P \longrightarrow B$ ein G -Prinzipalbündel und F eine Mannigfaltigkeit mit einer Linkswirkung $a : G \times F \longrightarrow F$ von G . (Wir sagen auch, F sei eine G -Mannigfaltigkeit.) Auf $P \times F$ sei eine Rechtswirkung definiert durch

$$(p, f) \cdot g := (p \cdot g, g^{-1} \cdot f).$$

Da die G -Wirkung auf P frei und eigentlich ist, folgt gleiches für diese Wirkung. Folglich existiert

$$P \times^G F := (P \times F)/G$$

und die durch π induzierte Projektion $P \times^G F \longrightarrow B$ ist eine surjektive Submersion. Dann heißt $P \times^G F$ zu P *assoziertes Bündel*.

Proposition 1.3.2. *Das assoziierte Bündel $P \times^G F$ ist ein Faserbündel über der Basis B vom Fasertyp F . Ist (g_{ij}) der G -Cozykel von P zu einem gegebenen äquivarianten Bündelatlas, so besitzt $P \times^G F$ einen Bündelatlas über der gleichen Überdeckung, dessen Cozykel $(a_{g_{ij}})$ ist.*

Beweis. Sei $\tau : P|_U \rightarrow U \times G$ eine äquivalente lokale Trivialisierung von P . Bezüglich der offensichtlichen G -Rechtswirkung auf $U \times G \times F$ gilt

$$(U \times G \times F)/G \cong U \times F.$$

Der Bündelisomorphismus $\tau \times \text{id}_F : P|_U \rightarrow U \times G \times F$ ist G -äquivariant, induziert also einen Bündelisomorphismus $\bar{\tau} : (P \times^G F)|_U = P|_U \times^G F \rightarrow U \times F$. Dies zeigt, dass $P \times^G F$ ein Faserbündel mit einem über der gleichen Überdeckung wie für P definierten Bündelatlas ist.

Sei $\tau' : P|_{U'} \rightarrow U' \times G$ eine weitere äquivalente lokale Trivialisierung von P und $\tau'' : U \cap U' \rightarrow G$ definiert durch

$$(\tau|_{U \cap U'} \circ \tau'^{-1}|_{U \cap U'})(b, g) = (b, g \cdot \tau''(b)).$$

Aus den Definitionen folgt sofort

$$(\bar{\tau}|_{U \cap U'} \circ \bar{\tau}'^{-1}|_{U \cap U'})(b, f) = (b, a_{\tau''(b)}(f)).$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Der Vektorraum aller Schnitte eines assoziierten Bündels lässt sich über äquivalente Abbildungen charakterisieren.

Proposition 1.3.3. *Sei $\pi : P \rightarrow B$ ein Prinzipalbündel und F eine G -Mannigfaltigkeit. Dann ist für alle offenen $U \subseteq B$ die Abbildung*

$$\Gamma(U, P \times^G F) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(P|_U, F)^G : s \mapsto \varphi_s,$$

definiert durch

$$s(\pi(p)) = [(p, \varphi_s(p))], \quad \forall p \in P|_U$$

eine Bijektion. Hierbei ist die Äquivarianzbedingung für $\varphi = \varphi_s$:

$$\varphi(p \cdot g) = g^{-1} \cdot \varphi(p), \quad \forall p \in P, g \in G.$$

Beweis. Offensichtlich kann man P durch $P|_U$ ersetzen, so dass wir $U = B$ annehmen können. Sei ein Schnitt s gegeben und $p \in P$. Dann gibt es ein

$f \in F$ mit $[(p, f)] = s(\pi(p))$. Sei $f' \in F$ mit $[(p, f')] = s(\pi(p))$. Dann existiert ein eindeutiges $g \in G$ mit

$$(p, f) = (p \cdot g, g^{-1} \cdot f').$$

Aber die G -Wirkung auf P ist frei, so dass $g = 1$ und $f = f'$. Damit ist $\varphi_s(p) := f$ definiert. Es gilt weiter

$$[(p \cdot g, \varphi_s(p \cdot g))] = s(\pi(p \cdot g)) = s(\pi(p)) = [(p, \varphi_s(p))] = [(p \cdot g, g^{-1} \cdot \varphi_s(p))],$$

so dass φ_s äquivariant ist.

Es bleibt zu zeigen, dass φ_s glatt ist. Da dies eine lokale Frage ist, können wir annehmen, dass $P = B \times G$ ist, also $P \times^G F \cong B \times F$. Der kanonische Isomorphismus $P \times^G F \rightarrow B \times F$ ist gegeben durch $[(b, g), f] \mapsto (b, f)$. Folglich ist

$$\varphi_s(b, g) = p_2(s(b)), \quad \forall b \in B, g \in G,$$

und die Glattheit folgt.

Umgekehrt sei $\varphi : P \rightarrow F$ glatt und äquivariant. Für $b = \pi(p) = \pi(p')$ gibt es $g \in G$ mit $p = p' \cdot g$, da G transitiv auf Fasern von P wirkt. Damit folgt

$$[(p, \varphi(p))] = [(p' \cdot g, \varphi(p' \cdot g))] = [(p' \cdot g, g^{-1} \cdot \varphi(p'))] = [(p', \varphi(p'))],$$

so dass $s(b) := [(p, \varphi(p))]$ nur von b abhängt. Offensichtlich gilt $\pi(s(b)) = b$. Die Glattheit folgt ähnlich wie oben. \square

Wie oben erwähnt, sind viele wichtige Faserbündel als assoziierte Bündel gegeben. Ein wichtiges Beispiel sind Vektorbündel.

Definition 1.3.4 (Vektorbündel). Sei $E \rightarrow B$ ein Faserbündel vom Fasertyp \mathbb{K}^n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Ein Bündelatlas $(\tau_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{K}^n)$ heißt \mathbb{K} -linear, falls der assoziierte Cozykel $\tau_{ij} : U_{ij} \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{K}^n)$ Werte in $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ annimmt.

Eine Menge A' lokaler Trivialisierungen von E heißt *linear kompatibel* mit einem gegebenen \mathbb{K} -linearen Bündelatlas A , falls ihre Vereinigung $A' \cup A$ ein \mathbb{K} -linearer Bündelatlas ist. Zwei \mathbb{K} -lineare Bündelatlanten heißen *äquivalent*, falls sie kompatibel sind. Ein Faserbündel E vom Fasertyp \mathbb{K}^n mit einer Äquivalenzklasse \mathbb{K} -linearer Bündelatlanten heißt \mathbb{K} -Vektorbündel. In diesem Fall heißt n der *Rang*. Im Fall von Rang 1 spricht man von *Geradenbündeln*.

Aus den Definitionen folgt sofort der folgende Satz.

Proposition 1.3.5. *Sei E ein \mathbb{K} -Vektorbündel vom Rang n . Dann ist E vermöge der definierenden Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ assoziiert zu einem bis auf Isomorphie eindeutigen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ -Prinzipalbündel $\mathrm{GL}(E)$.*

Ist umgekehrt P ein G -Prinzipalbündel und V der Raum einer endlich-dimensionalen \mathbb{K} -linearen G -Wirkung ρ , so trägt $P \times^G V$ die Struktur eines \mathbb{K} -Vektorbündels E , die dadurch eindeutig bestimmt ist, dass $(\rho(g_{ij}))$ ein $\mathrm{GL}(V)$ -Cozykel für E ist, wenn (g_{ij}) ein G -Cozykel für P ist.

Beispiel 1.3.6. Sei M ein Mannigfaltigkeit. Aus der Definition von $\mathrm{GL}(M)$ folgt sofort

$$\mathrm{GL}(M) \times^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^n = TM,$$

d.h. $GL(TM) = \mathrm{GL}(M)$.

Definition 1.3.7 (Multilineare Bündelmorphismen). Seien E_1, \dots, E_n, E' \mathbb{K} -Vektorbündel vom Rang m_1, \dots, m_n, m' auf der Basis B . Ein Bündelmorphismus

$$E_1 \times_B \cdots \times_B E_n \longrightarrow E'$$

heißt \mathbb{K} - n -linear, falls es über einer offenen Überdeckung (U_i) von B definierte linear kompatible lokale Trivialisierungen $\tau_i^j, \tau_i^{m'}$ von E_j, E' gibt, so dass

$$\tau_i^{m'} \circ \varphi \circ (\tau_i^{m_1} \times_B \cdots \times_B \tau_i^{m_n})^{-1}(b, f_1, \dots, f_n) = (b, \varphi_i(b)(f_1, \dots, f_n))$$

für eine Abbildung $\varphi_i : U_i \longrightarrow L_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{m_1}, \dots, \mathbb{K}^{m_n}; \mathbb{K}^{m'})$ ist. Hierbei sei

$$L_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{m_1}, \dots, \mathbb{K}^{m_n}; \mathbb{K}^{m'}) := \{T : \mathbb{K}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{K}^{m_n} \longrightarrow \mathbb{K}^{m'} \mid T \text{ } \mathbb{K}\text{-}n\text{-linear}\}.$$

Damit definieren wir

$$L_{\mathbb{K}}(E_1, \dots, E_n; E') := \{T \in \mathrm{Hom}_B(E_1 \times_B \cdots \times_B E_n, E') \mid T \text{ } \mathbb{K}\text{-}n\text{-linear}\}.$$

Konstruktion 1.3.8 (Konstruktionen mit Vektorbündeln). Seien E_1, E_2 \mathbb{K} -Vektorbündel. Ein \mathbb{K} -Vektorbündel E heißt *direkte Summe* von E_1 und E_2 , falls es mit \mathbb{K} -lineare Bündelmorphismen $\iota_j : E_j \longrightarrow E$ versehen ist, so dass für alle \mathbb{K} -Vektorbündel E' die Abbildung

$$L_{\mathbb{K}}(E; E') \longrightarrow L_{\mathbb{K}}(E_1; E') \times L_{\mathbb{K}}(E_2; E') : \varphi \longmapsto (\varphi \circ \iota_1, \varphi \circ \iota_2)$$

bijektiv ist. Dann ist E eindeutig bis auf kanonischen Isomorphismus und man schreibt $E_1 \oplus E_2$ dafür.

Ein \mathbb{K} -Vektorbündel E heißt *Tensorprodukt* von E_1 und E_2 , falls es mit einem \mathbb{K} -bilinearen Bündelmorphismus $t : E_1 \times_B E_2 \longrightarrow E$ versehen ist, so dass für jedes \mathbb{K} -Vektorbündel E' die Abbildung

$$L_{\mathbb{K}}(E; E') \longrightarrow L_{\mathbb{K}}(E_1, E_2; E') : \varphi \longmapsto \varphi \circ t$$

bijektiv ist. Dann ist E eindeutig bis auf kanonischen Isomorphismus und man schreibt $E_1 \otimes E_2$ dafür.

Proposition 1.3.9. *Seien E_1, E_2 \mathbb{K} -Vektorbündel. Dann existieren $E_1 \oplus E_2$ und $E_1 \otimes E_2$. Als Faserbündel gilt $E_1 \oplus E_2 = E_1 \times_B E_2$.*

Sind (g_{ij}^k) , $k = 1, 2$, GL-Cozyklen für E_k , $k = 1, 2$, so sind $(g_{ij}^1 \oplus g_{ij}^2)$ bzw. $(g_{ij}^1 \otimes g_{ij}^2)$ GL-Cozyklen für $E_1 \oplus E_2$ bzw. $E_1 \otimes E_2$.

Beweis. Aufgrund der Eindeutigkeit reicht es für die Existenz den Fall trivialer Vektorbündel zu betrachten. Aber es gilt

$$L_{\mathbb{K}}(B \times V_1 \oplus V_2; E') = L_{\mathbb{K}}(B \times V_1; E') \times L_{\mathbb{K}}(B \times V_2; E'),$$

sowie

$$L_{\mathbb{K}}(B \times V_1 \otimes V_2; E') = L_{\mathbb{K}}(B \times V_1, B \times V_2; E').$$

Es ist leicht, die Aussage über die Cozyklen nachzurechnen. \square

Bemerkung 1.3.10. Indem man symmetrische bzw. alternierende multilineare Abbildungen betrachtet, erhält man für jedes \mathbb{K} -Vektorbündel E die symmetrischen und äußeren Potenzen $S^k(E)$ und $\wedge^k(E)$ mit GL-Cozyklen $S^k(g_{ij})$ bzw. $\wedge^k(g_{ij})$. Betrachtet man für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ antilineare Abbildungen, so erhält man das konjugierte Bündel \overline{E} mit Cozykel $\overline{g_{ij}}$.

Korollar 1.3.11. *Es gibt für jedes \mathbb{K} -Vektorbündel E einen bis auf Isomorphie eindeutigen Funktor $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{K}}(E_1, \cdot) : \text{VB}_{\mathbb{K}}(B) \rightarrow \text{VB}_{\mathbb{K}}(B)$, so dass*

$$L_{\mathbb{K}}(E \otimes E_1; E_2) \cong L_{\mathbb{K}}(E; \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{K}}(E_1; E_2))$$

für alle \mathbb{K} -Vektorbündel E, E_2 gilt. Man nennt $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2)$ Homomorphismenbündel. Es gilt $\Gamma(B, \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2)) = L_{\mathbb{K}}(E_1; E_2)$.

Sind (g_{ij}^k) , $k = 1, 2$, GL-Cozyklen für E_k , so ist ein GL-Cozykel für $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2)$ gegeben durch $(g_{ij}^1)^{t,-1} \otimes g_{ij}^2$.

Beweis. Es reicht, die Existenz zu zeigen. Sind $E_i = B \times V_i$, so erfüllt $\underline{\text{Hom}}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2) := B \times L_{\mathbb{K}}(V_1; V_2)$ die Voraussetzung. Es gilt

$$\Gamma(B, \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2)) = L_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{K}}(E_1, E_2)) = L_{\mathbb{K}}(E_1; E_2).$$

Die weiteren Aussagen kann man lokal prüfen. \square

Beispiel 1.3.12. Ist E ein \mathbb{K} -Vektorbündel, so heißt $E^* := \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K})$ das *duale Vektorbündel*. Es hat den Cozykel $(g_{ij})^{t,-1}$.

Beispiel 1.3.13. Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit und ϱ die definierende Darstellung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T^*M &:= (TM)^* \cong \mathrm{GL}(M) \times^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \varrho^*, \quad \wedge T^*M \cong \mathrm{GL}(M) \times^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \wedge(\varrho^*), \\ T^{(r,s)}M &:= \bigotimes^r (TM) \otimes \bigotimes^s (T^*M) \cong \mathrm{GL}(M) \times^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \bigotimes^r \varrho \otimes \bigotimes^s \varrho^*, \end{aligned}$$

wobei $T^{(r,s)}M$ das Bündel der (r, s) -Tensoren sei.

Definition 1.3.14. Sei E ein \mathbb{K} -Vektorbündel. Eine *Bündelmetrik* ist ein Schnitt $\langle \cdot, \cdot \rangle \in \Gamma(B, (E \otimes \overline{E})^*) = L_{\mathbb{K}}(E, \overline{E}^*)$, so dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht-ausgeartet und symmetrisch (bzw. hermitesch) ist. Sie heißt *positiv*, falls $\langle e, e \rangle > 0$ für alle $e \in E \setminus 0$.

Der folgende Umstand ist manchmal in Beweisen nützlich.

Lemma 1.3.15. *Sei E ein \mathbb{K} -Vektorbündel. Dann trägt E eine positive Bündelmetrik. Insbesondere besitzt jede Mannigfaltigkeit eine Riemannsche Struktur.*

Beweis. Sei (U_i) eine lokal endliche Überdeckung von B , so dass $E|_{U_i}$ linear isomorph zu $U_i \times \mathbb{K}^n$ ist. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ auf $E|_{U_i} \times_B E|_{U_i}$ die Zurückziehung von

$$(b, e_1, e_2) \mapsto (e_1|e_2),$$

wobei $(\cdot|\cdot)$ das Standardskalarprodukt ist. Dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ positiv.

Sei (χ_i) eine (U_i) untergeordnete Teilung der Eins aus positiven Funktionen. Setze $\langle \cdot, \cdot \rangle := \sum_i \chi_i \langle \cdot, \cdot \rangle_i$. Dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv, also nicht-ausgeartet und folglich eine Bündelmetrik. \square

1.4 Reduktionen der Strukturgruppe

Wie wir gesehen haben, kann man in einem Prinzipalbündel die Faser G durch eine G -Mannigfaltigkeit ersetzen, um ein assoziiertes Bündel zu erhalten. Oft ist es nützlich, die Gruppe G durch eine andere zu ersetzen (z.B. durch eine Untergruppe oder durch eine Gruppe, deren Quotient G ist). Dies führt auf den Begriff der Reduktion.

Definition 1.4.1 (Reduktionen von Prinzipalbündeln). Sei $P \rightarrow B$ ein G -Prinzipalbündel und $\varphi : H \rightarrow G$ ein Morphismus von Liegruppen. Dadurch ist eine H -Rechtswirkung auf P erklärt, durch

$$p \cdot h := p \cdot \varphi(h).$$

Eine φ -Reduktion von P ist ein H -äquivarianter Bündelmorphismus $\psi : Q \rightarrow P$, wobei $Q \rightarrow B$ ein H -Prinzipalbündel ist.

Wir werden weiter unten interessante Beispiele von Reduktionen sehen. Ein triviales Beispiel ist wie folgt gegeben.

Beispiel 1.4.2. Sei $\varphi : H \rightarrow G$ ein Morphismus von Liegruppen. Dann sind $P = G$ und $Q = H$ Prinzipalbündel über der Basis $G/G = H/H = *$ mit Strukturgruppe G bzw. H und φ ist eine φ -Reduktion von P .

Das Konzept der Reduktion ist deswegen so nützlich, weil es ermöglicht, das gleiche Faserbündel durch verschiedene Daten als assoziiertes Bündel auszudrücken, wie der folgende Satz zeigt.

Proposition 1.4.3. *Sei P ein G -Prinzipalbündel, $\varphi : H \rightarrow G$ ein Morphismus von Liegruppen und $\psi : Q \rightarrow P$ eine φ -Reduktion von P . Ist F eine G -Mannigfaltigkeit und $\varphi^*(F)$ die gleiche Mannigfaltigkeit mit der induzierten H -Wirkung, so ist die Abbildung*

$$Q \times^H \varphi^*(F) \rightarrow P \times^G F,$$

die durch $\psi \times \text{id}_F$ induziert ist, ein Bündelisomorphismus.

Ist F ein \mathbb{K} -Vektorraum und die G -Wirkung \mathbb{K} -linear, so ist die ein Isomorphismus von \mathbb{K} -Vektorbündeln.

Beweis. Qua Definition ist $\psi \times \text{id}_F$ H -äquivariant, also ist durch $\psi \times \text{id}_F$ ein Bündelmorphismus $\Psi : Q \times^H \varphi^*(F) \rightarrow P \times^G F$ definiert.

Da G transitiv auf den Fasern von P wirkt, ist die Abbildung $Q \times F \rightarrow P \times^G F$ und folglich auch Ψ surjektiv. Sei nun

$$\Psi([(q, f)]) = \Psi([(q', f')]),$$

d.h. $(\psi(q) \cdot g, g^{-1} \cdot f) = (\psi(q'), f')$ für ein $g \in G$. Es folgt

$$\pi_Q(q) = \pi_P(\psi(q)) = \pi_P(\psi(q) \cdot g) = \pi_P(\psi(q')) = \pi_Q(q'),$$

so dass $q \cdot h = q'$ für ein $h \in H$. Dann folgt

$$\psi(q) \cdot g = \psi(q') = \psi(q) \cdot \varphi(h),$$

also, da G frei wirkt, $g = \varphi(h)$. Dann ist aber

$$[(q, f)] = [(q \cdot h, \varphi(h)^{-1} \cdot f)] = [(q', f')].$$

Damit ist Ψ injektiv.

Um einzusehen, dass Ψ ein Bündelisomorphismus ist, reicht es den Fall zu betrachten, dass $Q = B \times H$ und $P = B \times G$ ist. Aus der Äquivarianz folgt, dass $\psi = \text{id}_B \times \varphi$ ist, also $\Psi = \text{id}_{B \times F} : B \times F \rightarrow B \times F$.

Per Konstruktion ist Ψ linear, wenn F ein Vektorraum und die Wirkung von G linear ist. \square

Korollar 1.4.4. *Ist Q eine φ -Reduktion von P , so ist $P \cong Q \times^H G$, wobei H auf G durch $h \cdot g := \varphi(h)g$ wirke. Man sagt, P sei eine Erweiterung von Q . Insbesondere ist Q eine Untermannigfaltigkeit von P , falls φ injektiv ist.*

Beweis. In Proposition 1.4.3 nehme man $F := G$ mit der G -Wirkung durch Linkstranslationen. Dann gilt $P \times^G G \cong P$ und die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 1.4.5. Das Beispiel 1.4.2 zeigt, dass Q keine eingebettete Untermannigfaltigkeit sein muss.

Abstrakt lässt sich die Existenz von Reduktionen mit Hilfe von Cozyklen charakterisieren.

Korollar 1.4.6. *Sei $P \rightarrow B$ ein G -Prinzipalbündel und $\varphi : H \rightarrow G$ ein Morphismus von Liegruppen. Genau dann gibt es eine φ -Reduktion von P , wenn es einen H -Cozykel (h_{ij}) auf B gibt, so dass $(\varphi(h_{ij}))$ ein G -Cozykel für P ist.*

Beweis. Sei (h_{ij}) ein H -Cozykel, so dass es einen G -äquivalenten Bündelatlas $\tau_i : P|_{U_i} \rightarrow U_i \times G$ gibt, so dass Gleichung (1.2.1) mit $g_{ij} := \varphi(h_{ij})$ erfüllt ist. Sei Q das gemäß Proposition 1.2.4 durch (h_{ij}) definierte H -Prinzipalbündel auf der Basis B mit H -äquivalentem Bündelatlas $(\sigma_i : Q|_{U_i} \rightarrow U_i \times H)$. Nach Proposition 1.1.9 (ii) gibt es einen eindeutigen Bündelmorphismus

$$\psi : Q \rightarrow P, \quad \tau_i \circ \psi = (\text{id}_{U_i} \times \varphi) \circ \sigma_i.$$

Offensichtlich ist dieser H -äquivalent, also ist Q eine φ -Reduktion von P .

Umgekehrt sei eine φ -Reduktion $\psi : Q \rightarrow P$ gegeben. Dann ist $P \cong Q \times^H G$ nach Korollar 1.4.4. Ist also (h_{ij}) ein H -Cozykel für Q , so ist nach Proposition 1.3.2 $\ell_{\varphi(h_{ij})}$ ein Cozykel des Faserbündels P . Mit anderen Worten ist $\varphi(h_{ij})$ ein G -Cozykel des G -Prinzipalbündels P . \square

Um Beispiele von Reduktionen zu finden, ist folgendes Kriterium nützlich, dass Teilmengen von Prinzipalbündeln identifiziert, die Reduktionen sind. Nach Korollar 1.4.4 sind alle Reduktionen für $H \subseteq G$ von dieser Form.

Proposition 1.4.7. *Sei P ein G -Prinzipalbündel, H eine Lie-Untergruppe von G und $Q \subseteq P$ eine H -invariante Teilmenge mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Ist $g \in G$ und sind $e, e' \in E_b$ für ein $b \in B$, so dass $e \cdot g = e'$, so folgt bereits $g \in H$.*

(ii) *Für alle $b \in B$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq B$ von b und einen Schnitt $s : U \rightarrow P$ von P mit $s(U) \subseteq Q$.*

Dann besitzt Q eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass es eine Untermannigfaltigkeit und bezüglich der Einschränkung der Projektion von P ein H -Prinzipalbündel ist. Die Inklusionsabbildung $Q \rightarrow P$ ist eine Reduktion von P bzgl. der Inklusion $H \subseteq G$.

Beweis. Sei (U_i) eine offene Überdeckung von B gegeben, mit lokalen Schnitten $s_i : U_i \rightarrow P$ mit $s_i(U_i) \subseteq Q$. Sei $(\tau_i : P|_{U_i} \rightarrow U_i \times G)$ der mit (s_i) vermöge Bemerkung 1.2.2 (ii) assoziierte G -äquivalente Bündelatlas. Der zugehörige G -Cozykel (g_{ij}) ist durch

$$s_j(b) = s_i(b) \cdot g_{ij}(b)$$

festgelegt und nimmt nach (i) Werte in H an. Analog induzieren die Einschränkungen von s_i H -äquivalente Bijektionen $\sigma_i : Q|_{U_i} \rightarrow U_i \times H$. Diese, sowie die induzierten Cozykel-Abbildungen $h_{ij} : U_{ij} \rightarrow H$ sind glatt, da Lie-Untergruppen initiale Untermannigfaltigkeiten sind, vgl. Korollar A.1.13.

Gemäß Proposition 1.2.4 gibt es ein bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutiges H -Prinzipalbündel Q' mit H -äquivalentem Bündelatlas σ'_i , sowie einen Bündelmorphismus $\psi : Q' \rightarrow P$ mit $\tau_i \circ \psi = \sigma'_i$. Dann ist ψ H -äquivalent und nimmt Werte in Q an, nach Konstruktion von τ_i . Da H einfach transitiv auf den Q_b und Q'_b wirkt, ist $\psi : Q' \rightarrow Q$ bijektiv und definiert auf Q eine Mannigfaltigkeitsstruktur mit den gewünschten Eigenschaften.

Diese Struktur ist eindeutig, da sie lokal festgelegt ist und Morphismen von Prinzipalbündeln Isomorphismen sind. \square

Korollar 1.4.8. *Sei E ein \mathbb{K} -Vektorbündel vom Rang n . Dann ist E vermöge der Standarddarstellung von $U_n(\mathbb{K})$ auf \mathbb{K}^n zu dem $U_n(\mathbb{K})$ -Prinzipalbündel*

$$\{(b, v_1, \dots, v_n) \in \mathrm{GL}(E) \mid v_1, \dots, v_n \text{ orthonormal}\}$$

assoziiert. Dieses wird für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ mit $O(E)$ bzw. $U(E)$ bezeichnet.

Beweis. Definiere Q als die oben angegebene Teilmenge von $\mathrm{GL}(E)$. Sei $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit $(g^{-1}(v_1), \dots, g^{-1}(v_n)) = (v'_1, \dots, v'_n)$, wobei (v_j) eine Orthonormalbasis und (v'_j) eine Basis von E_b sei. Dann ist (v'_j) orthonormal genau dann, wenn $g \in U_n(\mathbb{K})$ ist. Damit ist Q invariant unter $U_n(\mathbb{K})$ und Bedingung (i) von Proposition 1.4.7 erfüllt.

Um Bedingung (ii) zu überprüfen, sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gemäß Lemma 1.3.15 eine positive Bündelmetrik auf E . Sei $s : U \rightarrow \mathrm{GL}(E)$ ein lokaler Schnitt von $\mathrm{GL}(E)$. Man schreibe

$$s(b) = (b, v_1(b), \dots, v_n(b)).$$

Definiere $(v'_j(b))$ durch das Gram-Schmidt-Verfahren, d.h.

$$v'_1(b) := \frac{1}{\sqrt{\langle v_1(b), v_1(b) \rangle}} v_1(b),$$

$$v'_{j+1}(b) := \frac{1}{\sqrt{\langle v_1(b), v_1(b) \rangle}} v_{j+1}(b) - \sum_{k=1}^j \langle v'_k(b), v_{j+1}(b) \rangle v'_k(b).$$

Dann ist durch $s'(b) := (b, v'_1(b), \dots, v'_n(b))$ ein lokaler Schnitt $s' : U \rightarrow \text{GL}(E)$ definiert, dessen Bild in Q liegt. Die Behauptung folgt aus Proposition 1.4.7 und Proposition 1.4.3. \square

Korollar 1.4.9. *Sei P ein G -Prinzipalbündel und $H \subseteq G$ eine Lie-Untergruppe. Genau dann ist P auf H reduzierbar, wenn $P \times^G (G/H) = P/H$ einen globalen Schnitt besitzt.*

Beweis. Sei Q eine Reduktion von P . Dann folgt mit Korollar 1.4.4:

$$P \times^G G/H \cong Q \times^H G \times^G G/H \cong Q \times^H G/H.$$

Die konstante Abbildung $Q \rightarrow G/H : q \mapsto H$ (die Nebenklasse von 1) ist H -äquivariant und definiert nach Proposition 1.3.3 einen Schnitt.

Sei $s \in \Gamma(B, P \times^G G/H)$ und $\varphi_s \in \mathcal{C}^\infty(P, G/H)^G$ die zugeordnete Abbildung (*loc. cit.*). Definiere $Q := \varphi_s^{-1}(H)$. Aufgrund der Äquivarianz von φ_s ist Q invariant unter H . Seien $p, p' \in Q_b$ und $g \in G$ mit $p \cdot g = p'$. Dann ist

$$H = \varphi_s(p') = \varphi_s(p \cdot g) = g^{-1} \varphi_s(p) = g^{-1} \cdot H,$$

also $g \in H$. Folglich ist Bedingung (i) von Proposition 1.4.7 erfüllt.

Sei $b \in B$. Es gibt eine Umgebung $V \subseteq B$ von b mit einem lokalen Schnitt $t : V \rightarrow P|_V$. Es gibt eine Umgebung $U \subseteq G/H$ von $\varphi_s(t(b))$ mit einem lokalen Schnitt $\sigma : U \rightarrow G$ von $G \rightarrow G/H$. Nach Verkleinerung von V kann man $\varphi_s(t(V)) \subseteq U$ annehmen.

Definiere

$$r : V \rightarrow P, \quad r(b') := t(b') \cdot \sigma(\varphi_s(t(b'))).$$

Dann ist

$$\varphi_s(r(b')) = \varphi_s(t(b') \cdot \sigma(\varphi_s(t(b')))) = \sigma(\varphi_s(t(b')))^{-1} \cdot \varphi_s(t(b')) \in H,$$

da σ ein Schnitt von $G \rightarrow G/H$ ist. Damit ist $r(V) \subseteq Q$ und Bedingung (ii) von Proposition 1.4.7 ist erfüllt. Die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 1.4.10. Korollar 1.4.9 liefert einen neuen Beweis von Korollar 1.4.8: Die Polarzerlegung liefert einen Diffeomorphismus

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{U}_n(\mathbb{K}) \cong \mathrm{Herm}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{R}^{n(d-1)+dn(n-1)/2}, \quad d := \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K},$$

und jedes Faserbündel, dessen Fasertyp \mathbb{R}^N ist, besitzt einen globalen Schnitt, vgl. Proposition 1.1.11.

Auf die gleiche Weise zeigt man folgende Aussage: Sei G eine Liegruppe mit endlich vielen Zusammenhangskomponenten. Dann besitzt G eine maximale kompakte Untergruppe K (und all diese sind zueinander konjugiert) und G/K ist diffeomorph zu einem \mathbb{R}^N . Folglich besitzt jedes G -Prinzipalbündel eine Reduktion auf K .

Kapitel 2

Zusammenhänge in Prinzipalbündeln

2.1 Zusammenhänge und Atiyah-Sequenz

Konstruktion 2.1.1 (Das vertikale Tangentialbündel). Sei $\pi : E \rightarrow B$ ein Faserbündel. Wir definieren eine $VE \subseteq TE$ durch

$$VE := \ker T\pi.$$

Dies nennt man das *vertikale Tangentialbündel* von E .

Das folgende Lemma folgt leicht aus dem Umstand, dass π und damit auch $T\pi$ eine Submersion ist.

Lemma 2.1.2. *Mit der Projektion π_{TE} von TE ist VE ein \mathbb{R} -Vektorbündel vom Rang $\dim F$, wobei F der Fasertyp von E sei. Es gilt*

$$T_e E_{\pi(e)} \cong V_e E$$

für alle $e \in E$, vermöge der Tangentialabbildung von $E_{\pi(e)} \rightarrow E$. Ist E ein \mathbb{K} -Vektorbündel, so gilt $VE = \pi^* E$.

Das folgende Lemma ist leicht zu beweisen.

Lemma 2.1.3. *Sei*

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} E'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln. Dann sind die folgenden drei Mengen linearer Bündelmorphismen in Bijektion:

- (i) Die der Isomorphismen $s : E \longrightarrow E' \oplus E''$, $\pi = p_2 \circ \varphi$ und $j = s^{-1} \circ \iota_1$.
- (ii) Die der Rechtsinversen $q : E'' \longrightarrow E$ von p , d.h. $p \circ q = \text{id}_{E''}$.
- (iii) Die der Linksinversen $k : E \longrightarrow E'$ von j , d.h. $k \circ j = \text{id}_{E'}$.

Die Bijektionen sind durch folgende Gleichungen definiert:

$$s = (k, p), \quad s^{-1} = (j, q). \quad (2.1.1)$$

Falls diese Mengen nicht leer sind, sagt man, die Sequenz spalte. Die Wahl von q heißt ein Splitting von p oder von der Sequenz.

Definition 2.1.4 (Zusammenhänge). Sei $\pi : E \longrightarrow B$ ein Faserbündel. Ein Splitting der Sequenz

$$0 \longrightarrow VE \xrightarrow{j} TE \xrightarrow{T\pi} \pi^*TB \longrightarrow 0 \quad (2.1.2)$$

heißt *Zusammenhang* auf E . Genauer heißt ein Rechtsinverses von $T\pi$ bzw. sein Bild H Zusammenhang und das zugehörige Linksinverse $A \in L_{\mathbb{R}}(TE; VE) = \Omega^1(E, VE)$ von j *Zusammenhangs-1-Form*.

Proposition 2.1.5. *Jedes Faserbündel besitzt einen Zusammenhang.*

Dies folgt sofort aus dem folgenden Lemma.

Lemma 2.1.6. *Jede kurze exakte Sequenz von \mathbb{K} -Vektorbündeln spaltet.*

Beweis. Sei E ein \mathbb{K} -Vektorbündel und E' ein Unterbündel. Nach Lemma 1.3.15 trägt E eine Bündelmetrik. Es folgt $E = E' \oplus E'^{\perp}$ und die Behauptung folgt aus Lemma 2.1.3. \square

Definition 2.1.7 (Lineare Zusammenhänge und kovariante Ableitungen). Sei $\pi : E \longrightarrow B$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel. Ein Zusammenhang H heißt *linear*, falls für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\mu_{\lambda} : E \longrightarrow E : e \mapsto \lambda e$ gilt

$$T\mu_{\lambda}(H) \subseteq H.$$

Äquivalenterweise gilt für die Zusammenhangs-1-Form A :

$$A \circ T\mu_{\lambda} = T\mu_{\lambda} \circ A, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Eine *kovariante Ableitung* sind \mathbb{K} -lineare Abbildungen

$$\nabla = \nabla_U : \Gamma(U, E) = \Omega^0(U, E) \longrightarrow \Gamma(U, T^*M \otimes E) = \Omega^1(U, E),$$

mit $\nabla_V = \nabla_U|_V$ für alle offenen Mengen $V \subseteq U \subseteq M$, so dass für alle lokalen Schnitte $s \in \Gamma(U, E)$ und alle Funktionen $f \in C^\infty(U, \mathbb{K})$ die Leibniz-Regel gelte:

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s.$$

Für ein (\mathbb{K} -wertiges) Vektorfeld v definiert man $\nabla_v = \iota_v \nabla$. Dann gilt

$$\nabla_{fv} = f\nabla_v, \quad \nabla_v(fs) = v(f)s + f\nabla_v(s).$$

Proposition 2.1.8. *Sei $\pi : E \rightarrow B$ ein \mathbb{K} -Vektorbündel. Es gibt eine Bijektion zwischen den linearen Zusammenhängen und den kovarianten Ableitungen auf E , gegeben durch*

$$\nabla s := p_H \circ Ts, \quad \forall s \in \Gamma(U, E). \quad (2.1.3)$$

Beweis. Sei ∇ wie oben definiert. Dann gilt für alle $v \in T_b B$

$$\begin{aligned} (\nabla(fs))(v) &= p_{H_{s(b)}}(T_b(fs)(v)) = p_{H_{s(b)}}(T\mu_{T_b(f)(v)}(s(b)) + f(b) \cdot T_b(s)(v)) \\ &= T_{s(b)}\mu_{T_b(f)(v)}(p_{H_{s(b)}}(s(b))) + f(b) \cdot p_{H_{s(b)}}(T_b s(v)) \\ &= (df \otimes s + f \cdot \nabla(s))(b)(v), \end{aligned}$$

so dass ∇ eine kovariante Ableitung ist.

Umgekehrt definiert man H_e für $e \in E_b$ durch im $T_b s_b$ wenn $s \in \Gamma(U(b), E)$ mit $s(b) = e$ und $\nabla s = 0$ ist. Da ein Schnitt s eine Immersion ist, folgt, dass H ein Vektorbündel über $U(b)$ und ein Zusammenhang ist. Entlang jedes Pfads sind die Bedingungen an s ein Anfangswertproblem für ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem erster Ordnung, also ist s eindeutig dadurch festgelegt. \square

Definition 2.1.9 (Prinzipalzusammenhänge). Sei P ein G -Prinzipalbündel. Ein *Prinzipalzusammenhang* ist ein G -äquivarianter Zusammenhang.

Für die konkrete Beschreibung von Prinzipalzusammenhängen ist folgendes Konzept nützlich.

Definition 2.1.10 (Fundamentalvektorfelder). Sei $a : M \times G \rightarrow M$ eine Rechtswirkung der Liegruppe G auf der Mannigfaltigkeit M . Durch

$$a_v(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ a_{\exp tv},$$

ist für $v \in \mathfrak{g}$ ein Vektorfeld auf M definiert, dass *Fundamentalektorfeld* heißt. Es gilt $[a_v, a_{v'}] = a_{[v, v']}$ für alle $v, v' \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} a_{[v, v']}(f) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} a_{\text{Ad}(\exp sv)(v')}(f) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{s=t=0} f \circ a_{(\exp sv)(\exp tv')(\exp(-sv))} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Big|_{s=t=0} f \circ a_{\exp(-sv)} \circ a_{\exp(tv')} \circ a_{\exp(sv)} = [a_v, a_{v'}](f). \end{aligned}$$

Lemma 2.1.11. *Sei P ein G -Prinzipalbündel. Die Abbildung*

$$\varphi : \underline{\mathfrak{g}} = P \times \mathfrak{g} \longrightarrow VP : (p, v) \longmapsto a_v(p),$$

ist ein Bündelisomorphismus.

Beweis. Da die G -Wirkung a die Fasern erhält, ist φ wohldefiniert. Da a frei ist, ist φ injektiv. Aus Lemma 2.1.2 folgt, dass sie surjektiv ist. \square

Korollar 2.1.12. *Eine invariante 1-Form $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})^G := L_{\mathbb{R}}(TP; \mathfrak{g})^G$ ist Zusammenhangs-1-Form eines Prinzipalzusammenhangs genau dann, wenn $A(a_v) = v$ für alle $v \in \mathfrak{g}$.*

Sei G eine Liegruppe. Dann ist $TG = G \times \mathfrak{g}$ eine Liegruppe mit der Verknüpfung

$$(g_1, v_1) \cdot (g_2, v_2) := (g_1 g_2, v_1 + \text{Ad}(g_1^{-1})(v_2)).$$

Wirkt G von rechts auf P , so wirkt TG von rechts auf TP durch

$$u_p \cdot (g, v) = T_p a_g(u_p + a_v(p)).$$

Proposition 2.1.13. *Jeder Prinzipalzusammenhang auf P induziert einen Zusammenhang auf den assoziierten Faserbündeln $P \times^G F$. Im Fall assoziierter Vektorbündel erhält man so lineare Zusammenhänge.*

Beweis. Sei $E := P \times^G F$ und $\varrho : P \times F \longrightarrow E$ die kanonische Projektion. Dann ist ϱ G -invariant und induziert eine TG -invariante surjektive Submersion $T\varrho : TP \times TF \longrightarrow TE$. Die induzierte Abbildung $\bar{\varrho} := \widetilde{T\varrho} : TP \times^{TG} TF \longrightarrow TE$ ist eine Submersion und ein Morphismus von Vektorbündeln über E . Da der Rang von $TP \times^{TG} TF$ gerade $\dim P + \dim F - \dim G$ ist, folgt, dass $\bar{\varrho}$ ein Isomorphismus ist.

Sei π_E die Projektion von E . Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} P \times F & \xrightarrow{\varrho} & E = P \times^G F \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \pi_E \\ P & \xrightarrow{\pi} & B. \end{array}$$

Folglich ist $T\pi_E \circ \bar{\varrho} : TP \times^{TG} TF \longrightarrow \pi_E^*TB$ von $T(\pi \circ p_1)$ induziert.

Somit induziert die kurze exakte Sequenz (2.1.2) das folgende kommutative Diagramm von Vektorbündeln über E , dessen Zeilen exakt sind:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & VP \times^{TG} TF & \longrightarrow & TP \times^{TG} TF & \longrightarrow & \pi_E^*TB \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{\varrho} & & \downarrow \bar{\varrho} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & VE & \longrightarrow & TE & \longrightarrow & \pi_E^*TB \longrightarrow 0. \end{array}$$

Ist $A : TP \longrightarrow VP$ ein G -äquivalentes Linksinverses von $VP \longrightarrow TP$, so ist die von $A \times \text{id}_{TF}$ induzierte Abbildung offenbar ein Linksinverses \bar{A} von $VE \longrightarrow TE$.

Ist F ein Vektorraum und die Wirkung von G linear, so definiert dies die Zusammenhangs-1-Form eines linearen Zusammenhangs: Für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $p \in P$, $f \in F$, $u \in T_pP$, $v \in T_pF$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{A}_{[(p,\lambda f)]}(T_{[(p,f)]}\mu_\lambda(u, v)) &= \bar{A}_{[(p,\lambda f)](u,\lambda v)} \\ &= [(A_p(u), \lambda v)] = T_{(p,\lambda f)}\mu_\lambda(\bar{A}_{[(p,f)]}(u, v)). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.1.14. Ist $\pi_E : E \longrightarrow B$ ein Vektorbündel, so ist jeder \mathbb{K} -lineare Zusammenhang von einem eindeutigen Prinzipalzusammenhang auf $\text{GL}(E)$ induziert: Die Zusammenhangs-1-Form A des linearen Zusammenhangs definiert eine Abbildung

$$\tilde{A} : T\text{GL}(E) \longrightarrow V\text{GL}(E) : u_{e,v_1,\dots,v_n} \longmapsto a_v(u_{e,v_1,\dots,v_n}),$$

wobei $v \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ die Matrix bzgl. (v_j) der linearen Abbildung $A_e : T_eE \longrightarrow V_eE \subseteq T_eE$ sei. Dies liefert einen Prinzipalzusammenhang, der den linearen induziert.

Proposition 2.1.15 (Atiyah-Sequenz). *Sei P ein G -Prinzipalbündel. Es gibt eine kurze exakte Sequenz von \mathbb{R} -Vektorbündeln*

$$0 \longrightarrow \text{Ad}(P) := P \times^G \mathfrak{g} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \text{At}(P) := (TP)/G \xrightarrow{\eta} TB \longrightarrow 0, \quad (2.1.4)$$

wobei $\eta := \tilde{T}\pi$. Das Vektorbündel $\text{At}(P)$ heißt Atiyah-Bündel.

Beweis. Aus der Definition von VE und Lemma 2.1.11 haben wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow P \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\varphi} TP \xrightarrow{T\pi} \pi^*TB \longrightarrow 0. \quad (2.1.5)$$

Es gilt $a_{\text{Ad}(g)(v)} = Ta_{g^{-1}} \circ a_v \circ a_g$, also

$$\varphi(p \cdot g, \text{Ad}(g^{-1})(v)) = a_{\text{Ad}(g^{-1})(v)}(p \cdot g) = Ta_g(\varphi(p, v))$$

Folglich ist φ äquivariant, so dass es nach Übergang zum Quotienten nach G eine induzierte Sequenz wie in der Behauptung gibt. Sie ist exakt, weil dies faserweise zu prüfen ist, wo wir die Exaktheit bereits bewiesen haben. \square

Korollar 2.1.16. *Es gibt eine Bijektion zwischen Prinzipalzusammenhängen und Splittings D von η aus (2.1.4).*

Im *Beweis* benötigen wir folgendes Lemma.

Lemma 2.1.17. *Sei $p : E \rightarrow P$ ein G -äquivariantes Vektorbündel, d.h. \mathbb{R} -Vektorbündel mit einer linearen G -Rechtswirkung auf E , so dass p G -äquivariant ist. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$p^*(E/G) = P \times_B (E/G) \cong E$$

als G -äquivariante Vektorbündel, wobei G auf $p^*(E/G)$ wie folgt wirke:

$$(p, [v]) \cdot g := (p \cdot g, [v]).$$

Beweis. Die Abbildung

$$\psi : E \longrightarrow \pi^*(E/G) = P \times_B (E/G) : v \longmapsto (p(v), [v])$$

ist ein linearer Bündelmorphismus, also ein Isomorphismus, da dies faserweise der Fall ist. Die G -Äquivarianz folgt aus

$$\psi(v \cdot g) = (p(v \cdot g), [v \cdot g]) = (p(v) \cdot g, [v]) = \psi(v) \cdot g.$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Beweis von Korollar 2.1.16. Offensichtlich induzieren G -äquivariante Splittings von (2.1.5) Splittings von (2.1.4). Nach Lemma 2.1.17 gilt auch die Umkehrung. \square

Korollar 2.1.18. *Jedes Prinzipalbündel besitzt einen Prinzipalzusammenhang.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Korollar 2.1.16 und Lemma 2.1.6. \square

Beispiel 2.1.19. Betrachte G als ein Prinzipalbündel über dem Punkt $B = G/G = *$, wobei G durch Rechtstranslationen wirke. Da $TB = \underline{0}$, ist $VG = TG$ und $\varphi : \underline{\mathfrak{g}} \rightarrow TG$ ein Isomorphismus. Die eindeutige Zusammenhangs-1-Form $\omega_G \in \bar{\Omega}^1(G, \underline{\mathfrak{g}})$ (für diese Wahl der Wirkung) ist gegeben durch

$$\omega_G(R_v) := v, \quad \forall v \in \underline{\mathfrak{g}},$$

da das Fundamentalvektorfeld für die Wirkung durch Rechtstranslationen gerade das durch v definierte linksinvariante Vektorfeld ist. Man nennt ω_G die *Maurer-Cartan-Form*.

Allgemeiner sei $P = B \times G$ trivial. Dann ist $\text{At}(P) = TB \times \underline{\mathfrak{g}}$ und η die Projektion auf den ersten Faktor. Es definiert $(\text{id}_{TB}, 0) : TB \rightarrow \text{At}(P)$ ein Splitting von η . Nach Korollar 2.1.16 ist dadurch eine Zusammenhangs-1-Form A definiert. Explizit ist

$$A : TP = TB \times TG \rightarrow \underline{\mathfrak{g}}$$

die Projektion auf TG , gefolgt von ω_G .

Beispiel 2.1.20. Sei $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und betrachte $G \rightarrow G/H$ als H -Prinzipalbündel. Die Atiyah-Sequenz (2.1.4) hat die Form

$$0 \longrightarrow G \times^H \underline{\mathfrak{h}} \longrightarrow G \times^H \underline{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\eta} T(G/H) \longrightarrow 0,$$

d.h. $T(G/H) \cong G \times^H (\underline{\mathfrak{g}}/\underline{\mathfrak{h}})$. Insbesondere existiert ein G -äquivariantes Splitting genau dann, wenn es ein H -äquivariantes Splitting der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \underline{\mathfrak{h}} \longrightarrow \underline{\mathfrak{g}} \longrightarrow \underline{\mathfrak{g}}/\underline{\mathfrak{h}} \longrightarrow 0$$

gibt. Dies ist nach Lemma 2.1.3 genau dann der Fall, wenn $\underline{\mathfrak{g}}$ als H -Modul in eine direkte Summe $\underline{\mathfrak{g}} = \underline{\mathfrak{h}} \oplus \underline{\mathfrak{m}}$ zerfällt. Jede solche Zerlegung definiert einen G -invarianten Prinzipalzusammenhang bzw. eine G -äquivariante Zusammenhangs-1-Form auf G/H .

Homogene Räume, die diese Voraussetzung erfüllen, heißen *reduktiv*. Beispiele sind: H ist kompakt oder H ist offen in der Fixgruppe einer Involution von G (symmetrische Räume).

Beispiel 2.1.21. Als Spezialfall von Beispiel 2.1.20 betrachten die Hopf-Faserung aus Beispiel 1.2.8. Der Totalraum ist $G = \mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^3$ und die Strukturgruppe ist $H = \mathrm{U}(1)$, eingebettet in G vermöge

$$u \longmapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \bar{u} \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man die Involution θ von G , gegeben durch

$$\theta(g) := IgI, \quad I := \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

so ist H die Fixgruppe von θ .

Es ist $G/H \cong \mathbb{S}^2$, wie wir gesehen haben: Die Linkswirkung von G auf $\mathbb{S}^2 = \mathbb{CP}^1$ hat in homogenen Koordinaten die Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \cdot [z_0 : z_1] = [az_0 + bz_1 : -\bar{b}z_0 + \bar{a}z_1],$$

mit Isotropiegruppe H an $[0 : 1]$.

Die Liealgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ von G besteht aus den Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad a \in i\mathbb{R}, b \in \mathbb{C}.$$

Die Liealgebra $\mathfrak{h} = \mathfrak{u}(1)$ ist als die Unter algebra dieser Matrizen mit $b = 0$ realisiert.

Das Differential von θ ist durch die gleiche Formel gegeben. Der $(+1)$ -Eigenraum ist \mathfrak{h} . Der (-1) -Eigenraum \mathfrak{p} besteht aus den Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -\bar{b} & 0 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{C},$$

und ist H -invariant, da $\theta \circ \mathrm{Ad}(h) = \mathrm{Ad}(h) \circ \theta$ für alle $h \in H$. Nach Beispiel 2.1.20 definiert diese Wahl eine $\mathrm{SU}(2)$ -invariante Zusammenhangs-1-Form des $\mathrm{U}(1)$ -Prinzipalbündels $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, das durch die Hopf-Faserung gegeben ist.

Eine Basis von $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ ist gegeben durch

$$i\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_z := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Diese erzeugen Einparametergruppen $\exp(ti\sigma_{x/y/z})$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \cos t & i \sin t \\ i \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Durch Auswertung von $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} g \exp(t\sigma_{x/y/z})$ erhält man eine Basis von links-invarianten Vektorfeldern

$$\begin{aligned} L_{i\sigma_x} &= ib \frac{\partial}{\partial a} + ia \frac{\partial}{\partial b} - i\bar{a} \frac{\partial}{\partial \bar{b}} - i\bar{b} \frac{\partial}{\partial \bar{a}}, \\ L_{i\sigma_y} &= -b \frac{\partial}{\partial a} + a \frac{\partial}{\partial b} + \bar{a} \frac{\partial}{\partial \bar{b}} - \bar{b} \frac{\partial}{\partial \bar{a}}, \\ L_{i\sigma_z} &= ia \frac{\partial}{\partial a} - ib \frac{\partial}{\partial b} + i\bar{b} \frac{\partial}{\partial \bar{b}} - i\bar{a} \frac{\partial}{\partial \bar{a}}, \end{aligned}$$

in Termen der durch die Inklusion $SU(2) = \mathbb{S}(\mathbb{C}^2) \longrightarrow \mathbb{C}^2$ induzierten Koordinaten a, b, \bar{a}, \bar{b} . Die oben definierte invariante Zusammenhangs-1-Form hat also die Form

$$A(L_{i\sigma_x}) = A(L_{i\sigma_y}) = 0, \quad A(L_{i\sigma_z}) = i\sigma_z.$$

In Koordinaten erhält man

$$2A = \bar{a} da - a d\bar{a} - \bar{b} db + b d\bar{b},$$

wenn man $i\mathbb{R}$ mit \mathfrak{h} vermöge $a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix}$ identifiziert. (NB: In [4] ist hier ein Vorzeichenfehler.)

2.2 Der Raum aller Zusammenhänge

Konstruktion 2.2.1 (Das Bündel aller G -Zusammenhänge). Für jedes Vektorbündel $E \longrightarrow B$ schreiben wir

$$\Omega^1(E) := \underline{\text{Hom}}_{\mathbb{R}}(TB, E) \cong E \otimes T^*B$$

für das Vektorbündel der 1-Formen mit Werten in E .

Sei P ein G -Prinzipalbündel. Durch Anwendung dieser Konstruktion auf die Atiyah-Sequenz (2.1.4) erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^1(\text{Ad}(P)) \longrightarrow \Omega^1(\text{At}(P)) \xrightarrow{\Omega^1(\eta)} \underline{\text{End}}_{\mathbb{R}}(TB) \longrightarrow 0.$$

Sei $\mathcal{C}_P := \Omega^1(\eta)^{-1}(\text{id}_{TB})$. Mit der Projektion $\delta : \mathcal{C}_P \longrightarrow B$, die von $\Omega^1(\text{At}(P))$ induziert wird, heißt \mathcal{C}_P das *Bündel der Prinzipalzusammenhänge*.

Definition 2.2.2 (Affine Bündel). Ein *affines Bündel* $E \longrightarrow B$, modelliert auf einem \mathbb{R} -Vektorbündel $V \longrightarrow B$ ist ein Faserbündel der Faserdimension n , so dass die Fasern E_b die affinen Räume modelliert auf V_b sind und E einen Bündelatlas besitzt, dessen Cozykel zu einem Cozykel mit Werten in $\text{Aff}(n) := GL(n, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^n$ assoziiert ist. Ebenso definiert man affine Bündelmorphismen.

Proposition 2.2.3. *Der Raum \mathcal{C}_P mit der Projektion $\delta : \mathcal{C}_P \rightarrow B$ trägt eine eindeutige affine Bündelstruktur, so dass für jeden Prinzipalzusammenhang $q : TB \rightarrow \text{At}(P)$ die Abbildung*

$$\psi_q : \Omega^1(B, \text{Ad}(P)) \rightarrow \mathcal{C}_P : h \mapsto h + q$$

ein affiner Bündelisomorphismus ist.

Die globalen Schnitte von \mathcal{C}_P sind natürlich bijektiv zu den Prinzipalzusammenhängen auf P .

Beweis. Da $T\eta$ eine surjektive Submersion ist, ist \mathcal{C}_P eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\text{At}(P)$. Es gilt

$$\Gamma(B, \Omega^1(\text{At}(P))) = L_{\mathbb{R}}(TB; \text{At}(P)) = \Omega^1(B, \text{At}(P)).$$

Ein globaler Schnitt von δ ist also ein linearer Bündelmorphismus $D : TB \rightarrow \text{At}(P)$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} TB & \xrightarrow{D} & \text{At}(P) \\ & \searrow \text{id}_{TB} & \downarrow \eta \\ & & TB. \end{array}$$

Aus Korollar 2.1.16 folgt, dass die Schnitte von δ gerade die Prinzipalzusammenhänge auf P sind.

Sei q gegeben. Dann ist $\eta \circ (h + q) = \text{id}_{TB}$. Ist umgekehrt q' ein lokaler Schnitt von \mathcal{C}_P , d.h. ein Prinzipalzusammenhang auf $P|_U$ für ein offenes U , so gilt $\eta \circ (q - q') = 0$ auf $TB|_U$, also $q - q' \in L_{\mathbb{R}}(TB|_U; \text{Ad}(P)|_U)$. Damit ist ψ_q eine Bijektion und definiert eine affine Bündelstruktur auf \mathcal{C}_P .

Ist q' ein weiterer Prinzipalzusammenhang auf P , so gilt

$$\psi_{q'}^{-1} \circ \psi_q(h) = q - q' + h,$$

was ein affiner Bündelautomorphismus von $\Omega^1(B, \text{Ad}(P))$ ist. Es folgt die Behauptung. \square

Korollar 2.2.4. *Es gibt einen kanonischen Isomorphismus*

$$\delta^* \Omega^1(B, \text{Ad}(P)) \rightarrow V\mathcal{C}_P$$

von \mathbb{R} -Vektorbündeln.

Beweis. Die additive Gruppe von $\Omega^1(B, \text{Ad}(P))_b$ wirkt durch Translationen auf $(\mathcal{C}_P)_b$ und die Wirkungsabbildung liefert den Isomorphismus. \square

Korollar 2.2.5. *Das affine Bündel \mathcal{C}_P ist ein affines Unterbündel von $\Omega^1(B, \text{At}(P))$.*

Beweis. Ist q ein Prinzipalzusammenhang auf P , so ist ψ_q die Einschränkung des affinen Automorphismus $a \mapsto a + q$ von $\Omega^1(B, \text{At}(P))$. \square

Korollar 2.2.6. *Der Raum aller Prinzipalzusammenhänge auf P ist ein affiner Raum modelliert auf $\Omega^1(B, \text{Ad}(P))$.*

2.3 Paralleltransport

Sei A die Zusammenhangs-1-Form eines Prinzipalzusammenhangs auf P .

Definition 2.3.1. Ein Vektorfeld v auf P heißt *horizontal*, falls $A(v) = 0$. Es heißt *horizontaler Lift* des Vektorfelds u auf B , falls $T\pi \circ v = u \circ \pi$ gilt.

Proposition 2.3.2. *Es gilt eine Bijektion zwischen rechts-invarianten horizontalen Vektorfeldern auf P und den Vektorfeldern auf B , gegeben durch den horizontalen Lift $u \mapsto u_P$. Es gilt*

$$(u_1 + u_2)_P = (u_1)_P + (u_2)_P, \quad (fu)_P = (f \circ \pi)u_P, \quad [u_1, u_2]_P = \text{pr}_H[u_1, u_2]$$

Ist $v' \in \mathfrak{g}$ und v horizontal, so ist $[a_{v'}, v]$ horizontal. Für jedes Vektorfeld u auf B gilt $[a_{v'}, u_P] = 0$

Beweis. Die rechts-invarianten Schnitte von P sind in Bijektion zu den Schnitten von $\text{At}(P)$. Der Kern von A auf $\text{At}(P)$ ist isomorph zu TB . Dies zeigt die Existenz der Bijektion.

Die Gleichungen folgen leicht aus $T\pi \circ u_P = u \circ \pi$. Ist v horizontal, so ist $[a_{v'}, v]$ horizontal, da A äquivariant ist. Aus der Invarianz von u_P folgt $[a_{v'}, u_P] = 0$. \square

Definition 2.3.3. Sei $\gamma : I \rightarrow B$ ein stückweise glatter Weg. Ein *horizontaler Lift* $\gamma_P : I \rightarrow P$ ist ein stückweise glatter Weg mit $\pi \circ \gamma_P = \gamma$, so dass $\dot{\gamma}_P$ horizontal ist.

Proposition 2.3.4. *Sei γ ein Weg, $t_0 \in I$ und $p \in (\gamma^*P)_{t_0}$. Dann existiert genau ein horizontaler Lift γ_P mit $\gamma_P(t_0) = p$.*

Beweis. Da P lokal trivial ist, existiert ein Weg $\alpha : I \rightarrow P$, $\alpha(t_0) = p$ mit $\pi \circ \alpha = \gamma$. Gesucht ist $g : I \rightarrow G$, $g(t_0) = 1$ mit $\gamma_P := \alpha \cdot g$ horizontal, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= A_{\gamma_P(t)}(\dot{\gamma}_P(t)) = A_{\alpha(t) \cdot g(t)}(T_{\alpha(t)}a_{g(t)}\dot{\alpha}(t) + a_{T_{g(t)}L_{g(t)}^{-1}\dot{g}(t)}(\alpha(t) \cdot g(t))) \\ &= \text{Ad}(g(t)^{-1})(A(\dot{\alpha}(t))) + T_{g(t)}L_{g(t)}^{-1}\dot{g}(t). \end{aligned}$$

Dieses AWP hat eine eindeutige Lösung. \square

Konstruktion 2.3.5 (Paralleltransport). Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ ein stückweise glatter Weg. Die Abbildung

$$P_\gamma^A : (\gamma^*P)_0 \rightarrow (\gamma^*P)_1$$

definiert durch

$$P_\gamma^A(p) = \gamma_P^p(1),$$

wobei γ_P^p der eindeutige horizontale Lift von γ mit $\gamma(0) = p$ sei, heißt *Paralleltransport* entlang γ .

Proposition 2.3.6. *Es gilt*

$$P_{\gamma_1\gamma_2}^A = P_{\gamma_1}^A \circ P_{\gamma_2}^A, \quad P_{\gamma^-}^A \circ P_\gamma^A = \text{id}_{(\gamma^*P)_0}$$

Insbesondere ist P_γ^A ein Diffeomorphismus.

Beweis. Die Lösungen von AWP hängen glatt von ihren Anfangsbedingungen ab. Daher ist P_γ^A glatt. Es reicht daher, die zwei Gleichungen zu zeigen.

Offenbar ist

$$\pi \circ ((\gamma_1)_P(\gamma_2)_P) = (\gamma_1\gamma_2) \circ \pi.$$

Es reicht also zu zeigen, dass $\dot{\gamma}$ horizontal ist, wenn $\gamma := (\gamma_1)_P(\gamma_2)_P$. Es gilt aber

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{cases} 2(\dot{\gamma}_1)_P(2t), & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2(\dot{\gamma}_2)_P(2t-1), & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dies zeigt die erste Gleichung. Analog zeigt man, dass $P_{\gamma^-}^A = \text{id}_{(\gamma^*P)_0}$, woraus die zweite folgt. \square

Korollar 2.3.7. *Sei $E = P \times^G V$ ein assoziiertes (Vektor-)Bündel und γ ein stückweise glatter Weg in B . Dann induziert P_γ^A einen (linearen) Isomorphismus*

$$P_\gamma^{A,E} : (\gamma^*E)_0 \rightarrow (\gamma^*E)_1 : [p, v] \mapsto [P_\gamma^A(p), v].$$

2.4 Krümmung

Im folgenden sei $\pi : P \rightarrow B$ ein G -Prinzipalbündel und $E := P \times^G V$ ein bezüglich der Darstellung $\varrho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ assoziiertes \mathbb{K} -Vektorbündel. Die entsprechende Liealgebra-Darstellung wird mit $\varrho_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ notiert.

Definition 2.4.1. Sei $\omega \in \Omega^k(P, V)$ heißt *horizontal*, falls $\iota_v \omega = 0$ für jedes vertikale Vektorfeld v . Falls ω horizontal und G -invariant ist, so sagt man, ω sei *basisch*. Die Menge der basischen k -Formen wird $\Omega_{bas}^k(P, V)$ notiert.

Proposition 2.4.2. *Es gibt einen kanonischen Isomorphismus*

$$\Omega_{bas}^k(P, V) \cong \Omega^k(B, E) : \alpha \mapsto \alpha_B.$$

Beweis. Für $k = 0$ ist dies Proposition 1.3.3. Es gilt ähnlich

$$\Omega^k(P, V)^G = \Gamma(P, \wedge^k T^*P \otimes \underline{V})^G = \Gamma(B, \wedge^k \mathrm{At}(P)^* \otimes E),$$

da $TP/G = \mathrm{At}(P)$ und $\underline{V}/G = E$. Die basischen k -Formen entsprechen Schnitten von

$$\mathrm{Ann}_{VP/G} \wedge^k \mathrm{At}(P)^* \otimes E = \mathrm{Ann}_{\mathrm{Ad}(P)} \wedge^k \mathrm{At}(P)^* \otimes E = \wedge^k T^*B \otimes E,$$

d.h. k -Formen in $\Omega^k(B, E)$. □

Im folgenden sei A die Zusammenhangs-1-Form eines Prinzipalzusammenhangs auf P und ∇^A die nach Proposition 2.1.8 und Proposition 2.1.13 assoziierte kovariante Ableitung auf E .

Konstruktion 2.4.3. Wir definieren eine Fortsetzung

$$\nabla^A : \Omega^k(B, E) \rightarrow \Omega^{k+1}(B, E)$$

durch die graduierte Leibnizregel

$$\nabla^A(\alpha \otimes e) := d\alpha \otimes e + (-1)^k \alpha \wedge \nabla^A(e).$$

D.h., es gilt

$$[\nabla_u^A, \alpha \wedge (-)] = \iota_u d\alpha \wedge (-)$$

für alle $\alpha \in \Omega^k(B, E)$, wobei $[\cdot, \cdot]$ der graduierte Kommutator von Endomorphismen von $\Omega^\bullet(B, E)$ sei.

Definition 2.4.4 (Krümmungsform eines Prinzipalzusammenhangs). Wir definieren $F^A \in \Omega_{bas}^2(P, \mathfrak{g})$ durch

$$F^A = dA + \frac{1}{2}[A, A],$$

wobei

$$[\alpha \otimes u, \beta \otimes v] := \alpha \wedge \beta \otimes [u, v]$$

für alle $\alpha, \beta \in \Omega^\bullet(P)$, $u, v \in \mathfrak{g}$.

Die Form F^A heißt *Krümmung* von A . Der Zusammenhang A heißt *flach*, falls $F^A = 0$ gilt. Der assoziierte lineare Zusammenhang auf E heißt flach, falls $\varrho_{\mathfrak{g}}(F^A) = 0$ gilt.

Proposition 2.4.5. *Die Krümmungsform ist wohldefiniert. Für die assoziierte 2-Form $R^A := (F^A)_B \in \Omega^2(B, \text{Ad}(P))$ gilt:*

$$R^A(u, v) \wedge (-) = [\nabla_u^A, \nabla_v^A] - \nabla_{[u, v]}^A \quad (2.4.1)$$

für alle Vektorfelder u, v auf B , wobei für alle $\alpha \in \Omega^k(M, \text{Ad}(P))$ und $\beta \in \Omega^\ell(M, E)$ die Form $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(B, E)$ definiert sei durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots) := \sum_{\sigma \in S_{k, \ell}} \varepsilon(\sigma) \varrho_{\mathfrak{g}}(\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})) (\beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots))$$

mit

$$S_{k, \ell} := \{\sigma \in S_{k+\ell} \mid \sigma(1) < \dots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+\ell)\}.$$

Lemma 2.4.6. *Es gilt für alle $e \in \Gamma(B, E)$:*

$$((d + A)\varphi_e)_B = \nabla^A e.$$

Folglich ist für alle $u \in T_{\pi(p)}B$:

$$\nabla_u^A(e)(p) = [p, u_P(\varphi_e)(p)],$$

wobei u_P der horizontale Lift ist.

Beweis. Für $v \in \mathfrak{g}$, $p \in P$ gilt

$$(d\varphi_e + A(\varphi_e))(a_v(p)) = 0,$$

da φ_e invariant ist. Ist $v \in H_p$, so gilt

$$(d\varphi_e + A(\varphi_e))(v) = T_p(\varphi_e)(v),$$

da $A_p(v) = 0$. Es folgt also für alle $v \in T_pP$

$$[p, ((d + A)\varphi_e)(v)] = [p, \text{pr}_{H_p}(T_p\varphi_e(v))] = (\nabla^A e)(T_p\pi(v)).$$

Nach (2.1.3) und Proposition 2.1.13 folgt die Behauptung. \square

Beweis von Proposition 2.4.5. Es gilt für $u \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\iota_u(dA + \tfrac{1}{2}[A, A]) &= \mathcal{L}_u(A) - d\iota_u(A) + [u, A] \\ &= \mathcal{L}_u(A) - du + [u, A] = \mathcal{L}_u(A) + [u, A] = 0,\end{aligned}$$

also ist $dA + \frac{1}{2}[A, A]$ horizontal und folglich basisch.

Sei $R^A : \Omega^k(B, E) \rightarrow \Omega^{k+2}(M, E)$ definiert durch

$$R^A(u, v) := [\nabla_u^A, \nabla_v^A] - \nabla_{[u, v]}^A. \quad (2.4.2)$$

Es gilt für alle Funktionen f auf B :

$$[R^A(u, v), f] = [\nabla_u^A, [\nabla_v^A, f]] - [\nabla_v^A, [\nabla_u^A, f]] - [u, v](f) = 0.$$

Da R^A alternierend ist, ist R^A folglich durch Multiplikation mit einer 2-Form gegeben. Aus Lemma 2.4.6 folgt für beliebige Vektorfelder u, v auf B und Schnitte $e \in \Gamma(B, E)$:

$$\begin{aligned}(R^A(u, v)e)(\pi(p)) &= [p, ([u_P, v_P] - [u, v]_P)(\varphi_e)(p)] \\ &= [p, \varrho_{\mathfrak{g}}([u, v]_P - [u_P, v_P])(\varphi_e(p))].\end{aligned}$$

Andererseits gilt für horizontale Vektorfelder u, v auf P :

$$\begin{aligned}F^A(u, v) &= \iota_v \iota_u (dA + \tfrac{1}{2}[A, A]) = \iota_v \iota_u (dA) + [A(u), A(v)] \\ &= u(A(v)) - v(A(u)) - A([u, v]) \\ &= -A([u, v]) = \text{pr}_H([u, v]) - [u, v].\end{aligned}$$

Insbesondere erhält man für u_P, v_P gerade $R^A(u, v)$, d.h. es gilt $R^A = (F^A)_B$, wie behauptet. \square

Korollar 2.4.7. *Es gilt $(d + A)^2 = (F_A) \wedge (-)$ und*

$$(\nabla^A)^2 = R^A \wedge (-) = (F^A)_B \wedge (-).$$

Insbesondere ist $(\Omega^\bullet(B, E), \nabla^A)$ genau dann ein Komplex, wenn der zu A assoziierte Zusammenhang auf E flach ist.

Beweis. Es gilt $\alpha \in \Omega_{\text{bas}}^k(P, V)$:

$$(d + A)^2 \alpha = (d \circ A + A \circ d + A \circ A) \alpha = (dA + \tfrac{1}{2}[A, A]) \wedge \alpha = F^A \wedge \alpha.$$

Es folgt

$$(\nabla^A)^2(\alpha_B) = ((d + A)^2 \alpha)_B = (F^A)_B \wedge \alpha_B,$$

also die Behauptung. \square

Proposition 2.4.8. *Die Krümmungsformen F^A und R^A genügen der Bianchi-Identität:*

$$(d + A)F^A = 0, \quad \nabla^A R^A = 0.$$

Beweis. Die zweite Gleichung folgt aus der ersten durch Übergang von basischen Formen mit Werten in \mathfrak{g} zu Differentialformen auf B mit Werten in $\text{Ad}(P)$ (Lemma 2.4.6). Zum Beweis der ersten Gleichung beachte man:

$$\begin{aligned} d(dA) = 0, \quad [A, [A, A]] &= -[[A, A], A] = -[A, [A, A]] - [A, [A, A]] = 0, \\ [A, dA] &= -[dA, A], \end{aligned}$$

wie aus einfachen Gradüberlegungen folgt. Damit ergibt sich

$$(d + A)F^A = \frac{1}{2}d[A, A] + [A, dA] = \frac{1}{2}[dA, A] - \frac{1}{2}[A, dA] + [A, dA] = 0,$$

also die Behauptung. \square

2.5 Eichtransformationen

Sei $\pi : P \rightarrow B$ ein G -Prinzipalbündel.

Definition 2.5.1. Ein Bündelautomorphismus $\sigma : P \rightarrow P$ heißt *Eichtransformation*, falls G -äquivariant, d.h. falls er ein Automorphismus von G -Prinzipalbündeln ist. Die Gruppe aller solcher Eichtransformationen (Englisch: *gauge transformations*) heißt *Eichgruppe* (*gauge group*) und bezeichnen wir mit $\text{Gau}(P)$.

Proposition 2.5.2. *Sei $c : G \times G \rightarrow G$, $c(g, h) := ghg^{-1}$, die Konjugationswirkung von G auf G und $c_G(P) := P \times^{G,c} G$. Es existiert ein Gruppenisomorphismus*

$$\Gamma(B, c_G(P)) \cong \mathcal{C}^\infty(P, G)^{G,c} \rightarrow \text{Gau}(P),$$

gegeben durch $\sigma_f(p) := p \cdot f(p)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(P, G)^{G,c}$. Die Umkehrabbildung wird $\sigma \mapsto g_\sigma$ notiert.

Beweis. Es gilt $\pi(\sigma_f(p)) = \pi(p \cdot f(p)) = \pi(p)$ und

$$\sigma_f(p \cdot g) = p \cdot g f(p \cdot g) g^{-1} g = (p \cdot f(p)) \cdot g = \sigma_f(p) \cdot g,$$

also ist $\sigma_f \in \text{Gau}(P)$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \sigma_{f_1}(\sigma_{f_2}(p)) &= (p \cdot f_2(p)) \cdot f_1(p \cdot f_2(p)) \\ &= (p \cdot f_2(p)) \cdot f_2(p)^{-1} f_1(p) f_2(p) \\ &= p \cdot (f_1(p) f_2(p)) = \sigma_{f_1 f_2}(p), \end{aligned}$$

also ist durch $f \mapsto \sigma_f$ ein Gruppenmorphismus $\mathcal{C}^\infty(P, G)^G \rightarrow \text{Gau}(P)$ wohldefiniert.

Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $g_\sigma \in \mathcal{C}^\infty(P, G)^{G,c}$,

$$p \cdot g_\sigma(p) = \sigma(p), \quad \forall p \in P,$$

für alle $\sigma \in \text{Gau}(P)$. Da G einfach transitiv auf Fasern wirkt, ist f_σ dadurch eindeutig bestimmt, und in lokalen Trivialisierungen sieht man ein, dass f_σ glatt ist. Weiter gilt

$$p \cdot g_\sigma(p \cdot g)g^{-1} = \sigma(p \cdot g) \cdot g^{-1} = \sigma(p) = p \cdot g_\sigma(p),$$

also ist g_σ in der Tat äquivariant. Dies zeigt die Behauptung. \square

Proposition 2.5.3. *Sei A die Zusammenhangs-1-Form eines Prinzipalzusammenhangs auf P und $f_\sigma \in \text{Gau}(P)$. Es gilt:*

(i) *Die zurückgezogene Form $\sigma^*(A)$ ist die Zusammenhangs-1-Form eines Prinzipalzusammenhangs und es gilt*

$$\sigma^*(A) = \text{Ad}(g_\sigma^{-1})(A) + g_\sigma^*(\omega_G).$$

(ii) *Es gilt für alle Wege γ :*

$$\begin{aligned} \sigma \circ P_\gamma^{\sigma^*(A)} &= P_\gamma^A \circ \sigma, \quad (d + \sigma^*(A)) \circ \sigma^* = \sigma^* \circ (d + A), \\ F^{\sigma^*(A)} &= \sigma^*(F^A) = \text{Ad}(g_\sigma^{-1})(F^A). \end{aligned}$$

Beweis. Da σ äquivariant ist, ist dies auch $\sigma^*(A)$. Es gilt

$$\sigma^*(A)_p(a_v(p)) = A_{\sigma(p)}(T_p \sigma(a_v(p))) = A_{\sigma(p)}(a_v(\sigma(p))) = v,$$

also ist $\sigma^*(A)$ die Zusammenhangs-1-Form eines Prinzipalzusammenhangs.

Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow P$ mit $\gamma(0) = p$ und $\dot{\gamma}(0) = v \in T_p P$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T_p \sigma(v) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \gamma(t) \cdot \gamma(t) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} g_{\gamma(t)}(\gamma(t)) \\ &= T_p a_{g_\sigma(p)}(v) + a_{(T_1(L_{g_\sigma(p)}))^{-1} T_p(g_\sigma)(v)}(\sigma(p)) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \sigma^*(A)_p(v) &= A_{\sigma(p)} T_p \sigma(v) = \text{Ad}(g_\sigma(p)^{-1})(A_p(v)) + (T_1(L_{g_\sigma(p)}))^{-1} T_p(g_\sigma)(v) \\ &= (\text{Ad}(g_\sigma^{-1})(A) + \sigma^*(\omega_G))_p(v). \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung von Teil (i).

Für (ii) beachte man

$$\sigma^*(d + A)\alpha = d\sigma^*\alpha + [\sigma^*(A), \sigma^*(\alpha)].$$

Dies zeigt die zweite Gleichung. Es folgt $F^{\sigma^*(A)} = \sigma^*(F^A)$ mit Korollar 2.4.7. Weiter ist $F^{\sigma^*(A)}$ basisch, also

$$\begin{aligned} F_p^{\sigma^*(A)}(v, w) &= F_{\sigma(p)}(T_p\sigma(v), T_p\sigma(w)) \\ &= F_{\sigma(p)}^A(T_p a_{g_\sigma(p)}(v), T_p a_{g_\sigma(p)}(w)) = \text{Ad}(g_\sigma(p)^{-1})(F_p^A(v, w)), \end{aligned}$$

was die dritte Gleichung zeigt.

Für die erste beachte man, dass das horizontale Bündel $\ker(\sigma^*A)$ von A gerade $T\sigma^{-1}(\ker A)$ ist. Daraus folgt $\sigma \circ \gamma_{P,p}^{\sigma^*(A)} = \gamma_{P,\sigma(p)}^A$ und

$$\sigma(P_\gamma^{\sigma^*(A)}(p)) = (\sigma \circ \gamma_{P,p}^{\sigma^*(A)})(1) = \gamma_{P,\sigma(p)}^A(1) = P_\gamma^A(\sigma(p)).$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

2.6 U(1)-Prinzipalzusammenhänge

Im folgenden betrachten wir die Liegruppe $G = \text{U}(1)$ und ein G -Prinzipalbündel $\pi : P \rightarrow B$.

Proposition 2.6.1. *Die Faserbündel $c_G(P)$ und $\text{Ad}(P)$ sind trivial. Es ist $\text{Gau}(P) \cong \mathcal{C}^\infty(B, \text{U}(1))$ und der Raum $\Gamma(B, \mathcal{C}_P)$ aller Prinzipalzusammenhänge von P ein affiner Raum auf $\Omega^1(B, \mathfrak{u}(1)) = \Omega^1(B, i\mathbb{R})$.*

Beweis. Da G Abelsch ist, sind die Konjugationswirkung c und die adjungierte Wirkung Ad von G trivial. Es folgt

$$\begin{aligned} c_G(P) &= P \times^{\text{U}(1), c} \text{U}(1) = B \times \text{U}(1), \\ \text{Ad}(P) &= P \times^{\text{U}(1), \text{Ad}} \mathfrak{u}(1) = B \times \mathfrak{u}(1). \end{aligned}$$

Daraus folgt, unter der Verwendung von Proposition 2.5.3, Proposition 2.2.3, sowie Korollar 2.2.6, dass

$$\begin{aligned} \text{Gau}(P) &\cong \Gamma(B, c_{\text{U}(1)}(P)) = \mathcal{C}^\infty(B, \text{U}(1)), \\ \Gamma(B, \mathcal{C}_P) &\cong \Omega^1(B, \text{Ad}(P)) = \Omega^1(B, \mathfrak{u}(1)), \end{aligned}$$

wobei der erste Isomorphismus einer von Gruppen und der zweite affin ist. \square

Korollar 2.6.2. *Sei z die Einschränkung der Standardkoordinate von \mathbb{C} auf $U(1)$. Dann gilt $\omega_{U(1)} = z^{-1}dz$. Insbesondere gilt für alle $g \in C^\infty(B, U(1))$ und die zugehörige Eichtransformation $\sigma_g \in \text{Gau}(P)$:*

$$\sigma_g^*(A) = A + g^{-1}dg,$$

für jede Prinzipalzusammenhangs-1-Form auf P .

Beweis. Sei $v = i \in \mathfrak{u}(1)$ der Standarderzeuger der Rotationen auf $U(1)$. Dann gilt $R_v(e^{i\theta}) = T_1 L_{e^{i\theta}}(v) = e^{i\theta}i$, wenn man $T_{e^{i\theta}}U(1) \subseteq T_{e^{i\theta}}\mathbb{C} = \mathbb{C}$ auffasst. Damit folgt

$$i = v = \omega_{U(1)}(R_v).$$

Andererseits ist

$$dz(R_v)(e^{i\theta}) = ie^{i\theta},$$

also folgt die erste Behauptung. Aus Proposition 2.5.3 (i) folgt weiter

$$\sigma_g^*(A) = \text{Ad}(g^{-1})(A) + g^*(\omega_{U(1)}) = A + g^{-1}dg,$$

also die Behauptung. \square

Theorem 2.6.3. *Sei A eine Prinzipalzusammenhangs-1-Form auf P . Durch*

$$c_1(P) := \left[\frac{i}{2\pi} F^A \right] \in H^2(B, \mathbb{R})$$

ist eine von A unabhängige Cohomologiekategorie, die erste Chernklasse von P , definiert.

Ist ω ein Repräsentant der ersten Chernklasse von P , so gilt $\omega = \frac{i}{2\pi} F^A$ für eine bis auf geschlossene 1-Formen eindeutige Prinzipalzusammenhangs-1-Form A schreiben. Ist B einfach zusammenhängend, so ist A eindeutig bis auf Eichtransformationen.

Beweis. Sei A Prinzipalzusammenhangs-1-Form auf P . Für die Krümmungsform F^A gilt qua Definition

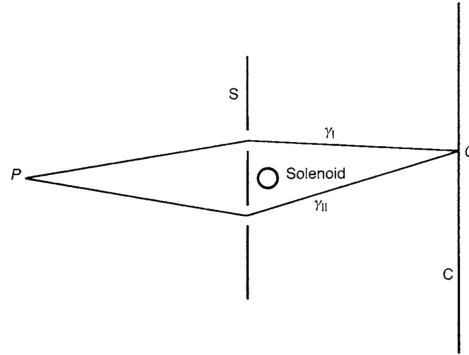
$$F^A = dA + \frac{1}{2}[A, A] = dA,$$

da $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(1)$ Abelsch ist. Folgt ist F^A exakt, insbesondere geschlossen. Weiter ist $\frac{i}{2\pi} F^A$ reell, so dass die Cohomologiekategorie $c_1(P)$ Sinn macht.

Ist A' eine weitere Prinzipalzusammenhangs-1-Form, so gilt

$$\alpha = A - A' \in \Omega^1(B, i\mathbb{R})$$

Abbildung 2.1: Der Aharonov-Bohm-Effekt (nach [10])



gemäß Proposition 2.6.1. Folglich ist

$$F^A - F^{A'} = dA - dA' = d\alpha$$

und $c_1(P)$ ist in der Tat von der Wahl von A unabhängig.

Umgekehrt sei ω ein Repräsentant von $c_1(P)$, so dass $\omega = \frac{i}{2\pi}F^A + d\alpha$ für ein $\alpha \in \Omega^1(B, \mathbb{R})$, so dass $\omega = \frac{i}{2\pi}F^{A'}$ mit $A' := A - 2\pi i\alpha$ gilt.

Gelte nun $-2\pi i\omega = F^A = F^{A'}$. Dann folgt $dA = dA'$, d.h. die 1-Form $\alpha := A' - A$ ist geschlossen. Ist B einfach zusammenhängend, so gilt $-i\alpha = dh$ für eine reellwertige Funktion h . Sei $g := e^{ih} \in \mathcal{C}^\infty(B, U(1))$. Dann gilt

$$\sigma_g^*(A) = A + g^{-1}dg = A + \alpha = A'.$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

Beispiel 2.6.4 (Aharonov-Bohm-Effekt). Sei F der elektromagnetische Feldtensor. Die Maxwell-Gleichungen implizieren $dF = 0$. Lokal ist F exakt, d.h. $F = F^A = dA$. Das Magnetfeld sei konstant in der Zeit, so dass wir in \mathbb{R}^3 arbeiten können.

Der Versuchsaufbau sei in der Abbildung 2.6.4 dargestellt. Ein Elektronenstrahl wird von links kommend an einer unendlich langen Spule (idealisiert als ein Strahl mit verschwindendem Radius), die senkrecht zur Projektionsebene verläuft, vorbeigeschickt. Durch eine geschlitzte Ebene S nehmen die Elektronen verschiedene Trajektorien. An einem Referenzpunkt P werden die sich ergebenden Interferenzmuster beobachtet.

Es sei $B = \mathbb{R}^3 \setminus (0 \times 0 \times \mathbb{R})$ und

$$A = \frac{i}{2\pi r^2} \phi(-y dx + x dy),$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Abstand zur Spule sei und ϕ der magnetische Fluss im Inneren der Schleife $\gamma := \gamma_{II}^{-1} \gamma_I$ in Einheiten von e . Es gilt $F = 0$, aber A ist nicht konstant.

Seien ψ_I, ψ_{II} die Wellenfunktionen von Elektronen, die im Fall von $A = 0$ entlang Wegen γ_I, γ_{II} verlaufen. Sei $P = B \times U(1)$ das triviale U(1)-Bündel. Es sei E das bezüglich der Standarddarstellung von U(1) auf \mathbb{C} assoziierte (triviale) Geradenbündel. Dann sind ψ_\bullet Schnitte von E .

Für "angeschaltetes" Magnetfeld $A \neq 0$ wie oben seien die entsprechenden Wellenfunktionen ψ_\bullet^A . Am Punkt $q = \gamma_\bullet(t_0)$ ist

$$\psi_\bullet^A(q) = P_{\gamma_\bullet|_{[0, t_0]}}^A(\psi_\bullet).$$

Dann gilt

$$\psi_I^A(Q) + \psi_{II}^A(Q) = P_{\gamma_{II}}^A(P_\gamma^A(\psi_I(P)) + \psi_{II}(P)),$$

d.h. die Superposition $\psi_I^A + \psi_{II}^A$ (das neue Interferenzmuster) ist nicht einfach die Eichtransformation des Interferenzmusters für $A = 0$, obwohl $F = 0$.

Um dies zu quantifizieren, reicht es, alle Bündel auf $B = \gamma \simeq \mathbb{S}^1$ einzuschränken. Hier gilt

$$A = \frac{i}{2\pi} \phi d\theta.$$

Ein Schnitt ψ ist parallel ($\nabla^A \psi = 0$) genau dann, wenn

$$d\psi = -\frac{i\phi}{2\pi} \psi d\theta.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist $\psi = e^{-i\phi\theta/2\pi}$. Es ergibt sich leicht, dass der Paralleltransport P_γ^A durch Multiplikation mit $e^{-i\phi}$ gegeben ist.

Insbesondere beobachtet man das eichäquivalente Interferenzmuster für Gesamtflüsse $\phi \equiv \phi' \pmod{2\pi\mathbb{Z}}$.

Kapitel 3

Chern-Weil-Theorie

3.1 Der Chern-Weil-Homomorphismus

Der Chern-Weil-Homomorphismus ordnet einem invarianten Polynom eine Cohomologieklassse von B zu, die nur von einem Prinzipalbündel über B abhängt. Um mit Polynomen sinnvoll arbeiten zu können, benötigen wir folgende elementare Beobachtung.

Proposition 3.1.1 (Polarisationsidentität). *Seien U, V Vektorräume über \mathbb{K} , $n \in \mathbb{N}$. Sei $\mathbb{K}[U, V]_n$ der Raum der n -homogenen Abbildungen $U \rightarrow V$ und $S^n(U^*, V)$ der Raum der symmetrischen n -linearen Abbildungen $U^n \rightarrow V$.*

Es gibt einen linearen Isomorphismus $\sigma : S^n(U, V) \rightarrow \mathbb{K}[U, V]_n$,

$$\sigma(\omega)(u) := \omega(u, \dots, u)$$

mit der Inversen τ , die wie folgt gegeben ist:

$$\tau(p)(u_1, \dots, u_n) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{I \subseteq \mathbf{n}} (-1)^{|I|} p(\sum_{j \in I} u_j), \quad (3.1.1)$$

wobei $\mathbf{n} := \{1, \dots, n\}$.

Beweis. Es gilt $\sigma \circ \tau = \text{id}$, da

$$(-1)^n n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-k)^n.$$

Für den Beweis von $\tau \circ \sigma = \text{id}$ sei zunächst $U = V = A$ eine kommutative Algebra und ω die n -fache Multiplikation der Algebra. Dann gilt $p(\omega)(u) = u^n$.

Die rechte Seite von (3.1.1) ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \sum_{r=0}^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k} \sum_{m_1 + \dots + m_r = n} \frac{1}{m_1! \dots m_r!} \binom{n-r}{k-r} u_{i_1}^{m_1} \dots u_{i_r}^{m_r} \\
&= \sum_{r=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \sum_{m_1 + \dots + m_r = n} \frac{(-1)^n}{m_1! \dots m_r!} u_{i_1}^{m_1} \dots u_{i_r}^{m_r} \sum_{k=r}^{n-r} (-1)^k \binom{n-r}{k-r} \\
&= u_1 \dots u_n,
\end{aligned}$$

denn

$$\sum_{k=r}^{n-r} (-1)^k \binom{n-r}{k-r} = (-1)^r (1-1)^{n-r} = (-1)^r \delta_{rn}.$$

Daher gilt $\tau(\sigma(\omega)) = \omega$ in A .

Seien nun U und V beliebig. Sei $A = \mathbb{K}[T_1, \dots, T_n]$ und eine lineare Abbildung $\varphi_\omega : A \rightarrow V$ definiert durch

$$\varphi_\omega(T_{i_1} \dots T_{i_n}) := \omega(u_{i_1}, \dots, u_{i_n})$$

Für $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n$ und durch 0 auf Monomen vom homogenen Grad $\neq n$. Weil φ_ω linear ist und ω n -linear, folgt

$$\varphi_\omega((T_{j_1^1} + \dots + T_{j_1^{k_1}}) \dots (T_{j_n^1} + \dots + T_{j_n^{k_n}})) = \sum_{\ell_1=1}^{k_1} \dots \sum_{\ell_n=1}^{k_n} \omega(u_{j_{\ell_1}^1}, \dots, u_{j_{\ell_n}^n}).$$

Somit

$$\begin{aligned}
\omega(u_1, \dots, u_n) &= \varphi_\omega(T_1 \dots T_n) = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{I \subseteq \mathbf{n}} (-1)^{|I|} \varphi_\omega((\sum_{j \in I} T_j)^n) \\
&= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{I \subseteq \mathbf{n}} (-1)^{|I|} \sigma(\omega)(\sum_{j \in I} T_j) = (\tau \circ \sigma)(\omega)(u_1, \dots, u_n).
\end{aligned}$$

Die zeigt die Behauptung. \square

Im folgenden identifizieren wir homogene Polynome mit den zugehörigen Multilinearformen.

Es sei weiter G eine Liegruppe mit Liealgebra \mathfrak{g} und P -ein G -Prinzipal-bündel. Es sei $\mathbb{K}[\mathfrak{g}]^G$ der Raum der G -invarianten Polynome auf \mathfrak{g} .

Proposition 3.1.2. *Sei $f \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]^G = \mathbb{K}[\mathfrak{g}, \mathbb{K}]^G$. Für jede Prinzipalzusammenhangsform A ist $f(F^A) \in \Omega_{bas}^{2\bullet}(P, \mathbb{K}) = \Omega^{2\bullet}(B, \mathbb{K})$ geschlossen. Ist A' eine weitere Prinzipalzusammenhangsform, so ist $f(F^A) - f(F^{A'})$ exakt.*

Beweis. Da f invariant ist und F^A basisch, ist es klar, dass $f(F^A)$ invariant ist. Weiter gilt für jedes vertikale Vektorfeld v

$$\iota_v(f(F^A)) = n\tilde{f}(\iota_v F^A, F^A, \dots, F^A) = 0,$$

falls f homogen vom Grad n ist. Ähnlich rechnet man

$$d(f(F^A)) = nf(d(F^A), F^A, \dots, F^A) = -\frac{n}{2}f([A, A], F^A, \dots, F^A) = 0,$$

aufgrund der Bianchi-Identität (Proposition 2.4.8) und der Invarianz.

Ist eine weitere Prinzipalzusammenhangsform A' gegeben, so definiert man $A_t := tA + (1-t)A'$. Dies ist aufgrund von Korollar 2.2.6 sinnvoll. Nun rechnet man mit Cartans Formel

$$\begin{aligned} f(F^A) - f(F^{A'}) &= \int_0^1 dt \mathcal{L}_{\frac{d}{dt}} f(F^{A_t}) = \int_0^1 dt d\iota_{\frac{d}{dt}} f(F^{A_t}) \\ &= d\left(\int_0^1 dt \iota_{\frac{d}{dt}} f(F^{A_t})\right), \end{aligned}$$

da $f(F^{A_t})$ geschlossen ist. Damit ist $f(F^A) - f(F^{A'})$ exakt. \square

Korollar 3.1.3. *Durch $W_P(f) := [(f(F^A))_B]$ ist ein Algebra-Morphismus*

$$W_P : \mathbb{K}[\mathfrak{g}]^G \longrightarrow H^{2\bullet}(B, \mathbb{K})$$

wohldefiniert. Er heißt Chern-Weil-Homomorphismus.

Beweis. Es reicht, die Multiplikativität zu beweisen. Aber offensichtlich gilt

$$(f_1 \cdot f_2)(F^A) = f_1(F^A)f_2(F^A),$$

also gilt die Behauptung. \square

Beispiel 3.1.4. Ist P trivial, so gilt $W_P(f) = 0$ für alle $f \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]_n^G$, $n > 0$. Denn P besitzt einen flachen Zusammenhang und $f(0) = 0$.

Beispiel 3.1.5. Sei $G = \mathrm{U}(1)$. Dann ist G Abelsch, also jedes Polynom invariant. Mit $f(x) := -\frac{1}{2\pi i}(x)$ gilt $f \in \mathbb{R}[\mathfrak{g}]^G$ (man beachte $\mathfrak{g} = i\mathbb{R}$). Man erhält

$$W_P(f) = c_1(P),$$

vgl. Theorem 2.6.3.

Proposition 3.1.6. *Sei $\varphi : H \rightarrow G$ ein Morphismus von Liegruppen und (Q, ψ) eine φ -Reduktion von P . Dann gilt*

$$W_P(f) = W_Q(f \circ d\varphi), \quad \forall f \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]^G.$$

Beweis. Die Korrespondenz

$$\Omega_{bas}^k(P, \mathfrak{g}) \rightarrow \Omega^k(B, \text{Ad}(P)) : \alpha \mapsto \alpha_B$$

aus Proposition 2.4.2 ist gegeben durch

$$[p, \alpha_p(v_1, \dots, v_k)] = (\alpha_B)_b(T_p\pi(v_1), \dots, T_p\pi(v_k)) \quad (3.1.2)$$

für alle $\pi(p) = b$ und $v_1, \dots, v_k \in T_pP$.

Es gilt $P = Q \times^H G$ und $TP = TQ \times^{TH} TG$, vergleiche den Beweis von Proposition 2.1.13. Sei A' eine Prinzipalzusammenhangsform auf Q und $A : TP \rightarrow \mathfrak{g}$ definiert durch

$$A_{[q,g]}([u, v]) := d\varphi(A'_q(u)) + v$$

für alle $q \in Q, g \in G, u \in T_qQ, v \in \mathfrak{g}$. Offenbar ist A G -invariant. Sei $v \in \mathfrak{g}$. Dann gilt $a_v([q, g]) = [0, v]$, also $A(a_v) = v$. Damit ist A eine Prinzipalzusammenhangsform auf P .

Weiter gilt für alle $q \in Q, u \in T_qQ$:

$$\psi^*(A)_q(u) = A_{[q,1]}([u, 0]) = d\varphi(A'_q(u)),$$

so dass $d\varphi \circ A' = \psi^*(A)$. Es gilt folglich

$$\begin{aligned} d\varphi \circ F^{A'} &= d\varphi \circ dA' + \frac{1}{2}[d\varphi \circ A', d\varphi \circ A'] \\ &= d(\psi^*(A)) + \frac{1}{2}[\psi^*(A), \psi^*(A)] = \psi^*(F^A) \end{aligned}$$

als basische Differentialformen auf Q . Aus Gleichung (3.1.2) folgt für alle $q \in Q, b := \pi_Q(q)$ und $u_1, u_2 \in T_qQ$:

$$\begin{aligned} ((\psi^*(F^A))_B)_b(T\pi_Q(u_1), T\pi_Q(u_2)) &= [q, \psi^*(F^A)_q(u_1, u_2)] \\ &= [[q, 1], F_{[q,1]}^A([u_1, 0], [u_2, 0])] \\ &= ((F^A)_B)_b(T\pi_Q(u_1), T\pi_Q(u_2)), \end{aligned}$$

da $\pi_P = \psi \circ \pi_Q$. Es folgt

$$(\psi^*(F^A))_B = (F^A)_B,$$

also gilt $(f \circ d\varphi)(F_B^{A'}) = f(F_B^A)$ als Differentialformen auf B . Dies zeigt die Behauptung. \square

Korollar 3.1.7. *Sei $\psi : P' \rightarrow P$ ein Morphismus von G -Prinzipalbündeln. Dann gilt*

$$W_P = W_{P'}.$$

Beweis. Man wende Proposition 3.1.6 für $\varphi = \text{id}_G$ an, den ψ ist eine id_G -Reduktion. \square

Proposition 3.1.8. *Sei $\varphi : B' \rightarrow B$ glatt. Dann gilt*

$$W_{\varphi^*P}(f) = \varphi^*(W_P(f)), \quad \forall f \in \mathbb{K}[\mathfrak{g}]^G.$$

Beweis. Sei A ein Prinzipalzusammenhangsform auf P und $A' := p_2^*(A)$, wobei p_2 die Projektion $\varphi^*P = B' \times_B P \rightarrow P$ bezeichne. Da p_2 G -äquivariant ist, ist A' G -invariant. Ähnlich folgt

$$T_{(b',p)p_2}(a_v(b',p)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p_2(b', p \cdot \exp(tv)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p \cdot \exp(tv) = a_v(p)$$

für alle $b' \in B$, $p \in P$, $b = \varphi(b') = \pi_P(p)$ und $v \in \mathfrak{g}$, so dass

$$A'_{(b',p)}(a_v(b',p)) = A_p(a_v(p)) = v.$$

Damit ist A' eine Prinzipalzusammenhangsform auf $\varphi^*(P)$. Weiterhilt gilt $p_2^*(F^A) = F^{A'}$ und folglich

$$\begin{aligned} ((F^{A'})_B)_{b'}(u_1, u_2) &= [p, F_{(b',p)}^{A'}((u_1, v_1), (u_2, v_2))] \\ &= [p, F_p^A(v_1, v_2)] \\ &= ((F^A)_B)_{\pi_P(p)}(T_p \pi_P(v_1), T_p \pi_P(v_2)) \\ &= ((F^A)_B)_{\varphi(b')} (T_{b'} p_1(u_1), T_{b'} p_1(u_2)) \end{aligned}$$

für alle $(b', p) \in \varphi^*(P) = B' \times_B P$, $(u_j, v_j) \in T_{b'} B' \times_{T_b B} T_p P = T_{(b',p)} \varphi^*P$, wobei $p_1 : \varphi^*(P) = B' \times_B P \rightarrow B'$ die erste Projektion sei. Es folgt

$$(F^{A'})_B = \varphi^*((F^A)_B)$$

und somit

$$f(F_B^{A'}) = f(\varphi^*((F^A)_B)) = \varphi^*(f(F^A)).$$

Dies zeigt die Behauptung. \square

3.2 Chern-Klassen

Konstruktion 3.2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ -invariante Polynome $f, f_k \in \mathbb{C}[\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})]$, $k = 0, \dots, n$, durch die Formel

$$\det\left(1 + t \frac{i}{2\pi} x\right) = \sum_{k=0}^n f_k(x) t^k, \quad f(x) := \det\left(1 + \frac{i}{2\pi} x\right) = \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

wobei $x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ eine Unbestimmte ist. Da \det unter Konjugationen invariant ist, folgt, dass die f, f_k invariante Polynome sind.

Eine einfache Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} f_k(x) &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det_{k \times k}(x_{i_a i_b}) \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\sigma \in S_k} \varepsilon(\sigma) x_{i_1 i_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_k i_{\sigma(k)}}. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Wir verwenden die folgenden Sätze, die in der allgemeinen Form auf halbeinfachen Liealgebren auf \mathbb{C} . Chevalley zurückgehen. (Der Spezialfall von $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ist sicher schon länger bekannt.)

Theorem 3.2.2. Sei $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ der Unterraum der Diagonalmatrizen. Die Einschränkungabbildung

$$\mathbb{C}[\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})]^{\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})} \longrightarrow \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]^{S_n} : p \longmapsto p|_{\mathfrak{t}}$$

ist ein Isomorphismus von Algebren.

Theorem 3.2.3. Seien für $1 \leq k \leq n$ die elementarsymmetrischen Polynome e_k definiert durch

$$e_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}.$$

Dann ist der durch Einsetzung definierte Algebromorphismus

$$\mathbb{C}[T_1, \dots, T_n] \longrightarrow \mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]^{S_n} : T_k \longmapsto e_k$$

ein Isomorphismus. M.a.W. sind die e_k algebraisch unabhängige Erzeuger der Algebra $\mathbb{C}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]^{S_n}$.

Bemerkung 3.2.4. Offenbar ist bei der Definition von f, f_k das Format n der Matrix nicht relevant, solange $k \leq n$, d.h.

$$f \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f(A).$$

Daher werden im folgenden die Polynome für verschiedene Matrixformate identifizieren.

Proposition 3.2.5. *Es gilt $f_k|_t = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k e_k$. Es folgt*

$$f \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = f(A)f(B), \quad f_k \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \sum_{p+q=k} f_p(A)f_q(B).$$

Beweis. Die Gleichung $f_k|_t = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k e_k$ folgt sofort aus Gleichung (3.2.1). Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{p+q=k} e_p(\lambda)e_q(\mu) &= \sum_{p+q=k} \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ j_1 < \dots < j_q}} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_p} \mu_{j_1} \cdots \mu_{j_q} \\ &= \sum_{\nu_1 < \dots < \nu_k} (\lambda, \mu)_{\nu_1} \cdots (\lambda, \mu)_{\nu_k} = e_k(\lambda, \mu) \end{aligned}$$

und dies zeigt die Behauptung, nach Theorem 3.2.2. \square

Konstruktion 3.2.6 (Chern-Klassen). Sei $E \rightarrow B$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang n . Für $k \leq n$ definiert man

$$c(E) := W_{\text{GL}(E)}(f) \in H^{2\bullet}(B, \mathbb{C}), \quad c_k(E) := W_{\text{GL}(E)}(f) \in H^{2k}(B, \mathbb{C}),$$

wobei f, f_k die Polynome aus Konstruktion 3.2.1 seien. Dann heißt $c(E)$ *totale Chern-Klasse* und $c_k(E)$ *k-te Chern-Klasse* von E . Die Summe $c_t(E) := \sum_k c_k(E)t^k = W_{\text{GL}(E)}(\det(1 + \frac{it}{2\pi}(\cdot)))$ heißt *Chern-Polynom*.

Ist B eine komplexe Mannigfaltigkeit, so setzen wir

$$c(B) := c(TB), \quad c_k(B) := c_k(TB).$$

Theorem 3.2.7. *Seien E, E_1, E_2 komplexes Vektorbündel auf B . Dann gilt $c(E) = 1$, wenn E trivial ist, sowie:*

- (i) *Es gilt $c(E), c_k(E) \in H^\bullet(B, \mathbb{R})$.*
- (ii) *$c(E), c_k(E)$ hängen nur von der Isomorphieklasse von E ab.*

(iii) Ist $\varphi : B' \rightarrow B$ glatt, so gilt

$$c(\varphi^* E) = \varphi^* c(E), \quad c_k(\varphi^* E) = \varphi^* c_k(E).$$

(iv) Es gilt

$$c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2), \quad c_k(E_1 \oplus E_2) = \sum_{p+q=k} c_p(E_1)c_q(E_2).$$

(v) Es gilt $c_k(E^*) = (-1)^k c_k(E)$.

Beweis. Ist E trivial, so folgt mit Beispiel 3.1.4, dass $c(E) = 1$ ist.

Nach Korollar 1.4.8 besitzt $\mathrm{GL}(E)$ eine $\mathrm{U}(n)$ -Reduktion $\mathrm{U}(E)$. Nach Proposition 3.1.6 folgt

$$c(E) = W_{\mathrm{U}(E)}(f|_{\mathfrak{u}(n)})$$

und analog für $c_k(E)$. Es gilt

$$\left(\frac{i}{2\pi}\right)^k e_k(i\lambda_1, \dots, i\lambda_n) = \left(\frac{-1}{2\pi}\right)^k e_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Da $\mathrm{U}(n) \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{u}(n) \subseteq \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ und $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}(n) \subseteq \mathfrak{t}$ Zariski-dicht sind ($\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{u}(n) + i\mathfrak{u}(n)$), folgt aus Theorem 3.2.2, dass die Restriktionsabbildung

$$\mathbb{C}[\mathfrak{u}(n)]^{\mathrm{U}(n)} \rightarrow \mathbb{C}[\mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}(n)]^{S_n}$$

injektiv ist. (Sie ist sogar ein Isomorphismus, aber das wird an dieser Stelle nicht benutzt.) Somit ist $f_k|_{\mathfrak{u}(n)}$ reell-wertig, denn $f_k|_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}(n)} = \overline{f_k|_{\mathfrak{t} \cap \mathfrak{u}(n)}}$, also gilt dies auch für f . Dies zeigt Behauptung (i).

Behauptung (ii) folgt aus Korollar 3.1.7 und Behauptung (iii) aus Proposition 3.1.8. Behauptung (iv) folgt aus Proposition 3.2.5.

Für Behauptung (v) betrachte die Abbildung $\psi : \mathrm{GL}(E^*) \rightarrow \mathrm{GL}(E)$, die einer Basis ihre duale Basis zuordnet. Es gilt $\psi(p \cdot g) = \psi(p) \cdot \varphi(g)$, wobei $\varphi(g) := (g^{-1})^t$. Mit Proposition 3.1.6 folgt

$$c_k(E^*) = W_{\mathrm{GL}(E)}(f_k \circ d\varphi) = (-1)^k c_k(E),$$

da $d\varphi = -\mathrm{id}$ auf \mathfrak{t} . □

Bemerkung 3.2.8.

(i) Die totale Chern-Klasse ist sogar eine ganzzahlige Cohomologiekategorie, was die Normierung rechtfertigt.

(ii) Sei $\Pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow B$ die Projektivierung des Vektorbündels E . Dann definiert Π^* einen injektiven Ringmorphismus $H^\bullet(B, \mathbb{R}) \rightarrow H^\bullet(\mathbb{P}(E), \mathbb{R})$. Da $\Pi^*(E)$ als eine direkte Summe von Geradenbündeln aufspaltet, gibt es nach Theorem 3.2.7 (iv) eine Faktorisierung

$$c_t(E) = (1 + tx_1) \cdots (1 + tx_n) \in H^\bullet(\mathbb{P}(E), \mathbb{R})[t].$$

Man definiert den *Chern-Charakter* $\text{ch } E$ durch

$$\text{ch}(E) := \sum_{k=1}^n \exp(x_k) \in H^\bullet(B, \mathbb{R}).$$

Der homogene Term von $\text{ch}(E)$ vom Grad k ist $\frac{1}{k!} \sum_j t_j^k$. Da sich Potenzsummen nach Theorem 3.2.3 als Funktion der elementarsymmetrischen Polynome schreiben lassen, ist $\text{ch}(E)$ tatsächlich ein Element von $H^\bullet(B, \mathbb{R})$ und nicht nur von $H^\bullet(\mathbb{P}(E), \mathbb{R})$.

Alternativ kann man definieren:

$$\text{ch}(E) := \mathcal{W}_P \left(\exp \left(\frac{\text{id}}{2\pi i} \right) \right).$$

Hierbei ist zu beachten, dass nur endlich viele Terme der formalen Potenzreihe $\exp(\cdot/2\pi i)$ in der Cohomologie $H^{2\bullet}(B, \mathbb{C})$ beitragen.

Es gilt $\text{ch}(E_1 \oplus E_2) = \text{ch}(E_1) + \text{ch}(E_2)$ und $\text{ch}(E_1 \otimes E_2) = \text{ch}(E_1) \text{ch}(E_2)$, was die Bezeichnung rechtfertigt.

(iii) Aus der Ganzzahligkeit von $c(E)$ folgt $\text{ch}(E) \in H^\bullet(B, \mathbb{Q})$.

Beispiel 3.2.9. Sei $B = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ und $\gamma_{1,n+1}$ das kanonische (tautologische) Geradenbündel auf B und $a = c_1(\gamma_{1,n+1}^*)$. Es gilt

$$c(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = (1 + a)^{n+1}, \quad c_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \binom{n+1}{k} a^k.$$

Es reicht ersteres zu zeigen.

Offenbar ist $\gamma_{1,n+1} \oplus \gamma_{1,n+1}^\perp = \theta^{n+1}$ bezüglich der Standardmetrik auf $\theta^k := B \times \mathbb{C}^k$. Aus Aufgabe 9 (Übungsblatt 2) folgt $TB = L_{\mathbb{C}}(\gamma_{1,n+1}, \gamma_{1,n+1}^\perp)$ und man sieht leicht, dass $\theta^1 = L_{\mathbb{C}}(\gamma_{1,n+1}, \gamma_{1,n+1})$. Insgesamt folgt

$$\begin{aligned} TB \oplus \theta^1 &= L_{\mathbb{C}}(\gamma_{1,n+1}; \gamma_{1,n+1}^\perp \oplus \gamma_{1,n+1}) \\ &= L_{\mathbb{C}}(\gamma_{1,n+1}, \theta^{n+1}) = (n+1) \cdot (\gamma_{1,n+1})^*. \end{aligned}$$

Mit Theorem 3.2.7 folgt

$$\begin{aligned} c(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) &= c(T\mathbb{C}\mathbb{P}^{n+1}) \cdot c(\theta^1) = c(TB \oplus \theta^1) \\ &= c(\gamma_{1,n+1}^*)^{n+1} = (1 + c_1(\gamma_{1,n+1}^*))^{n+1} = (1 + a)^{n+1}, \end{aligned}$$

da $c(E) = 1 + c_1(E) + \dots + c_k(E)$ für alle Bündel vom Rang k .

Beispiel 3.2.10. Betrachten wir den Fall $\gamma := \gamma_{1,2}$, das kanonische Bündel auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Wir identifizieren $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ durch Integration.

Dann gilt

$$c_1(\gamma) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} (F^A)_B.$$

Gemäß Beispiel 2.1.21 ist γ assoziiert zur Hopf-Faserung P und die kanonische $SU(2)$ -invariante Prinzipalzusammenhangsform A ist in komplexen Koordinaten auf $\mathbb{C}^2 \supseteq \mathbb{S}^3 = P$ gegeben durch

$$2A = \bar{a} da - a d\bar{a} - \bar{b} db + b d\bar{b}.$$

(NB: In [4] ist hier ein Vorzeichenfehler.) Damit ist

$$F^A = dA = -dad\bar{a} + dbd\bar{b}$$

als basische Differentialform auf $P = \mathbb{S}^3$. Die induzierte Differentialform auf $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ist in homogenen Koordinaten $[z : w]$ gegeben durch

$$(F^A)_B = \frac{-dad\bar{a} + dbd\bar{b}}{(|a|^2 + |b|^2)^2}.$$

Wir betrachten die Karte $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 : z \mapsto [z : 1]$. Da φ dichtes Bild hat, folgt

$$\begin{aligned} c_1(\gamma) &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \varphi^*(F^A)_B = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} \frac{dzd\bar{z}}{(1 + |z|^2)^2} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + |x|^2 + |y|^2)^2} = -2 \int_0^\infty \frac{r dr}{(1 + r^2)^2} \\ &= \int_0^\infty \arctan''(r) dr = \frac{1}{1 + r^2} \Big|_{r=0}^\infty = -1. \end{aligned}$$

Beispiel 3.2.11. Für die elementarsymmetrischen Polynome e_1 und e_2 gilt

$$e_1(\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda_j, \quad e_2(\lambda) = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2),$$

wobei $p_k = \sum_j \lambda_j^k$. Damit folgt

$$c_1(E) = \left[\frac{i}{2\pi} \operatorname{tr}(F^A) \right], \quad c_2(E) = \left[\frac{1}{8\pi^2} (\operatorname{tr}((F^A)^2) - \operatorname{tr}(F^A)^2) \right].$$

Ist E zu einem $SU(n)$ -Prinzipalbündel assoziiert, folgt insbesondere

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = \left[\frac{1}{8\pi^2} \operatorname{tr}((F^A)^2) \right].$$

3.3 Pontryagin-Klassen

Mithilfe der Chern-Klassen kann eine Reihe von Invarianten reeller Vektorbündel definiert werden.

Definition 3.3.1 (Pontryagin-Klassen). Sei $E \rightarrow B$ ein reelles Vektorbündel. Wir definieren

$$p_k(E) := (-1)^k c_{2k}(E^{\mathbb{C}}) \in H^{4k}(B, \mathbb{R}), \quad p(E) := \sum_k p_k(E) \in H^{4\bullet}(B, \mathbb{R}),$$

die k -te Pontryagin-Klasse bzw. totale Pontryagin-Klasse von E . Insbesondere setzt man $p_k(B) := p_k(TB)$ und $p(B) := p(TB)$.

Aufgrund der obigen Ausführungen (Theorem 3.2.7) gilt offenbar der folgende Satz.

Theorem 3.3.2. Seien $E, E_1, E_2 \rightarrow B$ reelle Vektorbündel. Die Cohomologieklassen $p(E), p_k(E)$ hängen nur von der Isomorphieklasse des \mathbb{R} -Vektorbündels E ab. Weiter gilt:

(i) Ist $\varphi : B' \rightarrow B$ glatt, so gilt

$$p_k(\varphi^* E) = \varphi^* p_k(E), \quad p(\varphi^* E) = \varphi^* p(E).$$

(ii) Es gilt

$$p(E_1 \oplus E_2) = p(E_1)p(E_2), \quad p_k(E_1 \oplus E_2) = \sum_{m+n=k} p_m(E_1)p_n(E_2).$$

(iii) Es gilt $p_k(E^*) = p_k(E)$, $p(E^*) = p(E)$.

Bemerkung 3.3.3. Die Definition der Pontryagin-Klassen ist aus dem folgenden Grund sinnvoll: Definiere $g_k(x)$ für $x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ durch

$$\det\left(1 - \frac{t}{2\pi}x\right) = \sum_{k=0}^n g_k(x)t^k.$$

Da $GL(E)$ eine $O(n)$ -Reduktion $O(E)$ besitzt (Korollar 1.4.8), reicht es, die Einschränkungen $g_k|_{\mathfrak{o}(n)}$ zu betrachten. Da die Determinante unter Transposition invariant ist, folgt $g_{2k+1}|_{\mathfrak{o}(n)} = 0$, also mit Proposition 3.1.6:

$$W_{GL(E)}(g_{2k+1}) = W_{O(E)}(g_{2k+1}|_{\mathfrak{o}(n)}) = 0.$$

Andererseits gilt $g_{2k} = (-1)^k f_{2k}$, so dass

$$p_k(E) = W_{GL(E)}(g_{2k}).$$

D.h., man erhält keine neuen Invarianten auf diese Weise.

Kapitel 4

Yang-Mills-Instantonen

In diesem Kapitel wollen wir einen Überblick über die Theorie der Yang-Mills-Instantonen gewinnen. Ziel ist es einzusehen, dass Sie einen endlich-dimensionalen Modulraum bilden und sie über die Konstruktion von Atiyah-Drin'feld-Hitchin-Manin zu realisieren. Sowohl aus Zeitgründen und auch weil einige der Techniken, die zu einem vollen Verständnis erforderlich sind, über den Rahmen der Vorlesung hinausgehen, werden wir werden einige Details dieser Theorie weglassen und uns mit einer überblicksartigen Zusammenfassung zufriedengeben.

4.1 Die Yang-Mills-Gleichung

Es sei $(B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$ eine kompakte, orientierte pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit von Dimension n . Sei $\text{vol}_{B,g}$ die pseudo-Riemannsche Volumenform. Der *Hodge-Operator* $*$: $\Omega_B^k \rightarrow \Omega_B^{n-k}$ sei für alle $\alpha, \beta \in \Omega_B^k$ definiert durch

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle_B \text{vol}_{B,g},$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ natürlich auf k -Formen fortgesetzt sei.

Es gilt $** = (-1)^{k(n-k)+p}$, wobei $(p, n-p)$ die Signatur von $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ sei. Ist B insbesondere 4-dimensional und Riemannsch, so gilt $** = \text{id}$ auf 2-Formen.

Sei nun G eine kompakte Liegruppe. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}}$ eine G -invariante negativ-definite symmetrische Bilinearform auf \mathfrak{g} . Ist G halb-einfach, so kann man die Killing-Form nehmen. Für $G = \text{SU}(n)$ nimmt man stattdessen die Spurform.

Wir definieren für ein G -Prinzipalbündel P und $A \in \mathcal{C}(P) = \Gamma(B, \mathcal{C}_P)$ (d.h. A ist eine Prinzipalzusammenhangsform):

$$\mathcal{L}_A := - \int_B \langle F^A, *F^A \rangle_{\mathfrak{g}},$$

das *Yang-Mills-Funktional*. (Hier und im folgenden fassen wir F^A als die 2-Form $R^A = (F^A)_B$ auf B auf.) Man kann folgenden Satz zeigen.

Proposition 4.1.1. *Die Extremalen A von \mathcal{L}_A sind genau die Lösungen der folgenden Euler-Lagrange-Gleichung:*

$$\nabla^A(*F^A) = 0. \quad (4.1.1)$$

Definition 4.1.2. Gleichung (4.1.1) heißt *Yang-Mills-Gleichung*. Zusammen mit der Bianchi-Identität $\nabla^A F^A = 0$ bilden sie die *Maxwell-Gleichungen* (im Vakuum). (Die klassischen Maxwell-Gleichungen erhält man für $G = \mathrm{U}(1)$.)

Die Yang-Mills-Gleichung ist automatisch erfüllt, wenn $*F^A = \pm F^A$. So ein A heißt *(anti-) selbstdual*.

Proposition 4.1.3. *Sei $\dim B = 4$, g Riemannsch und $G = \mathrm{SU}(n)$. Setze $k := -\int_B c_2(\mathrm{Ad} P)$. Dann ist*

$$\mathcal{L}_A \geq 8\pi^2 |k|$$

und Gleichheit liegt genau dann vor, wenn $*F^A = (\mathrm{sgn} k)F^A$.

Im Fall $|k| = 1$ heißt ein solches A (genauer: das Paar (P, A)) ein (Anti-) Instanton und für allgemeines k ein (Anti-) Multiinstanton. D.h., die (Anti-) Multiinstantonen sind die Minima des Yang-Mills-Funktional \mathcal{L}_A .

Beweis. Für 2-Formen F, F_1, F_2 schreiben wir

$$\langle F_1 | F_2 \rangle := - \int_B \langle F_1, *F_2 \rangle_{\mathfrak{g}}, \quad \|F\|^2 := \langle F | F \rangle.$$

Dann ist $\langle \cdot | \cdot \rangle$ eine positiv hermitesche Sesquilinearform.

Sei $F := F^A$ und $F = F^+ + F^-$ die Zerlegung in selbstdualen und anti-selbstdualen Teil. Dann gilt

$$\langle F^+, *F^- \rangle_{\mathfrak{g}} = -\langle F^+, F^- \rangle_{\mathfrak{g}} = -\langle F^-, *F^+ \rangle_{\mathfrak{g}},$$

also

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A = \|F\|^2 &= \|F^+\|^2 + \|F^-\|^2 \geq \|F^+\|^2 - \|F^-\|^2 \\ &= - \int_B \langle F^+ + F^-, *(F^+ - F^-) \rangle_{\mathfrak{g}} \\ &= - \int_B \langle F, F \rangle_{\mathfrak{g}} = - \int_B \mathrm{tr}(F^2) = -8\pi^2 \int_B c_2(\mathrm{Ad}(P)) \\ &= 8\pi^2 k, \end{aligned}$$

nach Beispiel 3.2.11. Auf die gleiche Weise folgt $\geq 8\pi^2 k$.

Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\|F\|^2 = \|F^+\|^2 + \|F^-\|^2 = \pm(\|F^+\|^2 - \|F^-\|^2),$$

d.h. genau dann, wenn $k \geq 0$ und $F = F^+$ oder $k \leq 0$ und $F = F^-$. Dies bedeutet gerade, dass $*F = (\operatorname{sgn} k)F$. \square

Im folgenden sei $B = \mathbb{S}^4$.

Konstruktion 4.1.4 (Twistorraum). Es gilt $\mathbb{S}^4 \cong \mathbb{H}\mathbb{P}^1 = (\mathbb{H}^2 \setminus 0)/\mathbb{H}^\times$. Die Quaternionen (vgl. Beispiel A.1.3) haben die Erzeuger

$$i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad k = ij.$$

Die von $1, i$ erzeugte reelle Unteralgebra von \mathbb{H} ist isomorph zu \mathbb{C} . Man identifiziert

$$\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{H}^2 : (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (z_1 + z_2 j, z_3 + z_4 j).$$

Dies induziert eine Projektion $p : \mathbb{P} := \mathbb{C}\mathbb{P}^3 \rightarrow B$.

Eine komplex antilineare Involution wird definiert durch

$$\sigma : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2 : h \mapsto jh.$$

(*Linksmultiplikation!*) Dies induziert eine Involution σ von \mathbb{P} über B . Die komplexen Geraden in einer quaternionischen bilden eine Kopie von $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, also ist dies der Fasertyp von p . Da i und j antikommutieren, gilt auf \mathbb{C}^2 :

$$\sigma : (z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (-\bar{z}_2, \bar{z}_1, -\bar{z}_4, \bar{z}_3)$$

und entsprechend in homogenen Koordinaten von \mathbb{P} . Die Involution σ besitzt keine Fixpunkte, lässt aber gewisse projektive Geraden invariant, nämlich genau die Fasern von p . Man nennt \mathbb{P} den (projektiven) *Twistorraum*.

Wir wollen nun diskutieren, inwiefern die Zerlegung

$$F = F^{(2,0)} + F^{(1,1)} + F^{(0,2)}$$

bezüglich komplexer Koordinaten auf B zu der Zerlegung

$$F = F_+ + F_-$$

korrespondiert. Dazu betrachten wir eine Karte $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{S}^4$.

Lemma 4.1.5. *Genau dann eine 2-Form F auf \mathbb{R}^4 anti-selbstdual, wenn sie bezüglich jeder komplexen Struktur, die mit der Metrik und Orientierung verträglich ist, vom Typ $(1, 1)$ ist.*

Beweis. Die Wahl einer mit Metrik und Orientierung kompatiblen komplexen Struktur auf \mathbb{R}^4 liefert eine Inklusion $U(2) \rightarrow SO(4)$. Alle solchen komplexen Strukturen sind $SO(4)$ -konjugiert und somit in Bijektion zu $SO(4)/U(2) \cong \mathbb{S}^2$.

Die Eigenräume von $*$ auf Λ^2 sind irreduzible Darstellungen von $SO(4)$, insbesondere invariant unter $U(2)$. Die Zerlegung

$$\Lambda^2 = \Lambda^{(2,0)} \oplus \Lambda^{(1,1)} \oplus \Lambda^{(0,1)}$$

ist $U(2)$ -invariant. Die Summanden $\Lambda^{(2,0)}$ und $\Lambda^{(0,2)}$ sind eindimensional. Dagegen hat $\Lambda^{(1,1)}$ einen invarianten Unterraum, der von der zur hermiteschen Metrik auf \mathbb{C}^2 gehörenden Form μ aufgespannt wird. Das orthogonale Komplement ist irreduzibel und von Dimension 3. Da die Form μ selbstdual ist, folgt

$$\Lambda^{(1,1)} \cap \mu^\perp = \Lambda_-^2.$$

Insbesondere ist Λ_-^2 für jede Wahl von kompatibler komplexer Struktur in $\Lambda^{(1,1)}$ enthalten. Der Schnitt der $(1, 1)$ -Räume über alle kompatiblen komplexen Strukturen ist $SO(4)$ -invariant, enthält Λ_-^2 und ist nicht gleich Λ^2 . Daher folgt die Behauptung. \square

Um diese Korrespondenz zu globalisieren, betrachten wir Vektorbündel auf dem Twistorraum \mathbb{P} .

Definition 4.1.6. Sei E ein Vektorbündel mit hermitescher Bündelmetrik. Eine Zusammenhangsform A auf E heißt *hermitesch* falls $A^* = -A$.

Der folgende Satz folgt aus dem Satz von Newlander-Nirenberg.

Theorem 4.1.7. *Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit und E ein Vektorbündel mit hermitescher Struktur.*

(i) *Ist E holomorph, so gibt es genau eine hermitesche Zusammenhangsform A vom Typ $(1, 0)$, und ihre Krümmung ist vom Typ $(1, 1)$.*

(ii) *Ist A hermitesche Zusammenhangsform mit $F^A \in \Omega^{(1,1)}(\text{End}(E))$, so hat E genau eine holomorphe Struktur, in der A vom Typ $(1, 0)$ ist.*

Korollar 4.1.8. *Sei E ein hermitesches Vektorbündel auf B mit hermiteschem Zusammenhang A . Dann ist A anti-selbstdual genau dann, wenn $V = p^*E$ mit dem horizontal gelifteten Zusammenhang p^*A holomorph ist. In diesem Fall ist $V|_{p^{-1}(z)}$ holomorph trivial für alle z .*

Beweis. Da die Fasern $p^{-1}(z) \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ die komplexen Strukturen auf $T_z B$ parametrisieren ist mit Lemma 4.1.5 F^{p^*A} genau dann vom Typ $(1, 1)$, wenn A anti-selbstduale Krümmung hat. Die Behauptung folgt aus Theorem 4.1.7. Ähnlich folgt die letzte Behauptung. \square

Korollar 4.1.8 zeigt, dass sich E aus V vermöge

$$E_z := H^0(V|_{p^{-1}(z)})$$

rekonstruieren lässt. Die Metrik erhalten wir mit dem folgenden Datum.

Definition 4.1.9. Sei V ein holomorphes Vektorbündel auf \mathbb{P} . Eine *reelle Struktur* ist eine faserweise komplex antilineare Abbildung $\tau : V \rightarrow V^*$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P} \end{array}$$

und die Paarung

$$V_{\sigma(z)} \times V_z \rightarrow \mathbb{C} : (u, v) \mapsto \tau(v)(u)$$

sesquilinear ist. Falls $V|_{p^{-1}(z)}$ für alle z holomorph trivial ist, und diese Form eine positive hermitesche Form auf $H^0(V|_{p^{-1}(z)})$ induziert, heißt τ *positiv*.

Das folgende ist der Hauptsatz dieses Abschnitts. In seiner allgemeinen Form für orientierte 4-Mannigfaltigkeiten geht er auf Atiyah-Hitchin-Singer zurück [3, Theorem 5.2].

Theorem 4.1.10. *Die Zuordnung $E \mapsto V = p^*E$ ist eine Bijektion zwischen anti-selbstdualen hermiteschen Zusammenhängen auf B modulo Eichäquivalenz und den Isomorphieklassen faserweise trivialer holomorpher Vektorbündel auf \mathbb{P} mit positiver reeller Struktur.*

Beweisskizze. Die hermitesche Struktur auf E induziert einen antilinearen Isomorphismus $E \rightarrow E^*$, dessen Lift τ definiert. Umgekehrt definiert τ eine hermitesche Bündelmetrik auf $E = \coprod_z H^0(V|_{p^{-1}(z)})$.

Es bleibt zu zeigen, dass ein holomorpher Zusammenhang auf V einen (gemäß Lemma 4.1.5 anti-selbstdualen) Zusammenhang auf E induziert.

Dies folgt aus einem Garben-Cohomologie-Argument: Das Conormalenbündel N^* von $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ in \mathbb{P} ist $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ (wobei $\mathcal{O}(-1)$ das tautologische

Bündel sei). Da $H^i(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(-1)) = 0$, folgt aus der langen exakten Sequenz in Garbencohomologie

$$H^0(\mathbb{CP}^1, V|_{p^{-1}(z)}) \cong H^0(\mathbb{CP}^1, V|_{p^{-1}(z)} \otimes \mathcal{O}/\mathcal{I}^2),$$

wobei \mathcal{I} das Verschwindungsideal von $\mathbb{CP}^1 \subseteq \mathbb{P}$ ist. Nun ist $V|_{p^{-1}(z)} \otimes \mathcal{O}/\mathcal{I}^2$ die Garbe der 1-Jets (Taylorentwicklungen der Ordnung ≤ 1) von Schnitten von $V|_{p^{-1}(z)}$. Die eindeutige Fortsetzung von Schnitten zu 1-Jets definiert einen Schnitt von $T\pi$, d.h. einen Zusammenhang. \square

4.2 Der Modulraum selbstdualer Zusammenhänge

Definition 4.2.1. Eine G -Prinzipalzusammenhangsform A auf einem G -Prinzipalbündel $P \rightarrow B$ heißt *reduzibel*, falls es eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$, eine H -Reduktion $\psi : Q \rightarrow P$ und eine H -Prinzipalzusammenhangsform A' gibt, so dass $\psi^*A = A'$. Andernfalls heißt A irreduzibel.

Den Beweis des folgenden Satzes (als Holonomie-Reduktionstheorem bekannt) überlassen wir dem Leser.

Proposition 4.2.2. *Sei $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Genau dann lässt sich eine G -Prinzipalzusammenhangsform auf H reduzieren, wenn die Paralleltransporte P_γ^A für alle Schleifen γ in B in H liegen.*

Im folgenden sei G eine kompakte, zusammenhängende einfache Liegruppe. Wir werden eine bestimmte Parametrisierung der G -Prinzipalbündel auf \mathbb{S}^k benutzen.

Konstruktion 4.2.3 (G -Prinzipalbündel auf \mathbb{S}^d). Die Sphäre ist die topologische Summe von zwei Kopien von \mathbb{R}^d (identifiziert mit offenen Umgebungen der abgeschlossenen Hemisphären) entlang $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^d$. Jedes Prinzipalbündel auf \mathbb{R}^d ist trivial. Andererseits ist $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{d-1}$ homotopieäquivalent zu \mathbb{S}^d und eine glatte Abbildung $\mathbb{S}^{d-1} \rightarrow G$ definiert eine Verklebung von zwei trivialen G -Prinzipalbündeln auf \mathbb{R}^d zu einem G -Prinzipalbündel auf \mathbb{S}^d .

Man kann zeigen, dass dies eine Bijektion

$$\pi_{d-1}(G) \longrightarrow \{G\text{-Prinzipalbündel auf } \mathbb{S}^d\} / \cong$$

definiert. Im Fall $d = 4$ sind also Isomorphieklassen von G -Prinzipalbündeln durch $\pi_3(G)$ parametrisiert.

Es ist bekannt, dass unter den Voraussetzungen an G gilt: $\pi_3(G) = \mathbb{Z}$. Der übliche Beweis (von R. Bott) benutzt Schleifenräume und Morsetheorie.

Wir zeigen dies für $G = \mathrm{SU}(n)$, mit einfacheren Methoden. Wir haben ein $\mathrm{SU}(n-1)$ -Prinzipalbündel

$$\mathrm{SU}(n) \longrightarrow \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) = \mathbb{S}^{2n-1}.$$

Aus der langen exakten Homotopiesequenz haben wir exakte Sequenzen

$$\pi_3(\mathbb{S}^{2n-1}) \longrightarrow \pi_2(\mathrm{SU}(n-1)) \longrightarrow \pi_2(\mathrm{SU}(n)) \longrightarrow \pi_2(\mathbb{S}^{2n-1}) = 0,$$

$$\pi_4(\mathbb{S}^{2n-1}) = 0 \longrightarrow \pi_3(\mathrm{SU}(n-1)) \longrightarrow \pi_3(\mathrm{SU}(n)) \longrightarrow \pi_3(\mathbb{S}^{2n-1}).$$

Für $n \geq 2$ ist $\pi_3(\mathbb{S}^{2n-1}) = 0$, also $\pi_2(\mathrm{SU}(n)) = \pi_2(\mathrm{SU}(2))$ und $\pi_3(\mathrm{SU}(n)) = \pi_3(\mathrm{SU}(3))$ für $n \geq 2$. Aber $\mathrm{SU}(2) = \mathbb{S}^3$, also $\pi_2(\mathrm{SU}(2)) = 0$ und $\pi_3(\mathrm{SU}(2)) = \mathbb{Z}$. Es folgt dass $\pi_2(\mathrm{SU}(n)) = 0$ und $\pi_3(\mathrm{SU}(n)) = \mathbb{Z}$.

Man kann durch geeignete Parametrisierung der minimalen Geodäten in $\mathrm{SU}(n)$ folgendes zeigen [3, S. 453]: Ist P das $\mathrm{SU}(n)$ -Prinzipalbündel auf \mathbb{S}^d zur Zahl $k \in \mathbb{Z} = \pi_3(\mathrm{SU}(n))$, so ist

$$\int_{\mathbb{S}^d} c_2(\mathrm{Ad} P) = 4nk.$$

Im folgenden sei $G = \mathrm{SU}(n)$, $B = \mathbb{S}^4$ und P das G -Prinzipalbündel zur ganzen Zahl $k \in \mathbb{Z} = \pi_3(G)$. Die Zahl k heißt *Instantonenzahl*.

Definition 4.2.4. Sei \mathcal{A}_+ der Raum aller selbstdualen G -Prinzipalzusammenhangsformen A auf P und \mathcal{A}_+^0 der Unterraum der irreduziblen. Die Eichgruppe $\mathrm{Gau}(P)$ wirkt natürlich auf \mathcal{A}_+ und \mathcal{A}_+^0 . Der Quotient $\mathcal{M}_k^0 := \mathcal{A}_+^0/\mathrm{Gau}(P)$ heißt *Modulraum der selbst-dualen Zusammenhänge*.

Theorem 4.2.5 (Atiyah-Hitchin-Singer). *Der Modulraum \mathcal{M}_k^0 ist leer oder eine Mannigfaltigkeit der Dimension*

$$\int_B c_2(\mathrm{Ad} P) - \dim \mathfrak{g} = 4nk - n^2 + 1.$$

Insbesondere ist diese Zahl für $G = \mathrm{SU}(2)$ gerade $8k - 3$.

Bemerkung 4.2.6. Das Resultat [3, Theorem 6.1] wird allgemeiner für eine kompakte, zusammenhängende einfache Liegruppe G und eine kompakte, selbst-duale orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit B bewiesen. In die allgemeine Formel gehen außer $c_2(\mathrm{Ad} P)$ und $\dim \mathfrak{g}$ noch die Eulerklasse und die Signatur von B ein.

Theorem 4.2.5 ist ein sehr tiefer und schwieriger Satz. Wir werden nur ganz grob die Beweisidee skizzieren.

Beweisskizze. Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

infinitesimal Berechnung des Dimension des “formalen” Tangentialraums (infinitesimale Variationen von $A \in \mathcal{A}_+^0$ modulo Eichtransformationen) mit cohomologischen Methoden.

lokal Beweis, dass die infinitesimalen Variationen von $A \in \mathcal{A}_+^0$ tatsächlich die Ableitung von Pfaden sind (nach der sogenannten Methode von Kuranishi).

global Beweis, dass dies einen kompatiblen Atlas und eine Hausdorff-Topologie auf \mathcal{M}_k^0 definiert.

Wir werden uns damit begnügen, den ersten Teil des Beweises etwas weiter zu kommentieren. Nach Korollar 2.2.6 ist die Differenz von zwei Prinzipalzusammenhangsformen in $\Omega^1(B, \text{Ad}(P))$, also ist ein Pfad im Raum \mathcal{A} der Zusammenhänge

$$A_t = A + \alpha_t, \quad \alpha_t \in \Omega^1(B, \text{Ad}(P))$$

mit

$$F^{A_t} = F^A + \nabla^A \alpha_t + \frac{1}{2}[\alpha_t, \alpha_t].$$

Angenommen $A \in \mathcal{A}_+$, so ist $A_t \in \mathcal{A}_+$ genau dann, wenn

$$\nabla_-^A(\alpha_t) + \frac{1}{2}p_-([\alpha_t, \alpha_t]) = 0,$$

wobei $p_-(\beta) := \frac{1}{2}(\beta - *\beta)$ und $\nabla_-^A := p_- \circ \nabla^A$. Für die Ableitung $\dot{\alpha}$ an $t = 0$ gilt dann

$$\nabla_-^A \dot{\alpha} = 0.$$

Angenommen, $A_t = (\sigma_t)^*(A)$, wobei $\sigma_t = \sigma_{g_t}$, $g_t \in \mathcal{C}^\infty(P, G)^{G,c} \cong \text{Gau}(P)$ (vgl. Proposition 2.5.2). Dann gilt nach Proposition 2.5.3:

$$A + \alpha_t = A_t = \text{Ad}(g_t^{-1})(A) + (g_t)^*(\omega_G) = \text{Ad}(g_t^{-1})(A) + g_t^{-1} dg_t.$$

Sei $\phi = \dot{g}_t|_{t=0} \in \mathcal{C}^\infty(P, \mathfrak{g})^G = \Omega^0(\text{Ad}(P))$. Dann gilt durch Ableitung der letzten Gleichung in $t = 0$:

$$\dot{\alpha} = [A, \phi] + d\phi = \nabla^A \phi.$$

Ist also $[A] \in \mathcal{M}_k^0$ und letzteres in der Nähe von $[A]$ eine glatte Mannigfaltigkeit, so ist $T_{[A]}\mathcal{M}_k^0$ die erste Cohomologie des Komplexes

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\text{Ad } P) \xrightarrow{\nabla^A} \Omega^1(\text{Ad } P) \xrightarrow{\nabla_-^A} \Omega_-^2(\text{Ad } P) \longrightarrow 0.$$

(Dies ist ein Komplex, da $\nabla_-^A \circ \nabla^A = F_-^A \wedge (-) = 0$ nach Korollar 2.4.7 und weil $\nabla^A \in \mathcal{A}_+$.)

Dies ist ein *elliptischer Komplex* (d.h. die Operatoren sind Differentialoperatoren von Ordnung 1 und ihre Hauptsymbole geben eine Sequenz von Vektorbündeln, die exakt außerhalb des Nullschnitts sind). Es folgt daher, dass die Dimensionen h^j , $j = 0, 1, 2$, der Cohomologiegruppen H^j endlichdimensional sind. Als Konsequenz des *Indexsatzes von Atiyah-Singer* folgt, dass $h^0 - h^1 + h^2$ (die Eulercharakteristik des Komplexes) ein universelles Polynom in $\int_B c_0(P) = \dim \mathfrak{g}$ und $\int_B c_2(P) = 4nk$ ist, d.h.

$$-h^0 + h^1 - h^2 = ank + b \dim \mathfrak{g}.$$

Ist $k = 0$, d.h. P trivial, so gilt

$$H^j = H^j(\mathbb{S}^4) \otimes \mathfrak{g} \quad (j = 0, 1), \quad H^2 \subseteq H^2(\mathbb{S}^4) \otimes \mathfrak{g}.$$

Da $H^j(\mathbb{S}^4) = 0$ für $j = 1, 2$ und $H^0(\mathbb{S}^4) = \mathbb{R}$, folgt $b = -1$.

Sei nun $k > 0$. Das *Holonomieprinzip* besagt, dass die kovariant konstanten Schnitte von $\text{Ad } P$ (d.h. der Kern von ∇^A) genau bijektiv zu den Vektoren $v \in (\text{Ad } P)_b \cong \mathfrak{g}$ sind, die von der Wirkung der P_γ^A für alle Schleifen γ festgehalten werden. Da A nach Voraussetzung irreduzibel ist, ist die Dimension

$$h^0 = \dim H^0 = \dim \ker \nabla^A = 0.$$

Man kann ebenfalls zeigen, dass $h^2 = 0$ ist. Dies benutzt die Identifizierung von H^2 mit dem Kern eines Differentialoperators der Form $\Delta + \frac{1}{3}\text{scal}$, wobei Δ ein (nicht-negativer) Laplaceoperator auf einem geeigneten Vektorbündel ist und $\text{scal} = \frac{1}{12} > 0$.

Die gewünschte Dimension ist also

$$\dim T_{[A]}\mathcal{M}_k^0 = h^1 = ank - \dim \mathfrak{g}.$$

Um Wert von a zu berechnen, reicht es also, \mathcal{M}_k^0 für ein k zu bestimmen, oder die Konstanten im Satz von Atiyah-Singer genauer zu untersuchen. Im Originalbeweis wird die letztere Strategie verfolgt.

Wir werden im folgenden eine explizite Parametrisierung (nach Atiyah-Drinfel'd-Hitchin-Manin) angeben, die zeigt, dass für $\text{SU}(2)$ die gesuchte Dimension $8k - 3$ ist, d.h., dass $a = 4$ gilt. \square

4.3 Die ADHM-Konstruktion von Instantonen

Im folgenden sei $G := \mathrm{SU}(2)$, $B := \mathbb{S}^4 = \mathbb{H}\mathbb{P}^1$ und $\mathbb{P} = \mathbb{C}\mathbb{P}^3$ mit der Projektion $p : \mathbb{P} \rightarrow B$ aus Konstruktion 4.1.4.

Um k -Antiinstantonen mit Strukturgruppe $\mathrm{SU}(2)$ auf B zu konstruieren, reicht es nach Theorem 4.1.10, holomorphe Vektorbündel mit Strukturgruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$ mit positiver reeller Struktur auf \mathbb{P} zu konstruieren. Dies geschieht mit der sogenannten Horrocks-Konstruktion.

Konstruktion 4.3.1 (Horrocks-Konstruktion). Seien V, W komplexe Vektorräume der Dimension $2k + 2$ bzw. k , wobei V mit einer nicht-ausgearteten schiefsymmetrischen Bilinearform $(\cdot|\cdot)$ versehen sei. Weiterhin sei

$$A(z) = \sum_{j=1}^4 z_j A_j : W \rightarrow V$$

komplex linear für alle $z = (z_1, \dots, z_4) \in \mathbb{C}^4 = \mathbb{H}^2$. Für alle $W \subseteq V$ sei $U^\circ := \{v \in V \mid (v|U) = 0\}$. Wir machen die folgende Annahme an $U_z := A(z)W \subseteq V$:

$$\forall z \in \mathbb{C}^4 = \mathbb{H}^2, z \neq 0 : \dim U_z = k, U_z \subseteq U_z^\circ, \quad (4.3.1)$$

m.a.W. U_z sollen isotrope Unterräume der Dimension k sein.

Wir definieren einen 2-dimensionalen Vektorraum E_z durch

$$E_z := U_z^\circ / U_z.$$

Dann gilt: Durch $(\cdot|\cdot)$ wird auf E_z eine nicht-ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform induziert; zudem ist $E_z = E_{\lambda z}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Somit ist durch E_z ein holomorphes Vektorbündel $E \rightarrow \mathbb{P}$ definiert.

Wir identifizieren V mit \mathbb{H}^{k+1} . Definieren wir $\tau = \tau_V : V \rightarrow V$ durch Linksmultiplikation mit j , so ist durch

$$\langle v|\tau(v') \rangle := (v|v')$$

eine hermitesche Metrik $\langle \cdot|\cdot \rangle$ definieren, von der wir annehmen, dass es die Standardmetrik ist. Nun nehmen wir an, dass einen komplex antilinearen τ_W von W gibt, so dass $\tau_W^2 = 1$ und

$$\tau_V(A(z)w) = A(\sigma(z))\tau_W(w). \quad (4.3.2)$$

Dies impliziert

$$\tau_V(U_z) = U_{\sigma(z)}, \quad U_z^\circ = U_{\sigma(z)}^\perp,$$

wobei $(-)^{\perp}$ das Orthogonalkomplement bezüglich $\langle \cdot | \cdot \rangle$ bezeichne. Insbesondere ist $U_z^{\circ} \cap U_{\sigma(z)} = 0$ und

$$U_w^{\circ} = U_w \oplus U_z^{\circ} \cap U_{\sigma(z)}^{\circ} \quad (4.3.3)$$

für $w = z$. Dies gilt aber auch $w = \sigma(z)$ und somit für alle $w \in p^{-1}(p(z))$, denn $p^{-1}(z) = \{[\lambda z] \mid \lambda \in \mathbb{H}^{\times}\}$, aber $[\sigma(z)] = [jz]$ und $[\lambda z] = [z]$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}^{\times}$. Es folgt, dass $E|_{p^{-1}(p(z))}$ trivial ist. Damit erfüllt E die Voraussetzung von Theorem 4.1.10.

Proposition 4.3.2. *Das Bündel R auf B , das dem holomorphen Vektorbündel E auf \mathbb{P} aus Konstruktion 4.3.1 entspricht, hat Instantonenzahl $-k$.*

Beweis. Wir identifizieren R mit seinem Zusammenhang. Es gilt nach Konstruktion, dass $R_z = H^0(E|_{p^{-1}(z)})$, also ist R nach Gleichung (4.3.3) das Unterbündel von $B \times V$ mit Faser $R_z = U_z^{\circ} \cap U_{\sigma(z)}^{\circ}$. Da der Zusammenhang A auf R durch die Bedingung eindeutig festgelegt ist, dass $p^*(A)$ unitär und holomorph ist, muss es derjenige sein vom trivialen Zusammenhang auf $B \times V$ durch Orthogonalprojektion zustande kommt.

Dann ist aber $R^{\perp} \cong \bigoplus_{j=1}^k \gamma$, wobei γ das tautologische Bündel auf $B = \mathbb{H}\mathbb{P}^1$ ist (die Faser an einem Punkt ist die entsprechende quaternionische Gerade). Die Identifikation erfolgt durch Wahl einer quaternionischen Basis.

Mit der Notation

$$\begin{aligned} dx &:= dx_1 + dx_2i + dx_3j + dx_4k, & d\bar{x} &:= dx_1 - dx_2i - dx_3j - dx_4k, \\ \Im(f(x)dx) &:= \frac{1}{2}(f(x)dx - d\bar{x}\overline{f(x)}) \end{aligned}$$

kann man zeigen, dass γ die $SU(2)$ -Prinzipalzusammenhangsform

$$A = \Im\left(\frac{x d\bar{x}}{1 + |x|^2}\right)$$

trägt, mit selbstdualer Krümmung

$$F^A = \frac{dx \wedge d\bar{x}}{(1 + |x|^2)^2}.$$

(Hier benutzen wir die Identifizierung $\mathfrak{su}(2) = \Im\mathbb{H}$.)

Für $\|x\| \rightarrow \infty$ gilt

$$A \simeq \Im\bar{x}^{-1}dx = g^{-1}dg = \sigma_g^*(0),$$

wobei $g(x) := \bar{x}\|x\|^{-1}$ sei.

Mit anderen Worten ist $(\sigma_{g^{-1}})^*(A) \simeq 0$ und γ assoziiert zu dem $SU(2)$ -Bündel, dass der Homotopieklasse der Abbildung

$$g^{-1}|_{\mathbb{S}^3} : \mathbb{S}^3 \longrightarrow SU(2)$$

entspricht. Aber $g^{-1}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{H}$. Folglich ist $c_2(\gamma) = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$ und es folgt die Behauptung. \square

Wir identifizieren nun die Daten, die diese k -Antiinstantonen parametrisieren. Wie zuvor betrachten wir $V = \mathbb{H}^{k+1}$. Es gilt $\mathbb{C}^4 \otimes_{\mathbb{C}} W \cong \mathbb{H}^2 \otimes_{\mathbb{R}} W_{\mathbb{R}}$ mit $W_{\mathbb{R}} := \text{Fix}_{\tau_W}(W)$. Dann entspricht τ_W der Linksmultiplikation mit j und Gleichung (4.3.2) bedeutet gerade, dass A linkslinear über \mathbb{H} ist. Folglich ist

$$A(x, y) = xC + yD \quad \forall z = (x, y) \in \mathbb{H}^2$$

für gewisse $C, D \in \mathbb{H}^{k \times (k+2)}$. Gleichung (4.3.1) bedeutet, dass

$$A(x, y)A(x, y)^* = (xC + yD)(C^*\bar{x} + D^*\bar{y}) \in GL(k, \mathbb{R}) \quad (4.3.4)$$

für alle $(x, y) \neq 0$.

Theorem 4.3.3 (Atiyah-Drinfel'd-Hitchin-Manin). *Sei $k \in \mathbb{N}$. Die k -Yang-Mills-Antinstantonen (P, A) sind vermöge der ADHM-Konstruktion eindeutig gegeben durch die Matrizen $(C, D) \in \mathbb{H}^{k \times (k+2)}$, die der Bedingung (4.3.4) genügen. Weiter sind (P, A) und (P', A') eichäquivalent genau dann, wenn für ihre Parameter (C, D) und (C', D') gilt:*

$$(xC' + yD') = T(xC + yD)S$$

für gewisse $T \in GL(k, \mathbb{R})$, $T \in \text{USp}(2k + 2)$. Folglich ist $\dim \mathcal{M}_k^0 = 8k - 3$.

Beweis. Die Dimension folgt durch Abzählung und dass dies bereits alle Instantonen sind, ist ein nicht-triviales cohomologisches Argument, für Details siehe [1] oder [2]. \square

Bemerkung 4.3.4. Explizit lässt sich (P, A) in Abhängigkeit von (C, D) wie folgt schreiben: Das Prinzipalbündel zu (C, D) ist

$$P = \{([x, y], v) \in \mathbb{S}^4 \times \mathbb{H}^{k+1} \mid (xC + yD)^*v = 0, v^*v = 1\}$$

mit der natürlichen Wirkung von $SU(2) = \{u \in \mathbb{H} \mid u^*u = 1\}$ durch Rechtsmultiplikation in der Faser.

Bis auf Äquivalenz kann man annehmen, dass

$$C = \begin{pmatrix} 1_k \\ 0_{1 \times k} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} X \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Mit $\xi = x/y$ (definiert auf der affinen offenen Menge $(\cong \mathbb{H})$ der $[x, y]$, $y \neq 0$) gilt

$$P_\xi = \left\{ \begin{pmatrix} Y \\ \zeta \end{pmatrix} \mid (\xi + X)^* Y + \eta^* \zeta = 0 \right\}.$$

Ist $\xi + X$ invertierbar, so ist eine lokale Schnittbasis von P gegeben durch

$$s(\xi) = \begin{pmatrix} (\xi + X)^{-1*} \eta^* (1 + \eta(\xi + X)^{-1}(\xi + X)^{-1*} \eta^*)^{-1/2} \\ (1 + \eta(\xi + X)^{-1}(\xi + X)^{-1*} \eta^*)^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

In der entsprechenden lokalen Trivialisierung von P ist A gegeben durch

$$A = \frac{dv^* v - v^* dv}{2(1 + v^* v)}, \quad v(\xi) = -(\xi + X)^{-1*} \eta^*.$$

Anhang A

Liegruppen

A.1 Liegruppen und Liealgebren

Definition A.1.1 (Liegruppen und Liealgebren). Eine *Liegruppe* G ist eine Gruppe mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur, deren Operationen

$$m : G \times G \longrightarrow G, \quad i : G \longrightarrow G, \quad 1 : * \longrightarrow G$$

glatt sind. Eine *Liealgebra* \mathfrak{g} ein \mathbb{R} -Vektorraum mit einer bilinearen Operation $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, die folgenden Gleichungen genügt:

$$[x, y] = -[y, x], \quad [[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$$

für alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Bemerkung A.1.2. Sei G eine Gruppe mit Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass die Multiplikation m glatt ist. Dann ist G eine Liegruppe. Die Glattheit von i folgt aus dem Satz über die Umkehrfunktion.

Beispiel A.1.3. Sei \mathbb{F} eine reelle Divisionsalgebra, d.h. $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Dabei ist die *Quaternionenalgebra* \mathbb{H} definiert als die Menge der 2×2 Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},$$

für $a, b \in \mathbb{C}$, zusammen mit dem Matrixprodukt als Multiplikation.

Die Menge $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ der rechtslinearen Endomorphismen des \mathbb{F} -Rechtsvektorraums \mathbb{F}^n ist eine Liegruppe.

Im folgenden sei G eine Liegruppe.

Konstruktion A.1.4 (Die Liealgebra einer Liegruppe). Ein Vektorfeld v auf G heißt *links-invariant*, falls

$$[v, L_g] = 0$$

für alle $g \in G$. Dabei ist für $g \in G$ und eine Funktion f auf G die *Linkstranslation* L_g definiert durch

$$(L_g f)(h) := f(gh).$$

Damit ist v links-invariant genau dann, wenn

$$v(L_g f)(h) = v(f)(gh)$$

für alle g, h und alle Funktionen f auf G gilt.

Wir definieren die *Liealgebra* \mathfrak{g} von G durch

$$\mathfrak{g} = \{v \mid v \text{ links-invariantes Vektorfeld}\}.$$

Unter der Kommutatorklammer von Vektorfeldern ist dies eine Liealgebra.

Im folgenden sei \mathfrak{g} stets die Liealgebra von G .

Proposition A.1.5 (Die Liealgebra als Tangentialraum). *Sei G eine Liegruppe. Die Abbildung $v \mapsto v(1_G)$, die \mathfrak{g} nach $T_1 G$ abbildet, ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Insbesondere gilt*

$$\dim \mathfrak{g} = \dim G.$$

Ist $\varphi : G \rightarrow H$ ein Morphismus von Liegruppen, d.h. ein glatter Gruppenhomomorphismus, so ist $d\varphi := T_1\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ ein Morphismus von Liealgebren, d.h.

$$d\varphi([x, y]) = [d\varphi(x), d\varphi(y)]$$

für alle $x, y \in \mathfrak{g}$.

Korollar A.1.6 (Die Trivialisierung von TG). *Sei G eine Liegruppe. Die Abbildung, die $(g, v) \in G \times \mathfrak{g}$ auf den Tangentialvektor $v(g) \in T_g G$ abbildet, ist ein G -äquivarianter Isomorphismus $G \times \mathfrak{g} \rightarrow TG$ von Vektorbündeln über G .*

Beispiel A.1.7. Die Liealgebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ ist als Vektorraum isomorph zu der Menge aller $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in \mathbb{F} .

Proposition A.1.8 (Die Lieklammer als infinitesimaler Kommutator). *Die Ableitung der Gruppenkommutator-Abbildung*

$$G \times G \longrightarrow G : (g, h) \longmapsto ghg^{-1}h^{-1}$$

an $(1, 1)$ ist die Lieklammer $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$.

Korollar A.1.9 (Die adjungierte Wirkung). *Für die adjungierte Wirkung $\text{Ad} : G \longrightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ von G auf \mathfrak{g} ist $\text{Ad}(g)(x)$ definiert als die Ableitung von $h \longmapsto ghg^{-1}$ an 1 in Richtung $x \in T_1G = \mathfrak{g}$.*

Dann ist die Ableitung von $(g, x) \longmapsto \text{Ad}(g)(x)$ nach dem Argument g and der Stelle 1 gerade die Lieklammer.

Beispiel A.1.10. Sei $G = \text{GL}_n(\mathbb{F})$. Seien γ, δ Wege durch $\gamma(0) = \delta(0) = 1$ mit $\dot{\gamma}(0) = x, \dot{\delta}(0) = y$. Für $g \in G$ ist

$$\text{Ad}(g)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g\gamma(t)g^{-1} = gxg^{-1}$$

und

$$[x, y] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}(\gamma(t))(y) = xy - yx.$$

D.h., die Liealgebrastruktur von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{H})$ ist durch den Matrix-Kommutator gegeben.

Proposition A.1.11 (Die Exponentialabbildung). *Sei $v \in \mathfrak{g}$. Dann ist v vollständig. Sei $\exp(tv)$ der Fluss von v . Dies definiert eine Abbildung*

$$\exp = \exp_G : \mathfrak{g} \longrightarrow G,$$

die Exponentialabbildung von G , deren Ableitung in 0 gerade $\text{id}_{\mathfrak{g}}$ ist. Insbesondere ist \exp_G ein lokaler Diffeomorphismus.

Ist $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Morphismus von Liegruppen, so ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{h} \\ \exp_G \downarrow & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{\varphi} & H. \end{array}$$

Korollar A.1.12. *Jede Liegruppe besitzt eine eindeutige analytische Struktur, bezüglich derer alle Morphismen von Liegruppen analytisch werden.*

Korollar A.1.13. Sei $H \rightarrow G$ eine Lie-Untergruppe, d.h. ein Morphismus von Liegruppen, der eine injektive Immersion ist. Dann ist H eine initiale Untermannigfaltigkeit, d.h. eine beliebige Abbildung $\varphi : M \rightarrow H$ von einer Mannigfaltigkeit M ist glatt genau dann, wenn die induzierte Abbildung $M \rightarrow G$ glatt ist.

Beispiel A.1.14. Die Exponentialabbildung von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ ist das Matrixexponential

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Proposition A.1.15. Sei G eine Liegruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Dann ist H eine Untermannigfaltigkeit in der Relativtopologie und mit dieser Struktur eine Liegruppe. Die Liealgebra \mathfrak{h} von H ist

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall t \in \mathbb{R} : \exp(tx) \in H\}.$$

Beispiel A.1.16. Für $\mathbb{F} \neq \mathbb{H}$ sei $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ die Menge der $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ mit $\det_{\mathbb{F}} g = 1$. Für $\mathbb{F} = \mathbb{F}$ definiert man

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{H}) := \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}).$$

Dann ist $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F})$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ und folglich eine Liegruppe. Die Liealgebra ist

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{F}) = \{x \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \mid \mathrm{tr} x = 0\} \quad (\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) = \mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{gl}_n(\mathbb{H}).$$

A.2 Quotienten, homogene Räume und Bahnen

Theorem A.2.1 (Godement). Sei M eine Mannigfaltigkeit und R eine Äquivalenzrelation. Man versehe den Quotientenraum X/R mit der Quotiententopologie und bezeichne die kanonische Projektion mit $\pi : X \rightarrow X/R$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Der Quotient X/R ist mit der gegebenen Topologie eine glatte Mannigfaltigkeit und $\pi : X \rightarrow X/R$ ist eine Submersion.

(ii) Die Teilmenge $R \subseteq X \times X$ ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und die Einschränkung von p_2 auf R ist eine Submersion $R \rightarrow X$.

In diesem Fall ist die Mannigfaltigkeitsstruktur auf X/R mit (i) eindeutig.

Definition A.2.2 (Eigenschaften von Wirkungen). Sei $a : M \times G \rightarrow M$ eine glatte Rechtswirkung der Liegruppe G auf der Mannigfaltigkeit M . Betrachte die Abbildung

$$(p_1, a) : M \times G \rightarrow M \times M : (x, g) \mapsto (x, x \cdot g).$$

Dann heißt die Wirkung a *frei*, wenn (p_1, a) injektiv ist und *transitiv*, wenn (p_1, a) surjektiv ist. Sie heißt *einfach transitiv*, wenn (p_1, a) bijektiv ist. Sie heißt *eigentlich*, wenn (p_1, a) eine eigentliche Abbildung ist (d.h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt).

Die Wirkung a heißt *effektiv*, wenn die induzierte Abbildung $G \rightarrow \text{Diff}(M) : g \mapsto (x \mapsto x \cdot g)$ injektiv ist.

Bemerkung A.2.3. Eine freie Wirkung ist eigentlich genau dann, wenn (p_1, a) eine abgeschlossene Abbildung ist.

Korollar A.2.4 (Quotienten freier eigentlicher Wirkungen). Sei $a : M \times G \rightarrow M$ eine freie eigentliche Rechtswirkung der Liegruppe G auf der Mannigfaltigkeit M . Dann induziert (p_1, a) einen Diffeomorphismus $M \times G \rightarrow \text{im}(p_1, a) = R$ auf eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $M \times M$, die die Voraussetzungen von Theorem A.2.1 erfüllt.

Insbesondere existiert X/G als Mannigfaltigkeit und die kanonische Projektion $\pi : X \rightarrow X/G$ ist eine Submersion. Folglich gilt

$$\dim X/G = \dim X - \dim G.$$

Beispiel A.2.5. Sei G eine Liegruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Dann ist die Wirkung von H auf G durch Rechtstranslationen frei und eigentlich, so dass der Quotient G/H existiert und $\pi : G \rightarrow G/H$ eine Submersion ist. Es gilt

$$\dim G/H = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}.$$

Solche Quotienten bezeichnet man als *homogene Räume*.

Konstruktion A.2.6 (Bahnen von Wirkungen). Sei $a : M \times G \rightarrow M$ eine Rechtswirkung und $x \in M$. Sei

$$G_x := \{g \in G \mid x \cdot g = x\}$$

die *Isotropiegruppe* von der Wirkung an x . Sie ist in G abgeschlossen, also eine Liegruppe. Die Wirkung induziert eine Immersion

$$a_x : G/G_x \rightarrow M : [g] \mapsto x \cdot g,$$

die *Bahnabbildung* heißt. Ihr Bild $x \cdot G$ heißt die *Bahn* von G durch x .

Beispiel A.2.7. Der Torus ist $T := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Sei $\theta \in (0, 1)$ eine irrationale Zahl. Die additive Gruppe $G = (\mathbb{R}, +)$ wirkt auf T durch $[z] \cdot x := [ze^{2\pi i\theta x}]$. Die Bahnabbildung $\mathbb{R} \rightarrow T$ durch einen beliebigen Punkt x hat dichtes Bild. Insbesondere trägt G/G_x nicht die Relativtopologie von T . (Denn G/G_x ist lokal-kompakt und eine Teilmenge von T ist lokal-kompakt in der Relativtopologie genau dann, wenn lokal abgeschlossen.)

Proposition A.2.8. *Sei $a : M \times G \rightarrow M$ eine transitive Wirkung und $x \in M$. Dann ist die Bahnabbildung $a_x : G/G_x \rightarrow M$ ein Isomorphismus von Mannigfaltigkeiten.*

Anhang B

Der Satz von Frobenius

B.1 Distributionen und Blätterungen

Definition B.1.1 (Distributionen). Sei M eine Mannigfaltigkeit und \mathcal{D} eine Menge von Vektorfeldern, die unter der Multiplikation mit Funktionen abgeschlossen ist. Dann heißt \mathcal{D} eine *Distribution*, falls die Funktion

$$M \longrightarrow \mathbb{N} : x \longmapsto \dim\{v(x) \mid v \in \mathcal{D}\}$$

lokal konstant ist.

Eine \mathcal{D} -Karte ist ein Tripel (P, p, Q) , wobei $P \subseteq M$ offen ist, Q eine Mannigfaltigkeit und $p : P \longrightarrow Q$ eine Submersion, so dass $\mathcal{D}|_P$ die Menge der Vektorfelder v ist, für die

$$v(f \circ p) = 0$$

für alle Funktionen f auf Q gilt. Das Paar (M, \mathcal{D}) heißt eine *Blätterung*, falls M eine offene Überdeckung durch \mathcal{D} -Karten hat.

Eine Teilmenge $E \subseteq TM$ heißt *Totalraum* von \mathcal{D} , falls für alle offenen $U \subseteq M$ gilt: $\mathcal{D}|_U = \Gamma(U, E) = \{s \in \Gamma(U, TM) \mid s(U) \subseteq E\}$. Offenbar besitzt \mathcal{D} einen Totalraum, der ein Unterbündel von TM ist, genau dann, wenn \mathcal{D} eine Blätterung ist.

Theorem B.1.2 (Frobenius). Sei M eine Mannigfaltigkeit und \mathcal{D} eine Distribution. Dann ist (M, \mathcal{D}) eine Blätterung genau dann, wenn \mathcal{D} involutiv ist, d.h. wenn $[\mathcal{D}, \mathcal{D}] \subseteq \mathcal{D}$ gilt.

Beweisskizze. Man zeigt durch lineare Algebra, dass es lokale Schnittbasen $(e_a)_{a \leq k}$ von \mathcal{D} und lokale Koordinatensysteme (x^b) gibt, so dass $[e_a, e_{a'}] = 0$ und $(e_a) \cup (\frac{\partial}{\partial x^b})_{b > k}$ eine lokale Schnittbasis des Tangentialbündels ist.

Sei $\phi_a(t)(x)$ der Fluss von e_a . Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times \{x^a = 0 \mid a \leq k\} &\longrightarrow M \\ (t_1, \dots, t_k, x) &\longmapsto (\phi_1(t_1) \circ \dots \circ \phi_k(t_k))(x) \end{aligned}$$

nach der Vorüberlegung ein lokaler Isomorphismus. Die erste Projektion auf dem Definitionsbereich von ϕ definiert die gesuchte Submersion. \square

Index

- (Anti-) Instanton, 58
- (Anti-) Multiinstanton, 58
- Abbildung
 - über B , 5
- adjungierte Wirkung, 73
- affines Bündel, 31
- Atiyah-Bündel, 27
- Bündel der Prinzipalzusammenhänge, 31
- Bündelkarte, 5
- Bündelmorphismus, 5
- Bahn, 75
- Bahnabbildung, 75
- basische k -Formen, 35
- Bianchi-Identität, 38
- Blätterung, 77
- Bündelatlas, 6
- Bündelatlas
 - äquivalent, 14
 - \mathbb{K} -linear, 14
 - linear kompatible Trivialisierung, 14
- Bündelmetrik, 17
 - positiv, 17
- Chern-Charakter, 53
- Chern-Klasse
 - k -te, 51
 - totale, 51
- Chern-Polynom, 51
- Chern-Weil-Homomorphismus, 47
- Chernklasse
 - erste, 41
- Cozykelbedingung, 7
- Distribution, 77
 - involutiv, 77
 - \mathcal{D} -Karte, 77
 - Totalraum, 77
- effektiv, 75
- Eichgruppe, 38
- Eichtransformation, 38
- elliptischer Komplex, 65
- Erweiterung, 19
- Exponentialabbildung, 73
- Faserbündel
 - Basis, 5
 - isomorph, 5, 6
 - Totalraum, 5
 - trivial, 6
- Faserbündel
 - assoziiert, 12
- Fasertyp, 5
- Fundamentalektorfeld, 26
- gauge group, 38
- G -Cozykel, 10
- Geradenbündel, 14

- G -Mannigfaltigkeit, 12
- Graßmann-Mannigfaltigkeit, 12
- Hodge-Operator, 57
- homogener Raum, 75
- Hopf-Faserung, 12
- horizontale k -Formen, 35
- horizontaler Lift, 33
- horizontales Vektorfeld, 33
- Instantonenzahl, 63
- Isotropiegruppe, 75
- kovariante Ableitung, 24
- Lie-Untergruppe, 74
- Liealgebra, 71
 - einer Liegruppe, 72
- Liegruppe, 71
- links-invariantes Vektorfeld, 72
- Linkstranslation, 72
- lokale Trivialisierung, 5
- Maurer-Cartan-Form, 29
- Maxwell-Gleichungen, 58
- Modulraum der selbst-dualen Zusammenhänge, 63
- Morphismus
 - von Liealgebren, 72
 - von Liegruppen, 72
 - von Prinzipalbündeln, 9
- Paralleltransport, 34
- Pontryagin-Klasse
 - k -te, 55
 - totale, 55
- Prinzipalbündel, 9
- Prinzipalbündel
 - Reduktion, 17
- Prinzipalzusammenhang, 25
 - flach, 36
 - Krümmung, 36
- Quaternionen, 71
- Rahmenbündel, 11
- reduktiver homogener Raum, 29
- reduzibel, 62
- reelle Struktur, 61
 - positive, 61
- selbstdual, 58
- Sequenz
 - spaltend, 24
 - Splitting, 24
- Stiefelmannigfaltigkeit, 11
- Torus, 76
- Twistorraum, 59
- Vektorbündel
 - direkte Summe, 15
 - duales, 16
 - G -äquivariant, 28
 - Homomorphismenbündel, 16
 - \mathbb{K} -, 14
 - n -linearer Morphismus, 15
 - Rang, 14
 - Tensorprodukt, 15
- vertikales Tangentialbündel, 23
- Wirkung
 - eigentlich, 75
 - einfach transitiv, 75
 - frei, 75
 - transitiv, 75
- Yang-Mills-Funktional, 58
- Yang-Mills-Gleichung, 58
- Zusammenhang, 24
 - hermitescher, 60
 - linear, 24

- Zusammenhangs-1-Form, 24
- Index der Konstruktionen
 - Assoziiertes Faserbündel, 12
 - Bahnen von Wirkungen, 75
 - Chern-Klassen, 51
 - Das Bündel aller G -Zusammenhänge, 31
 - Das vertikale Tangentialbündel, 23
 - Die Liealgebra einer Liegruppe, 72
 - Horrocks-Konstruktion, 66
 - Konstruktionen mit Vektorbündeln, 15
 - Paralleltransport, 34
 - Twistorraum, 59
 - G -Cozyklen, 10
 - G -Prinzipalbündel auf S^d , 62
 - Bündelatlas und Cozyklen, 6
- Index der Korollare
 - Die Trivialisierung von TG , 72
 - Die adjungierte Wirkung, 73
 - Quotienten freier eigentlicher Wirkungen, 75
 - Pullback-Faserbündel, 8
 - Pullback-Prinzipalbündel, 11
- Index der Definitionen
 - Distributionen, 77
 - Eigenschaften von Wirkungen, 75
 - Fundamentalvektorfelder, 25
 - Krümmungsform eines Prinzipalzusammenhangs, 36
- Liegruppen und Liealgebren, 71
- Lineare Zusammenhänge und kovariante Ableitungen, 24
- Multilineare Bündelmorphismen, 15
- Pontryagin-Klassen, 55
- Prinzipalzusammenhänge, 25
- Reduktionen von Prinzipalbündeln, 17
- Vektorbündel, 14
- Zusammenhänge, 24
- Faserbündel, 5
- Prinzipalbündel, 9
- Affine Bündel, 31
- Index der Beispiele
 - Aharonov-Bohm-Effekt, 42
- Index der Propositionen
 - Atiyah-Sequenz, 27
 - Die Exponentialabbildung, 73
 - Die Liealgebra als Tangentialraum, 72
 - Die Lieklammer als infinitesimaler Kommutator, 73
 - Polarisationsidentität, 45
 - Faserbündel und Cozyklen, 7
 - Prinzipalbündel und G -Cozyklen, 10
- Index der Theoreme
 - Atiyah-Hitchin-Singer, 63
 - Frobenius, 77
 - Godement, 74
 - Atiyah-Drinfel'd-Hitchin-Manin, 68

Literaturverzeichnis

- [1] M.F. Atiyah, *Geometry of Yang–Mills Fields*, Mathematical problems in theoretical physics (Proc. Internat. Conf., Univ. Rome, Rome, 1977), Lecture Notes in Phys., vol. 80, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978, pp. 216–221.
- [2] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, V.G. Drinfel’d, und Yu.I. Manin, *Construction of instantons*, Phys. Lett. A **65** (1978), no. 3, 185–187, DOI 10.1016/0375-9601(78)90141-X.
- [3] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin, und I.M. Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **362** (1978), no. 1711, 425–461, DOI 10.1098/rspa.1978.0143.
- [4] H. Baum, *Eichfeldtheorie*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [5] I. Biswas, *The Atiyah bundle and connections on a principal bundle*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **120** (2010), no. 3, 299–316, DOI 10.1007/s12044-010-0029-9.
- [6] P.L. García, *Gauge algebras, curvature and symplectic structure*, J. Differential Geometry **12** (1977), no. 2, 209–227.
- [7] J. Hilgert und K.-H. Neeb, *Structure and Geometry of Lie Groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2012.
- [8] I. Kolář, P.W. Michor, und J. Slovák, *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [9] H.B. Lawson Jr. und M.-L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series, vol. 38, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [10] M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, 2nd ed., IOP Publishing, Bristol, Philadelphia, 2003.
- [11] C. Nash und S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, London, Orlando, San Diego, New York, Austin, Boston, Sydney, Tokyo, Toronto, 1983.
- [12] K.-H. Neeb, *Differential Topology of Fiber Bundles*, Darmstadt, 2008. Vorlesungsskript.
- [13] J. Rawnsley, *Differential Geometry of Instantons*, Comm. Dublin Inst. Adv. Sci., vol. 25, 1978.
- [14] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Mathematical Series, vol. 14, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1951.
- [15] L. Waelbroeck, *Topological Vector Spaces and Algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 230, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.