ÜBUNGEN ZUR "EICHFELDTHEORIE"
ABGABE: 06.07.2015

Aufgabe 22. Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe und $\pi\colon P \to T$ ein G-Prinzipalbündel über dem Torus $T = S^1 \times S^1$ mit flachem Zusammnhang $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$. Sei $p_0 \in \pi^{-1}((1,1))$ und $\alpha = \mathrm{hol}_{\omega,p_0}$ wie in Aufgabe 20 definiert. Man zeige:

(a) Die Zuordnung $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^2 \times G \to P$, $(v, g) \mapsto h_{\gamma_v,p_0}(1) \cdot g$, definiert eine glatte G-äquivariante Submersion und $d\tilde{f}(T\mathbb{R}^2) \subset H$. Hierbei bezeichnet γ_v den Pfad $t \mapsto p(t \cdot v)$, wobei $p(x, y) = (\exp(2\pi ix), \exp(2\pi iy))$.

(b) Es gilt $\tilde{f}(v + (n, m), g) = \tilde{f}(v, \alpha(n, m) \cdot g)$ und $\tilde{f}$ induziert einen Isomorphismus von G-Prinzipalbündeln $f\colon \mathbb{R}^2 \times_{\pi_1(T,m_0)} G \to P$. Ferner gilt $f^*(\omega) = \omega_\alpha$, wobei ω_α der Zusammenhang aus Aufgabe 21 ist.

Aufgabe 23. Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Die Gruppe G wirkt auf $\mathrm{Hom}(\pi_1(T, m_0), G)$ vermöge $\alpha \mapsto g \cdot \alpha \cdot g^{-1}$. Man benutze die Aufgaben 21 und 22, um eine Bijektion zwischen $\mathrm{Hom}(\pi_1(T, m_0), G)/G$ und der Menge

$$\{\text{G-Prinzipalbündel } P \text{ über } T \text{ mit flachem Prinzipalzusammenhang}\}/\text{Isomorphismus}$$

zu konstruieren. Was ist die Verbindung zu Aufgabe 16?