

ÜBUNGEN ZUR “EICHFELDTHEORIE”
ABGABE: 03.05.2015

Aufgabe 10. (4 Punkte) Sei M eine Mannigfaltigkeit der Dimension n . Dann heißt M orientierbar, falls $GL(M)$ eine Reduktion der Strukturgruppe zu $GL(n)^+ = \{A \in GL(n) \mid \det(A) > 0\}$ besitzt. Man zeige: M ist genau dann orientierbar, wenn das Geradenbündel $\Lambda^n(TM) \rightarrow M$ trivial ist.

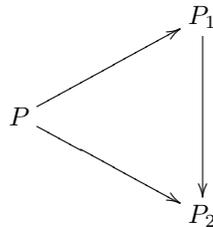
Hinweis: Man kann etwa die Charakterisierung aus Korollar 1.4.9 benutzen. Hilfreich ist es folgende Räume und Abbildungen zu betrachten: Für $v \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n) - \{0\}$ induziert die Abbildung $A \mapsto \det(A)/|\det(A)|v$ Isomorphismen $GL(n)/GL(n)^+ \cong \{\pm v\}$ und $GL(n)/SL(n) \cong \Lambda^n(\mathbb{R}^n) - \{0\}$. Ferner definiert $GL(n)^+ \rightarrow SL(n)$, $A \mapsto \det(A)^{-n}A$, eine Retraktion zur Inklusion $SL(n) \rightarrow GL(n)^+$.

Aufgabe 11. (4 Punkte) Sei Σ eine orientierte Fläche mit Riemannscher Metrik g . Man definiere auf

$$S(T\Sigma) = \{v \in T\Sigma \mid \|v\|^2 = 1\} \longrightarrow \Sigma$$

die Struktur eines $SO(2)$ -Prinzipalbündels.

Aufgabe 12. (4 Punkte) Sei $P \rightarrow M$ ein H -Prinzipalbündel und sei $\alpha: H \rightarrow G$ ein Morphismus von Lie-Gruppen. Eine Erweiterung von $P \rightarrow M$ entlang α ist ein G -Prinzipalbündel $P' \rightarrow M$ zusammen mit einer H -äquivarianten Bündelabbildung $P \rightarrow P'$. Hierbei wirkt H auf P' durch α . Zwei Erweiterungen $P_1 \rightarrow M$ und $P_2 \rightarrow M$ entlang α heißen äquivalent, falls es eine G -äquivariante Abbildung $P_1 \rightarrow P_2$ gibt, so dass das Diagramm



kommutiert. Man zeige: Eine Erweiterung von $P \rightarrow M$ entlang α existiert und je zwei Erweiterungen entlang α sind äquivalent.

Hinweis: Für die Existenz statte man das Faserbündel $P \times^H G \rightarrow M$ (siehe Proposition 1.3.2) mit der Struktur eines G -Prinzipalbündels aus. Für die Eindeutigkeit betrachte man für eine Erweiterung $i: P \rightarrow P'$ die Abbildung $P \times G \rightarrow P'$, $(p, g) \rightarrow i(p) \cdot g$.