

**ÜBUNGEN ZUR “EICHFELDTHEORIE”**  
**ABGABE: 03.05.2015**

**Aufgabe 10.** (4 Punkte) Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Dann heißt  $M$  orientierbar, falls  $GL(M)$  eine Reduktion der Strukturgruppe zu  $GL(n)^+ = \{A \in GL(n) \mid \det(A) > 0\}$  besitzt. Man zeige:  $M$  ist genau dann orientierbar, wenn das Geradenbündel  $\Lambda^n(TM) \rightarrow M$  trivial ist.

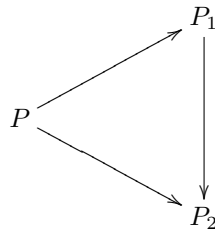
Hinweis: Man kann etwa die Charakterisierung aus Korollar 1.4.9 benutzen. Hilfreich ist es folgende Räume und Abbildungen zu betrachten: Für  $v \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n) - \{0\}$  induziert die Abbildung  $A \mapsto \det(A)/|\det(A)|v$  Isomorphismen  $GL(n)/GL(n)^+ \cong \{\pm v\}$  und  $GL(n)/SL(n) \cong \Lambda^n(\mathbb{R}^n) - \{0\}$ . Ferner definiert  $GL(n)^+ \rightarrow SL(n)$ ,  $A \mapsto \det(A)^{-n}A$ , eine Retraktion zur Inklusion  $SL(n) \rightarrow GL(n)^+$ .

**Aufgabe 11.** (4 Punkte) Sei  $\Sigma$  eine orientierte Fläche mit Riemannscher Metrik  $g$ . Man definiere auf

$$S(T\Sigma) = \{v \in T\Sigma \mid \|v\|^2 = 1\} \longrightarrow \Sigma$$

die Struktur eines  $SO(2)$ -Prinzipalbündels.

**Aufgabe 12.** (4 Punkte) Sei  $P \rightarrow M$  ein  $H$ -Prinzipalbündel und sei  $\alpha: H \rightarrow G$  ein Morphismus von Lie-Gruppen. Eine Erweiterung von  $P \rightarrow M$  entlang  $\alpha$  ist ein  $G$ -Prinzipalbündel  $P' \rightarrow M$  zusammen mit einer  $H$ -äquivarianten Bündelabbildung  $P \rightarrow P'$ . Hierbei wirkt  $H$  auf  $P'$  durch  $\alpha$ . Zwei Erweiterungen  $P_1 \rightarrow M$  und  $P_2 \rightarrow M$  entlang  $\alpha$  heißen äquivalent, falls es eine  $G$ -äquivariante Abbildung  $P_1 \rightarrow P_2$  gibt, so dass das Diagramm



kommutiert. Man zeige: Eine Erweiterung von  $P \rightarrow M$  entlang  $\alpha$  existiert und je zwei Erweiterungen entlang  $\alpha$  sind äquivalent.

Hinweis: Für die Existenz statte man das Faserbündel  $P \times^H G \rightarrow M$  (siehe Proposition 1.3.2) mit der Struktur eines  $G$ -Prinzipalbündels aus. Für die Eindeutigkeit betrachte man für eine Erweiterung  $i: P \rightarrow P'$  die Abbildung  $P \times G \rightarrow P'$ ,  $(p, g) \rightarrow i(p) \cdot g$ .