ÜBUNGEN ZUR "EICHFELDTHEORIE"
ABGABE: 27.04.2015

Aufgabe 7. (4 Punkte) Sei $M = G/H$ ein homogener Raum. Ein homogenes Vektorbündel über M ist ein Vektorbündel $E \to M$ zusammen mit einer Wirkung von G auf dem Totalraum E, so dass gilt:

(1) Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \times M & \longrightarrow & M \end{array}$$

kommutiert.

(2) Für jedes $m \in M$ und $g \in G$ ist die Abbildung $E_m \to E_{g \cdot m}$, $v \mapsto g \cdot v$, linear.

Man zeige, dass jedes homogene Vektorbündel isomorph zu einem zum H-Prinzipalbündel $H \to G \to G/H$ assoziierten Vektorbündel ist. Man folgere, dass $T(G/H) \cong G \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, wobei H auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ durch Konjugation wirkt.

Hinweis: Da H trivial auf $eH \in M$ wirkt, liefert die G-Wirkung auf E eine lineare H-Wirkung auf E_{eH}. Dann ist $E \cong G \times_H E_{eH}$.

Aufgabe 8. (4 Punkte) Sei $1 \leq k \leq n$ und sei $\pi \colon V_{k,n}(\mathbb{C}) \to Gr_{k,n}(\mathbb{C})$ das in der Vorlesung konstruierte $U(k)$-Prinzipalbündel über der Graßmannschen.

(1) Sei $\gamma_{k,n}$ das assoziierte Vektorbündel $V_{k,n}(\mathbb{C}) \times_{U(k)} \mathbb{C}^k \to Gr_{k,n}(\mathbb{C})$, wobei $U(k)$ durch die Standarddarstellung auf $\mathbb{C}^k$ wirkt. Man zeige, dass die Abbildung $(f, v) \mapsto (\pi(f), f(v))$, $(f, v) \in V_{k,n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^k$, eine Einbettung von $\gamma_{k,n}$ in das triviale Vektorbündel $Gr_{k,n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \to Gr_{k,n}(\mathbb{C})$ induziert und schließe, dass der Totalraum von $\gamma_{k,n}$ durch $\{(x, v) \in Gr_{k,n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \mid v \in x\}$ gegeben ist.

(2) Sei nun $k = 1$ und für $l \in \mathbb{Z}$ bezeichne $\mathbb{C}(l)$ die durch $(\lambda, z) \mapsto \lambda^l z$, $(\lambda, z) \in U(1) \times \mathbb{C}$, gegebene 1-dimensionale $U(1)$-Darstellung. Sei μ_l das assoziierte Vektorbündel $V_{1,n}(\mathbb{C}) \times_{U(1)} \mathbb{C}(l) \to Gr_{1,n}(\mathbb{C})$. Man zeige, dass $\mu_l \cong \gamma_{1,n}^{\otimes l}$ für $l \geq 0$ und $\mu_l \cong (\bar{\gamma}_{1,n})^{\otimes(-l)}$ für $l \leq 0$.

Aufgabe 9. (4 Punkte) Sei $\gamma_{1,n+1}^{\perp}$ das orthogonale Komplementbündel zu $\gamma_{1,n+1}$, das heißt der Totalraum ist gegeben durch $\{(x, v) \in Gr_{1,n+1}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^{n+1} \mid x \perp v\}$. Man konstruiere einen Isomorphismus von komplexen Vektorbündeln

$$T\mathbb{C}P^n \cong \mathrm{Hom}(\gamma_{1,n+1}, \gamma_{1,n+1}^{\perp}).$$

Hinweis: Man schreibe $\gamma_{1,n+1}$ als assoziiertes Bündel

$$U(1+n) \times_{U(1) \times U(n)} \mathbb{C} \to \mathbb{C}P^n,$$

wobei $U(1) \times U(n)$ auf $\mathbb{C}$ durch $(\lambda, A, z) \mapsto \lambda z$ wirkt. Ähnlich kann mit $\gamma_{1,n+1}^{\perp}$ verfahren werden. Dann wende man Aufgabe 7 auf den homogenen Raum $\mathbb{C}P^n \cong U(1+n)/U(1) \times U(n)$ an und zeige, dass der Isomorphismus komplex linear ist.