Übungen zur "Eichfeldtheorie"

April 10, 2015

Aufgabe 1. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit Rahmenbündel $GL(M) \to M$. Definiere

$$O(M,g) := \bigcup_{m \in M} \{(m, (v_1, \ldots, v_n)) \in GL(M)_m \mid (v_1, \ldots, v_n) \text{ orthonormal bezüglich } g_m\} \subseteq GL(M).$$

Zeige:

(1) $O(M, g) \subseteq GL(M)$ ist eine Untermannigfaltigkeit und die Projektion $O(M, g) \to M$ ist glatt.

(2) Die Rechtswirkung von $GL(n)$ auf $GL(M)$ schränkt sich zu einer glatten Rechtswirkung von $O(n) \leqslant GL(n)$ auf $O(M, g)$ ein.

(3) Bezüglich dieser Wirkung ist $O(M, g) \to M$ ein $O(n)$-Prinzipalbündel.

Aufgabe 2. Betrachte die n-Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{1+n}$ mit der von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}^{1+n}$ induzierten Metrik g. Sei $O(n) \to O(1 + n)$ die Inklusion $A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

(1) Zeige, dass $A \mapsto A(e_1)$ einen Diffeomorphismus $O(1 + n)/O(n) \cong S^n$ induziert, wobei $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{1+n}$.

(2) Konstruiere einen Isomorphismus von $O(n)$-Prinzipalbündeln

$$\begin{tikzcd} O(1+n) \arrow[rr] \arrow[dr] & & O(S^n, g) \arrow[dl] \\ & S^n. & \end{tikzcd}$$

Aufgabe 3. Welche der Vektorbündel TS^n ($n \in \{1, 2, 3\}$) und $TS^n \oplus \underline{\mathbb{R}}$ ($n \in \mathbb{N}$) sind trivial?