Unitäre Darstellungen reduktiver Lie-Gruppen
Köln, WS 2010/11

Dr. A. Alldridge

26. Januar 2011

Dieses Skriptum ist nicht korrekturgelesen und ausschließlich zum internen Gebrauch bestimmt.

Inhalt

1 Kompakte Liegruppen und der Satz von Borel-Weil

1.1 Der Satz von Peter-Weyl

Sei G im folgenden eine *kompakte Gruppe*, d.h.

(i). G ist ein kompakter (Hausdorff-)Raum und

(ii). mit einer stetigen Gruppenstruktur versehen; d.h. es sind $1 \in G$ und stetige Abbildungen $m : G \times G \to G$, $i : G \to G$ gegeben, die den gewöhnlichen Gruppengesetzen genügen.

Man weiß, dass es ein eindeutiges Radon-Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf G gibt, das unter G invariant ist, d.h.

$$\int_G f(gh)\,d\mu(h) = \int_G f(h)\,d\mu(h) = \int_G f(hg)\,d\mu(h) \quad \text{für alle} \quad f \in C(G)\ .$$

Dies ist das *Haarmaß*. Im weiteren schreiben wir $dg = d\mu(g)$.

Definition 1.1.1. Sei V ein Hausdorffscher topologischer $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ein Gruppen-Homomorphismus $\pi : G \to \mathrm{GL}(V)$ heißt *Darstellung* von G, falls die Abbildung

$$G \times V \to V : (g, v) \mapsto \pi(g)v$$

stetig ist. Falls V ein Hilbertraum ist, so heißt die Darstellung *unitär*, falls das Skalarprodukt $(|)$ unter G invariant ist, d.h.

$$(\pi(g)u|\pi(g)v) = (u|v) \quad \text{für alle} \quad u, v \in V\ ,\ g \in G\ .$$

Lemma 1.1.2. Die Darstellung (V, π) sei endlich-dimensional. Dann besitzt V ein Skalarprodukt, welches unter G invariant ist.

Beweis. Sei $\langle|\rangle$ irgendein Skalarprodukt auf V. Setze

$$(u|v) = \int_G \langle \pi(g)u|\pi(g)v\rangle\,dg \quad \text{für alle} \quad u, v \in V\ .$$

Offenbar definiert dies eine Sesquilinearform. Sei $u \in V \setminus 0$. Da G kompakt ist, ist

$$\varepsilon = \inf_{g \in G} \langle \pi(g)u|\pi(g)u\rangle > 0\ .$$

Es folgt $(u|u) \geqslant \varepsilon \cdot \mathrm{vol}(G) > 0$, also ist $(|)$ ein Skalarprodukt. Schließlich gilt

$$(\pi(g)u|\pi(g)v) = \int_G \langle \pi(hg)u|\pi(hg)v\rangle\,dh = \int_G \langle \pi(h)u|\pi(h)v\rangle\,dh = (u|v)\ .$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 1.1.3. Was endlich-dimensionale Darstellungen kompakter Gruppen angeht, kann man sich also auf unitäre beschränken.

Definition 1.1.4. Sind V_1, V_2 Darstellungen von G, so definiert man

$$\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = \{T \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2) \mid T \text{ stetig}, \ \forall g \in G : \pi_2(g)T = T\pi_1(g)\} .$$

Insbesondere setzt man für $V = V_1 = V_2$: $\mathrm{End}_G(V) = \mathrm{Hom}_G(V, V)$.
Eine unitäre Darstellung $V \neq 0$ von G heißt *irreduzibel*, falls es keinen abgeschlossenen invarianten Unterraum $0 \neq U \subsetneq V$ gibt. Dabei heißt U invariant, falls $\pi(g)u \in U$, wann immer $u \in U$, $g \in G$.

Den folgenden Satz bezeichnet man als *Schursches Lemma*.

Satz 1.1.5. Seien V, V_j, $j = 1, 2$, unitäre Darstellungen.

(i). Genau dann ist π irreduzibel, wenn $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C} \cdot 1$.

(ii). Seien V_j, $j = 1, 2$, irreduzibel. Es gilt $\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \leqslant 1$. Wenn diese Zahl $\neq 0$ ist, so besteht $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$ aus den Vielfachen einer surjektiven Isometrie.

Lemma 1.1.6. Sei V eine unitäre Darstellung. Ist $U \subset V$ ein invarianter Unterraum, so ist $U^\perp$ ebenfalls invariant.

Beweis von Satz 1.1.5. (i). Ist π reduzibel, so gibt es eine nicht-triviale G-invariante Projektion (Lemma 1.1.6). Umgekehrt sei $T \in \mathrm{End}_G(V)$, $T \notin \mathbb{C} \cdot 1$. Dann ist T die Summe zweier selbstadjungierter Elemente von $\mathrm{End}_G(V)$, die nicht beide in $\mathbb{C} \cdot 1$ liegen. O.B.d.A. ist T also selbstadjungiert. Jeder Operator $\pi(g)$, $g \in G$, kommutiert mit T, also auch mit jeder Spektralprojektion von T (Spektralsatz für s.a. Operatoren). Daher liegen diese in $\mathrm{End}_G(V)$. Somit hat V nicht-triviale invariante Unterräume.
(ii). Sei $T \in \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$. Dann gilt $T^*T \in \mathrm{End}_G(V_1)$ und $TT^* \in \mathrm{End}_G(V_2)$, also gibt es nach (i) Konstanten $c_1, c_2 \geqslant 0$ mit $T^*T = c_1$ und $TT^* = c_2$. Da $\|T^*T\| = \|TT^*\|$, folgt $c := c_1 = c_2$. Somit ist $T = 0$, oder $c^{-1/2}T$ ist unitär. Ist also $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) \neq 0$, so ist jedes Element dieses Raums ein skalares Vielfaches eines unitären Operators. Insbesondere ist jedes G-äquivariante $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ entweder $= 0$ oder invertierbar.
Seien $T_1, T_2 \neq 0$ G-äquivariant. Dann ist $T_2^{-1}T_1 \in \mathrm{End}_G(V_1)$, so dass $T_1 = cT_2$ für eine Konstante c. □

Bemerkung 1.1.7. Das Schursche Lemma zeigt insbesondere, dass die unitäre Struktur auf einer endlich-dimensionalen irreduziblen G-Darstellung eindeutig ist. Wie wir später einsehen werden, sind alle irreduziblen G-Darstellungen endlich-dimensional.

Korollar 1.1.8. Ist G Abelsch, so ist jede irreduzible unitäre Darstellung eindimensional.

Beweis. Sei (V, π) eine irreduzible unitäre Darstellung. Es ist $\pi(G) \subset \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_V$. Offenbar ist also *jeder* beschränkte Endomorphismus in $\mathrm{End}_G(V) = \mathbb{C} \cdot \mathrm{id}_V$. Somit $0 < \dim V \leqslant \dim \mathrm{End}_{\mathrm{stetig}}(V) = 1$. □

Das folgende Korollar beinhaltet die sogenannten *Schurschen Orthogonalitätsrelationen.*

Korollar 1.1.9. Seien (V_j, π_j), $j = 1, 2$, irreduzibel und $u_1, v_1 \in V_1$, $u_2, v_2 \in V_2$. Es gilt

$$\int_G \overline{(\pi_1(g)u_1|v_1)}(\pi_2(g)u_2|v_2)\,dg = \begin{cases} 0 & V_1 \not\cong V_2\ , \\ \dfrac{\overline{(u_1|u_2)}(v_1|v_2)}{\dim V} & V_1 = V_2 = V\ . \end{cases}$$

Beweis. Man hat

$$\begin{aligned} \int_G \overline{(\pi_1(g)u_1|v_1)}(\pi_2(g)u_2|v_2)\,dg &= \int (v_1|\pi_1(g)u_1)(\pi(g)u_2|v_2)\,dg \\ &= \int (v_1|\pi_1(g)A\pi_2(g^{-1})v_2)\,dg \end{aligned}$$

wobei $Au = (u_2|u)\cdot u_1$ sei. Es gilt

$$B = \int_G \pi_1(g)A\pi_1(g^{-1})\,dg \in \mathrm{Hom}_G(V_2, V_1)\ .$$

Wir wenden nun Satz 1.1.5 an. Ist $V_1 \not\cong V_2$, so ist $B = 0$. Ist $V_1 = V_2 = V$, so ist B skalar. Somit $B = \frac{\mathrm{tr}\,B}{\dim V}\cdot 1$, also folgt die Behauptung. □

Definition 1.1.10. Ist $f \in C(G)$ und (V, π) eine unitäre Darstellung, so definiert man einen beschränkten Operator $\pi(f)$ durch

$$(u|\pi(f)v) = \int_G f(g)(u|\pi(g)v)\,dg\ .$$

Definiert man die *Faltung* $f * h$ von $f, h \in C(G)$ durch

$$(f * h)(s) = \int_G f(t)h(t^{-1}s)\,dt\ ,$$

so gilt $f * h \in C(G)$ und $\pi(f * h) = \pi(f)\pi(h)$ (Übung).

Korollar 1.1.11. Seien (V, τ), (V', τ') endlich-dimensionale irreduzible unitäre Darstellungen. Man definiert den *Grad* durch $d_\tau = \dim V$ und den *Charakter* $\chi_V = \chi_\tau$ durch

$$\chi_\tau(g) = \mathrm{tr}_V\,\tau(g) \quad \text{für alle} \quad g \in G\ .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \chi_\tau(g) &= \overline{\chi_\tau(g^{-1})} \\ \chi_\tau * \chi_{\tau'} &= 0 \quad (\text{falls } V \not\cong V') \\ d_\tau \chi_\tau * \chi_\tau &= \chi_\tau \end{aligned}$$

Beweis. Die Behauptungen folgen sofort aus Korollar 1.1.9, indem man eine ONB von V bzw. V' betrachtet. □

Eine Besonderheit kompakter Gruppen ist, dass alle unitären Darstellungen aus endlich-dimensionalen irreduziblen zusammengesetzt sind. Dies wollen wir nun zeigen.

Lemma 1.1.12. Sei V eine unitäre G-Darstellung und $v \in V$, $\|v\| = 1$. Definiere einen beschränkten Operator $T \in \mathrm{End}_G(V)$ durch

$$Tu = \int_G (\pi(g)v|u) \cdot \pi(g)v \, dg \ .$$

Dann ist $T \neq 0$, positiv, selbst-adjungiert und kompakt.

Beweis. Offenbar ist T beschränkt mit $\|T\| \leqslant \|v\| = 1$. Dass T äquivariant, selbstadjungiert, positiv und $\neq 0$ ist, sieht man wie im Beweis von Lemma 1.1.2. Wir zeigen, dass T kompakt ist, indem wir T als Normlimes von Operatoren endlichen Rangs darstellen.
Sei $f(g,u) = (\pi(g)v|u) \cdot \pi(g)v$. Da G kompakt ist, ist die Abbildung $G \to V : g \mapsto \pi(g)v$ gleichmäßig stetig[1]. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also $n \in \mathbb{N}$, Elemente $g_j \in G$ ($j = 1, \dots, n$) und paarweise disjunkte Borelmengen E_j ($j = 1, \dots, n$) mit $g_j \in E_j$ und

$$\|\pi(g)v - \pi(g_j)v\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad g \in E_j \ .$$

Es folgt für $g \in E_j$

$$\begin{aligned}
&\|f(g,u) - f(g_j,u)\| \\
&\leqslant |((\pi(g) - \pi(g_j))v|u)| \cdot \|\pi(g)v\| + |(\pi(g_j)v|u)| \cdot \|(\pi(g) - \pi(g_j))v\| \leqslant \varepsilon\|u\| \ .
\end{aligned}$$

Für den Operator endlichen Rangs (eine 'verallgemeinerte Riemann-Summe')

$$T_\varepsilon u = \sum_{j=1}^n \mathrm{vol}(E_j) f(g_j,u) = \sum_{j=1}^n \int_{E_j} f(g_j,u) \, dg$$

gilt daher $\|(T - T_\varepsilon)u\| \leqslant \varepsilon\|u\|$, denn

$$Tu - T_\varepsilon u = \sum_{j=1}^n \int_{E_j} (f(g,u) - f(g_j,u)) \, dg \ .$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 1.1.13. Alle irreduziblen unitären Darstellungen von G sind endlich-dimensional und jede unitäre G-Darstellung ist die hilbertsche Summe irreduzibler Unterdarstellungen.

Beweis. Sei V eine unitäre Darstellung und $0 \neq T \in \mathrm{End}_G(V)$ beschränkt, positiv, selbst-adjungiert und kompakt (Lemma 1.1.12). Ist V irreduzibel, so gilt $T = c \cdot 1$ für ein $c > 0$ (Satz 1.1.5). Daher ist id_V kompakt und folglich $\dim V < \infty$.

[1] Eine Abbildung $f : H \to X$ von einer topologischen Gruppe H in einen metrischen Raum (X,d) heißt (links) gleichmäßig stetig, falls es zu $\varepsilon > 0$ eine 1-Umgebung $U \subset H$ mit $d(f(g^{-1}h), f(h)) < \varepsilon$ für alle $g \in U$, $h \in H$ gibt. Allgemeiner gehört der Begriff in die Theorie der uniformen Räume.

Sei nun V beliebig. Aus dem Spektralsatz für kompakte selbst-adjungierte Operatoren folgt, dass es eine ONB von T-Eigenvektoren gibt. Da $T \neq 0$, gibt es einen Eigenwert $\lambda \neq 0$. Da T kompakt ist, gilt $0 < \dim V_\lambda < \infty$ für $V_\lambda = \ker(T - \lambda)$ (denn $T|_{V_\lambda}$ ist invertierbar). Da V_λ unter G invariant ist, besitzt jeder abgeschlossene invariante Unterraum von V einen endlich-dimensionalen invarianten Unterraum $\neq 0$.
Jeder endlich-dimensionale invariante Unterraum $U \neq 0$ enthält einen invarianten Unterraum $W \neq 0$ minimaler Dimension. Dieser ist irreduzibel und $W^\perp$ ist invariant. Durch Induktion folgt, dass jeder endlich-dimensionale invariante Unterraum von V die orthogonale direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen ist. Fazit: Jeder abgeschlossene invariante Unterraum $U \neq 0$ von V enthält eine irreduzible Unterdarstellung $\neq 0$.
Mit dem Zornschen Lemma folgt die Existenz einer maximalen Familie (V_α) paarweise orthogonaler irreduzibler Unterdarstellungen von V. Sei $U = (\bigoplus_\alpha V_\alpha)^\perp$, ein abgeschlossener invarianter Unterraum. Wäre $U \neq 0$, so würde U eine nicht-triviale irreduzible Unterdarstellung enthalten, im Widerspruch zur Maximalität. Daher ist $U = 0$ und $\bigoplus_\alpha V_\alpha$ ist dicht in V. □

Definition 1.1.14. Ist (V, π) eine unitäre Darstellung und sind $u, v \in V$, so heißt $\Phi^\pi_{u,v}(g) = (\pi(g)u|v)$ *Koeffizientenfunktion* oder *Matrixkoeffizient* von π.

Theorem 1.1.15. Sei $A \subset C(G)$ der lineare Aufspann aller Matrixkoeffizienten endlich-dimensionaler (unitärer) Darstellungen. Dann ist A dicht in $C(G)$.

Beweis. Sei $\psi \in C(G)$ reell-wertig mit $\psi(g) = \psi(g^{-1})$ und definiere $T_\psi h = \psi * h$ für alle $h \in \mathbf{L}^2(G)$. Der Operator T_ψ ist selbstadjungiert und $\|T_\psi f\|_\infty \leqslant \|\psi\|_2 \|f\|_2$ wegen der Hölder-Ungleichung, also ist $T_\psi : \mathbf{L}^2(G) \to C(G)$ stetig. Weiter gilt für $L_g f(x) = f(g^{-1}x)$:

$$||L_g T_\psi f - T_\psi f||_\infty = ||(L_g\psi - \psi) * f||_\infty \leqslant \|L_g\psi - \psi\|_2 \cdot \|f\|_2 \,.$$

Für jede beschränkte Menge $B \subset \mathbf{L}^2(G)$ ist somit $T_\psi(B) \subset C(G)$ beschränkt und gleichgradig stetig. Nach dem Satz von Ascoli-Arzelà folgt, dass $T_\psi : \mathbf{L}^2(G) \to C(G)$ und insbesondere als Endomorphismus von $\mathbf{L}^2(G)$ kompakt ist.
Aus dem Spektralsatz für kompakte selbst-adjungierte Operatoren folgt, dass $\mathbf{L}^2(G)$ die orthogonale direkte Summe der Eigenräume $V_\lambda = \ker(T_\psi - \lambda)$ ist; für $\lambda \neq 0$ ist $\dim V_\lambda \neq 0$. Definiere eine unitäre Darstellung R von G auf $\mathbf{L}^2(G)$ durch $R_g f(x) = f(xg)$. Dann ist $[T_\psi, R_g] = 0$, also V_λ invariant. Ist $\lambda \neq 0$ und $v \in V_\lambda$, so gilt $v(g) = R_g v(1) = \sum_{j=1}^n (R_g v|v_j) \cdot v_j(1)$, wobei $v_1, \ldots, v_n$ eine ONB von V_λ ist. Damit gilt $V_\lambda \subset A$ für $\lambda \neq 0$. Sei $f \in \mathbf{L}^2(G)$. Es gibt $f_\lambda \in V_\lambda$ mit $f = \sum_\lambda f_\lambda$ in $\mathbf{L}^2(G)$. Daher gilt $T_\psi f = \sum_{\lambda \neq 0} \lambda f_\lambda$ in $C(G)$. Ist $R_\psi = T_\psi(\mathbf{L}^2(G))$, so gilt also, dass $A \cap R_\psi$ in R_ψ dicht ist bezüglich der Topologie von $C(G)$. Zu $f \in C(G)$ und $\varepsilon > 0$ gibt es aber ψ mit $\|T_\psi f - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Dies zeigt die Behauptung. □

Das folgende Theorem ist der Satz von Peter-Weyl.

Theorem 1.1.16. Es sei A eine maximale Menge paarweise inäquivalenter irreduzibler G-Darstellungen.

(i). Ist zu $\tau \in A$ eine ONB (v_i) von τ gegeben, so seien $\Phi^\tau_{ij}(g) = (\tau(g)v_i|v_j)$ die jeweiligen Matrixkoeffizienten. Die Familie $(d_\tau^{1/2}\Phi^\tau_{ij})_{\pi,i,j}$ ist eine ONB von $\mathbf{L}^2(G)$.

(ii). Sei (V,π) irgendeine unitäre Darstellung und zu $\tau \in A$ sei V_τ der Abschluss der Summe aller zu τ äquivalenten Unterdarstellungen. Dann gilt $V = \bigoplus_{\tau\in A} V_\tau$. Für die Orthogonalprojektionen E_τ auf V_τ gilt

$$E_\tau = d_\tau \pi(\overline{\chi_\tau}) \ , \ E_\tau E_{\tau'} = \delta_{\tau\tau'} E_\tau = E_{\tau'} E_\tau \ .$$

(iii). Ist in (ii) $(V,\pi) = (\mathbf{L}^2(G), L)$, so gilt $\operatorname{rk} E_\tau = d_\tau^2$, also $\dim \operatorname{Hom}_G(\tau, \mathbf{L}^2(G)) = d_\tau$. (Dabei ist L durch $L_g f(h) = f(g^{-1}h)$ definiert.)

Die Unterräume V_τ heißen *Isotypen* oder *isotypische Komponenten.*

Beweis. (i). Die Behauptung folgt aus Korollar 1.1.9 und Theorem 1.1.15.
(ii). Dass V wie angegeben als direkte Summe zerfällt, folgt aus Satz 1.1.13. Definiere $E_\tau := d_\tau\pi(\overline{\chi_\tau})$. Aus Korollar 1.1.11 folgt $E_\tau E_{\tau'} = \delta_{\tau\tau'}E_\tau$. Hieraus folgt insbesondere, dass $E_\tau^2 = E_\tau$ ist und $[E_\tau, E_{\tau'}] = 0$. Es gilt weiter

$$\begin{aligned}(u|E_\tau v) &= d_\tau \int_G \overline{\chi_\tau(g)}(u|\tau(g)v)\,dg = d_\tau \int_G \overline{\chi_\tau(g)}(\tau(g^{-1})u|v) \\ &= d_\tau \int_G \overline{\chi_\tau(g^{-1})}(\tau(g)u|v)\,dg = d_\tau \int_G \chi_\tau(g)(\tau(g)u|v)\,dg \\ &= \overline{d_\tau \int_G \overline{\chi_\tau(g)}(v|\tau(g)u)\,dg} = \overline{(v|E_\tau u)} = (E_\tau u|v)\ ,\end{aligned}$$

wobei wieder Korollar 1.1.11 benutzt wurde. Somit ist E_τ selbstadjungiert, also eine Orthogonalprojektion.
Sei nun U eine zu τ äquivalente Unterdarstellung von V. Sei u_i eine ONB von U. (U ist endlich-dimensional nach Satz 1.1.13.) Setze $\Phi_{ij}(g) = (\pi(g)u_i|u_j)$. Nach Definition gilt $\overline{\chi_\tau} = \sum_i \Phi_{ii}$ und $\pi(g)u_j = \sum_i \overline{\Phi_{ji}(g)} \cdot u_i$. Mit Korollar 1.1.9 rechnet man daher

$$\begin{aligned}E_\tau u_j &= d_\tau \int_G \overline{\chi_\tau(g)}\pi(g)u_j\,dg = \textstyle\sum_{i,k} d_\tau \displaystyle\int_G (\pi(g)u_i|u_i)\overline{(\pi(g)u_j|u_k)}\,dg \cdot u_k \\ &= \textstyle\sum_{i,k} \overline{(u_j|u_i)}(u_k|u_i) \cdot u_k = u_j\end{aligned}$$

Damit ist $U \subset E_\tau(V)$ und folglich $V_\tau \subset E_\tau(V)$. Andererseits gilt für jede zu τ' äquivalente Unterdarstellung, wobei $\tau' \in A$, $\tau' \neq \tau$, sei, dass $E_\tau(U) = E_\tau E_{\tau'}(U) = 0$ ist, und folglich $V_{\tau'} \perp E_\tau(V)$. Aus der orthogonalen Zerlegung $V = \bigoplus_\sigma V_\sigma$ folgt $E_\tau(V) = V_\tau$, so dass E_τ tatsächlich die orthogonale Projektion auf V_τ ist.
(iii). Wie in (ii) rechnet man leicht nach, dass $E_\tau(\Phi^{\tau'}_{ij}) = \delta_{\tau\tau'}\Phi^{\tau'}_{ij}$. Damit ist $\mathbf{L}^2(G)_\tau = E_\tau(\mathbf{L}^2(G))$ der Aufspann des ON-Systems (Φ^τ_{ij}) und es folgt $\dim \mathbf{L}^2(G)_\tau = d_\tau^2$. Genauer ist für jedes j der Aufspann U_j von $(\Phi^\tau_{ij})_{i=1,\dots,d_\tau}$ zu τ isomorph. Da $\dim \operatorname{Hom}_G(\tau, U_j) = 1$ nach Satz 1.1.5, folgt die Behauptung aus $\operatorname{Hom}_G(\tau, \bigoplus_j U_j) = \bigoplus_j \operatorname{Hom}_G(\tau, U_j)$. □

Korollar 1.1.17. Genau dann ist G eine Liegruppe, wenn G eine treue (d.h. injektive) endlich-dimensionale Darstellung besitzt.

Beweis. Hat G eine endlich-dimensionale treue Darstellung, so ist G isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $U(n)$ ($n \gg 0$), also eine Liegruppe.
Sei andererseits G eine Liegruppe und A eine maximale Menge paarweise inäquivalenter irreduzibler Darstellungen. Es existiert eine offene 1-Umgebung $U \subset G$, die keine nicht-triviale Untergruppe von G enthält. Zu $\tau \in A$ sei $K_\tau = \ker \tau$. Es gilt $K = \bigcap_{\tau \in A} K_\tau = 1$, wie man aus Theorem 1.1.15 schließt, also $K \setminus U = \emptyset$. Da $G \setminus U$ kompakt ist, gibt es $\tau_1, \dots, \tau_n$ mit $\bigcap_{j=1}^n K_{\tau_j} \setminus U = \emptyset$. Es folgt $\bigcap_j K_{\tau_j} \subset U$, also $\ker \bigoplus_j \tau_j = \bigcap_j K_{\tau_j} = 1$. Damit ist $\tau_1 \oplus \cdots \oplus \tau_n$ treu. □

Definition 1.1.18. Seien U, V unitäre Darstellungen, wobei V irreduzibel sei. Sei $U = \bigoplus_j U_j$ eine Orthogonalzerlegung in abgeschlossene invariante Unterräume mit $U_j \cong V$, wann immer U_j eine zu V äquivalente Unterdarstellung enthält. Es sei $[U : V] \in \mathbb{N} \cup \infty$ die Anzahl der j, für $U_j \cong V$ ist. Dies nennt man die *Multiplizität* von V in U.

Korollar 1.1.19. Seien U, V unitäre Darstellungen mit V irreduzibel. Dann ist $[U : V]$ wohldefiniert und es gilt

$$[U : V] = \dim \operatorname{Hom}_G(V, U) = \dim \operatorname{Hom}_G(U, V)$$

Beweis. Es gilt $[U : V] = \frac{1}{d_V} \cdot \operatorname{rk} E_V$, unabhängig von der gewählten Zerlegung. Wie im Beweis von Theorem 1.1.16 (iii) sieht man, dass $[U : V] = \dim \operatorname{Hom}_G(V, U)$. Die letzte Gleichheit folgt, indem man Adjungierte bildet. □

1.2 Irreduzible Darstellungen von SU(2)

Definition 1.2.1. Eine *Liegruppe* (über $\mathbb{R}$) ist eine glatte Mannigfaltigkeit G, die gleichzeitig eine Gruppe ist, so dass die Gruppenoperationen Multiplikation $m : G \times G \to G$ und Inversion $i : G \to G$ glatte Abbildungen sind.

1.2.2. Ein wichtiger Satz besagt, dass jede abgeschlossene Untergruppe H einer Liegruppe G mit der Relativtopologie eine eindeutige Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit besitzt, so dass H eine Liegruppe wird. Inbesondere trifft dies auf alle abgeschlossenen Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ zu. Dies sind die sogenannten *linearen Liegruppen.*
Man betrachtet zu jeder Liegruppe den Vektorraum $\mathfrak{g} = T_1(G)$, die sogenannte *Liealgebra* von G. (Der Name wird sogleich klar werden.) Im Fall, dass $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ linear ist, gilt

$$\mathfrak{g} = \{\dot{g}_0 \mid g = (g_t) :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G \text{ glatt }, \ g_0 = 1\} \ .$$

Seien $g, h :]-\varepsilon, \varepsilon[\to G$, $g_0 = h_0 = 1$, $x = \dot{g}_0$, $y = \dot{h}_0$. Es gilt $g_s h_t g_s^{-1} \in G$ und

$$\mathfrak{g} \ni \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{s=t=0} g_s h_t g_s^{-1} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \dot{g}_0 h_t - h_t \dot{g}_0 = xy - yx = [x, y] \ .$$

Dies motiviert die folgende Definition.

Definition 1.2.3. Eine *Liealgebra* (über $\mathbb{R}$) ist ein reeller Vektorraum mit einer bilinearen Operation $[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, die folgenden Gleichungen genügt:

$$[x,y] = -[y,x] \qquad \text{(Antisymmetrie)}$$
$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]] \qquad \text{(Jacobi-Gleichung)}$$

Die Jacobi-Gleichung besagt, dass $\mathrm{ad}(x)$, definiert durch $\mathrm{ad}(x)y = [x,y]$, als Derivation der Klammer wirkt. Die gleiche Definition funktioniert über jedem Körper der Charakteristik Null.

1.2.4. Wir haben gesehen, dass die Liealgebra einer linearen Liegruppe tatsächlich immer eine Liealgebra ist. (Man erhält nach den Sätzen von Lie und von Ado so bereits alle reellen Liealgebren.) Allgemeiner ist die Liealgebra jeder Liegruppe wirklich eine Liealgebra.
Ein weiterer wichtiger Satz besagt, dass jeder stetige Homomorphismus von Liegruppen bereits glatt ist. Man rechnet wie in 1.2.2 nach, dass für das Differential $d\phi = T_1\phi$ eines solchen Homomorphismus ϕ linearer Liegruppen gilt

$$d\phi([x,y]) = [d\phi(x), d\phi(y)]\,.$$

Definition 1.2.5. Eine lineare Abbildung $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ von Liealgebren mit

$$\phi([x,y]) = [\phi(x),\phi(y)] \quad \text{für alle } \ x,y \in \mathfrak{g}$$

heißt Homomorphismus von Liealgebren. Falls $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(V)$ die Liealgebra von $\mathrm{GL}(V)$ ist, wobei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist, so sagt man auch, ϕ sei eine *Darstellung* von $\mathfrak{g}$, oder V sei ein $\mathfrak{g}$-*Modul*.
Jede endlich-dimensionale Darstellung einer Liegruppe gibt Anlass zu einer Darstellung ihrer Liealgebra.

1.2.6. Sei $\mathrm{SU}(2)$ die Liegruppe der unitären 2×2-Matrizen mit Determinante 1,

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \,\middle|\, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

(d.h. die Einheitssphäre in $\mathbb{C}^2$). Ihre Liealgebra ist

$$\mathfrak{su}(2) = \{T \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid \mathrm{tr}\, T = 0\,,\, T^* = -T\} \ni \begin{pmatrix} i\alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & -i\alpha \end{pmatrix}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \beta \in \mathbb{C}\,,$$

mit Komplexifizierung $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Wir werden die irreduziblen endlich-dimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ klassifizieren und so alle irreduziblen Darstellungen von SU(2) erhalten.

Dazu fixieren wir die folgende Basis von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$,

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Relationen

$$[h,e] = 2e \ , \ [h,f] = -2f \ , \ [e,f] = h \ ,$$

wobei $[A,B] = AB - BA$.

Satz 1.2.7. Zu jedem $n \in \mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ gibt es bis auf Isomorphie genau eine irreduzible Darstellung V_n von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ der Dimension $n+1$. Die Darstellung V_n besitzt eine Basis $v_0,\dots,v_n$, so dass mit $v_{-1} = v_{n+1} = 0$ gilt

$$\pi_n(h)v_j = (n-2j)v_j \ , \ \pi_n(f)v_j = v_{j+1} \ , \ \pi_n(e)v_j = j(n-j+1)v_{j-1} \quad (j = 0,\dots,n) \ .$$

Die Darstellung V_n ist isomorph zur abgeleiteten Darstellung von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \supset \mathrm{SU}(2)$ auf dem Raum $\mathcal{P}_n \subset \mathbb{C}[z,w]$ der n-homogenen Polynome, gegeben durch die Formel

$$\pi_n(g^{-1})p(z,w) = p(g^{-1}(z,w)^t) \ .$$

Beweis. Sei V eine irreduzible Darstellung der Dimension $n+1$. Ist $v \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert λ von $\pi(h) = h$, so gilt

$$\begin{aligned} he^k v &= (he - eh + eh)e^{k-1}v = (2e + eh)e^{k-1}v \\ &= 2e^k v + ehe^{k-1}v = 2ke^k v + e^k hv = (2k+\lambda)e^k v \end{aligned}$$

und analog $hf^k v = (-2k+\lambda)f^k v$. Die Menge von Null verschiedenen Elemente von $\{f^k v \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist linear unabhängig. Es gibt also ein $v_0 \neq 0$, so dass $hv_0 = \mu v_0$ und $ev_0 = 0$. Sei $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $f^{m+1}v_0 = 0$. Mit $v_j := f^j v_0$ gilt $fv_j = v_{j+1}$ und $hv_j = (\mu - 2j)v_j$. Sei $v_{-1} = 0$. Es gilt per Induktion

$$\begin{aligned} ev_j &= efv_{j-1} = (ef - fe + fe)v_{j-1} = hv_{j-1} + fev_{j-1} \\ &= (\mu - 2j + 2)v_{j-1} + (j-1)(\mu - j + 2)fv_{j-2} = j(\mu - j + 1)v_{j-1} \ , \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} &\mu - 2j + 2 + (j-1)(\mu - j + 2) \\ &\qquad = j(\mu - j) - j + 2 + 2(j-1) = j(\mu - j) + j = j(\mu - j + 1) \ . \end{aligned}$$

Somit ist $U = \langle v_0,\dots,v_m\rangle_{\mathbb{C}}$ unter h, f und e invariant. Da V irreduzibel ist, folgt $V = U$

und $m = n$. Weiterhin ist

$$(\mu - n)(n+1) = \sum_{j=0}^{n} (\mu - 2j) = \operatorname{tr} \pi(h) = \operatorname{tr}[\pi(e), \pi(f)] = 0$$

also $\mu = n$. Dies zeigt auch die Eindeutigkeit.
Für $\mathcal{P}_n$ nehme man $v_0 = w^n$, $v_j = c_j z^j w^{n-j}$, wobei $c_j = (-1)^j \cdot n(n-1)\cdots(n-j+1)$. Dann gilt

$$hv_j = c_j \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (e^{-t}z)^j (e^t w)^{n-j} = c_j j z^{j-1}(-z) w^{n-j} + c_j z^j (n-j) w^{n-j-1} w = (n-2j) v_j$$

$$ev_j = c_j \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} z^j (-tz + w)^{n-j} = z^j (n-j) w^{n-j-1}(-z) = v_{j+1}$$

$$fv_j = c_j \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (z - tw)^j w^{n-j} = c_j j z^{j-1}(-w) w^{n-j} = -j \frac{c_j}{c_j - 1} v_{j-1} = j(n-j+1) v_{j-1}$$

Jeder invariante Unterraum von $\mathcal{P}_n$, der ein Element der Basis (v_j) enthält, ist schon gleich $\mathcal{P}_n$. Sei $v \in \mathcal{P}_n$, $v \neq 0$. Es gilt $v = \sum_j a_j v_j$. Es gibt ein kleinstes j, so dass $a_j \neq 0$. Folglich gilt $e^{n-j} v = a_j v_n$. Jeder invariante Unterraum, der v enthält, enthält somit auch v_n. Dies zeigt, dass die Darstellung $\mathcal{P}_n$ irreduzibel ist. Da $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$ ist, folgt die Behauptung. □

1.3 Wurzeln von U(n)

1.3.1. Im folgenden sei $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathbb{C}^{n\times n} \mid X^* = -X\}$ und $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n\times n}$ als komplexe Liealgebra mit Klammer $[X, Y] = XY - YX$. In $\mathfrak{g}$ kommen in natürlicher Weise eine Reihen von Kopien der Liealgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ vor; dies ist von fundamentaler Bedeutung, wie wir sehen werden.

1.3.2. Für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$ sei E_{ij} die Elementarmatrix mit den Einträgen $\delta_{ik}\delta_{j\ell}$. Seien

$$\mathfrak{h}_0 = \langle E_{ii} \mid i = 1, \ldots, n \rangle_{\mathbb{R}} \subset i\mathfrak{g}_0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{h} = \langle E_{ii} \mid i = 1, \ldots, n \rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g} \,.$$

Man erklärt $\varepsilon_i \in \mathfrak{h}^*$ durch $\varepsilon_i(E_{jj}) = \delta_{ij}$. Für alle $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \neq 0$, sei

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h} : [h, x] = \alpha(h) \cdot x\} \,.$$

Lemma 1.3.3.

(i). Für $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \neq 0$, gilt

$$\mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \Leftrightarrow \exists i \neq j : \alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \,.$$

(ii). Es gilt $\mathfrak{g}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = \mathbb{C}E_{ij}$. Folglich ist $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{g}_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} .$$

Beweis. Man hat die Relation

$$[E_{ij}, E_{k\ell}] = E_{ij}E_{k\ell} - E_{k\ell}E_{ij} = \left(\textstyle\sum_c \delta_{ai}\delta_{cj}\delta_{ck}\delta_{b\ell} - \sum_d \delta_{ak}\delta_{d\ell}\delta_{di}\delta_{bj}\right)_{a,b} = \delta_{jk}E_{i\ell} - \delta_{\ell i}E_{kj} .$$

Insbesondere folgt für $i = j$

$$[E_{ii}, E_{k\ell}] = \delta_{ik}E_{i\ell} - \delta_{i\ell}E_{ki} = (\delta_{ik} - \delta_{i\ell})E_{k\ell} = (\varepsilon_k - \varepsilon_\ell)(E_{ii}) \cdot E_{k\ell} ,$$

also $E_{k\ell} \in \mathfrak{g}_{\varepsilon_k-\varepsilon_\ell}$.
Andererseits $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$, $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_\beta = 0$ für $\alpha \neq \beta$ und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{k \neq \ell} \mathbb{C}E_{k\ell} .$$

Damit folgt $\mathfrak{g}_{\varepsilon_k-\varepsilon_\ell} = \mathbb{C}E_{k\ell}$, sowie $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ für $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \varepsilon_k - \varepsilon_\ell$ für alle $k \neq \ell$. Außerdem folgt die Zerlegung in (ii). □

Definition 1.3.4. Die Menge aller α aus (i) wird mit $\Delta = \Delta(\mathfrak{g} : \mathfrak{h})$ bezeichnet und als die Menge der *Wurzeln* von $\mathfrak{g}$ bzw. G bezeichnet. Die $\mathfrak{g}_\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ heißen *Wurzelräume*. Nach (i) im obigen Lemma gilt $-\Delta = \Delta$. Sei $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^* = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \,|\, \alpha(\mathfrak{h}_0) \subset i\mathbb{R}\}$. Dann gilt $\Delta \subset \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$. Zudem kann man $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ mit dem (reellen) Dualraum von $\mathfrak{h}_\mathbb{R} = i\mathfrak{h}_0$ identifizieren.

Korollar 1.3.5.

(i). Die Liealgebra $\mathfrak{h}$ ist Abelsch und gleich ihrem *Zentralisator* $\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] = 0\}$.

(ii). Es gilt für alle $\alpha, \beta \in \Delta$: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$, sowie

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \begin{cases} = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} & \alpha + \beta \in \Delta \\ = 0 & \alpha + \beta \notin 0 \cup \Delta \\ \subset \mathfrak{h} & \alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

(iii). Die Unteralgebra $\mathfrak{h}$ ist gleich ihrem *Normalisator* $\mathfrak{n}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\}$.

Beweis. (i). Dies folgt sofort aus der Wurzelraumzerlegung.
(ii). Mit der Jacobigleichung

$$[h, [x, y]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]]$$

folgt sofort $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ für $\alpha + \beta \neq 0$ bzw. $\subset \mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ für $\alpha + \beta = 0$. Es reicht zu zeigen, dass $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0$ für $\alpha + \beta \in \Delta$.

Für $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ und $\beta = \varepsilon_k - \varepsilon_\ell$ gilt offenbar $\alpha + \beta \in \Delta$ genau dann, wenn entweder $j = k$ oder $i = \ell$ ist. In diesem Fall

$$[E_{ik}, E_{k\ell}] = E_{i\ell} \quad \text{bzw.} \quad [E_{\ell j}, E_{k\ell}] = -E_{kj} \ .$$

Da in beiden Fällen die Klammer $\neq 0$ ist, folgt die Behauptung (ii).
(iii). Dies folgt aus $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_\alpha] \subset \mathfrak{g}_\alpha$. □

1.3.6. Sei $T \subset G$ die Unteralgebra der Diagonalmatrizen. Dann ist T ein (reeller) *Torus*, d.h. isomorph zu $\mathbb{T}^n$, wobei $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$. Es ist $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ die Liealgebra von T.
Die Wurzelraumzerlegung verallgemeinert sich nun wie folgt. Sei (V, π) eine endlich-dimensionale T-Darstellung (z.B. eine endlich-dimensionale G-Darstellung). Nach Theorem 1.1.16 zerfällt V als Summe von Isotypen irreduzibler T-Darstellungen, die nach Korollar 1.1.8 allesamt eindimensional sind. Ist also $X(T)$ die Menge aller stetigen Homomorphismen $T \to \mathbb{T}$, so gilt

$$V = \bigoplus_{\chi \in X(T)} V_\chi \quad \text{wobei} \quad V_\chi = \{v \in V \mid \forall g \in T : \pi(g)v = \chi(g) \cdot v\}$$

Für all $\chi \in X(T)$ existiert ein $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$, so dass $\chi = \chi_\lambda$, wobei $\chi_\lambda(\exp h) = e^{\lambda(h)}$ $(h \in \mathfrak{h})$. Dann gilt $V_{\chi_\lambda} = V_\lambda$, wobei

$$V_\lambda = \{v \in V \mid \forall h \in \mathfrak{h} : \pi(h)v = \lambda(h) \cdot v\}$$

und $\pi(x)v = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \pi(\exp(tx))v$ die abgeleitete Darstellung ist. Man bezeichnet V_λ als *Gewichtsraum* und $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ als *Gewicht* von V, falls $V_\lambda \neq 0$. Die Wurzeln von $\mathfrak{g}$ sind also gerade die von Null verschiedenen Gewichte der $\mathfrak{h}$-Darstellung $\mathfrak{g}$.
Mit der Jacobigleichung folgt wie oben, falls V eine G-Darstellung ist, dass

$$\pi(\mathfrak{g}_\alpha) V_\lambda \subset V_{\lambda+\alpha} \ .$$

Insbesondere ist die linke Seite gleich Null, wenn $\lambda + \alpha$ kein Gewicht ist. Da im allgemeinen V_λ nicht eindimensional sein muss, gilt in der Regel keine Gleichheit, wenn $\lambda + \alpha$ ein Gewicht ist.

Definition 1.3.7. Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Dann heißt λ *integrierbar*, falls es $\xi \in X(T)$ mit $\chi(\exp h) = \exp \lambda(h)$ für alle $h \in \mathfrak{h}_0$ gibt.[2] Es gilt

$$\lambda \text{ integrierbar} \Leftrightarrow \lambda \in \langle \varepsilon_i \mid i = 1, \ldots, n \rangle_\mathbb{Z} \Leftrightarrow \lambda(\ker \exp h) \subset 2\pi i \mathbb{Z} \ .$$

1.3.8. Die *Spurform* $b_0(x, y) = \mathrm{tr}(xy)$ auf $\mathfrak{g}$ ist symmetrisch und nicht ausgeartet, und

[2]Die englische Terminologie ist ‘analytically integral’, wobei ‘integral’ ‘ganzzahlig’ bedeutet. Integrierbar sind diese Gewichte in dem Sinne, dass $\lambda = d\chi$ für ein χ.

ihre Einschränkung auf $\mathfrak{h}_0$ ist positiv definit. Es gilt

$$b_0([x,y],z) = b_0(x,[y,z]) \quad \text{und} \quad b_0(\mathrm{Ad}(g)(x),y) = b_0(x,\mathrm{Ad}(g^{-1})(y))$$

für alle $x,y,z \in \mathfrak{g}$, $g \in G$, wobei $\mathrm{Ad}(g)(x) = gxg^{-1}$. Man beachte

$$b_0(E_{ij},E_{k\ell}) = \delta_{jk}\,\mathrm{tr}(E_{i\ell}) = \delta_{i\ell}\delta_{jk}\ ,$$

insbesondere $b_0(E_{ij},E_{ji}) = 1$ und die Einschränkung von b auf $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$ ist 0 (wenn $\alpha \neq -\beta$) oder nicht-ausgeartet (wenn $\alpha = -\beta \in \Delta$).

Zu $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ sei $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ definiert durch $b_0(h,h_\alpha) = \alpha(h)$ für alle $h \in \mathfrak{h}$. Man definiert auf $\mathfrak{h}^*$ eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform durch

$$\langle \alpha,\beta\rangle = \alpha(h_\beta) = \beta(h_\alpha) = b(h_\alpha,h_\beta)\ .$$

Da $h_{\varepsilon_i} = E_{ii}$, gilt $|\alpha|^2 = \langle\alpha,\alpha\rangle = 2$ für alle $\alpha \in \Delta$. Folglich:

$$\lambda \text{ integrierbar } \Rightarrow \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2} \in \mathbb{Z} \quad (\forall\,\alpha \in \Delta)$$

Lemma 1.3.9. Sind $e_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_\alpha$, so gilt

$$[e_\alpha,e_{-\alpha}] = b_0(e_\alpha,e_{-\alpha})h_\alpha\ .$$

Die obige Wahl kann so getroffen werden, dass

$$[e_\alpha,e_{-\alpha}] = H \quad \text{und} \quad [H,e_{\pm\alpha}] = \pm 2e_{\pm\alpha}\ ,$$

d.h., die Zuordnung $(h,e,f) \mapsto (H,e_{-\alpha},e_\alpha)$ definiert durch lineare Fortsetzung eine Einbettung von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ in $\mathfrak{g}$.

Beweis. Es gilt $[e_\alpha,e_{-\alpha}], b_0(e_\alpha,e_{-\alpha})h_\alpha \in \mathfrak{h}$ und für alle $h \in \mathfrak{h}$

$$b_0([e_\alpha,e_{-\alpha}],h) = b_0(e_\alpha,[e_{-\alpha},h]) = \alpha(h)b_0(e_\alpha,e_{-\alpha}) = b_0\big(b_0(e_\alpha,e_{-\alpha})h_\alpha,h\big)\ .$$

Dies zeigt die erste Behauptung.

Seien $e_{\pm\alpha}$ so gewählt, dass $b_0(e_\alpha,e_{-\alpha}) = \frac{2}{|\alpha|^2}$. Dann gilt mit $H = \frac{2}{|\alpha|^2}h_\alpha = [e_\alpha,e_{-\alpha}]$, dass $\alpha(H) = 2$, also die Behauptung. □

Bemerkung 1.3.10. Man beachte, dass für $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n.\mathbb{C})$ gilt $|\alpha|^2 = 2$ für alle $\alpha \in \Delta$. Man kann für $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j$ setzen $e_\alpha = E_{ij}$. Dann gilt $h_\alpha = E_{ii} - E_{jj}$ und die obige Relation ist erfüllt.

Von besonderer Bedeutung ist der Begriff des *höchsten Gewichts*; dafür führen wir eine Ordung auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ ein.

Definition 1.3.11. Sei $(h_1, \dots, h_n)$ eine geordnete Basis von $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$. Man definiert eine Ordnungsrelation $\leqslant$ auf $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ wie folgt:

$$\alpha \geqslant \beta :\Leftrightarrow \alpha - \beta \geqslant 0 \quad \text{und} \quad \alpha \geqslant 0 :\Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha > 0 \,,$$

wobei die Relation > 0 wie folgt definiert sei:

$$\begin{aligned} \alpha > 0 :\Leftrightarrow\ & \alpha(h_1) > 0 \\ & \vee \alpha(h_1) = 0 \wedge \alpha(h_2) > 0 \\ & \vee \alpha(h_1) = \alpha(h_2) = 0 \wedge \alpha(h_3) > 0 \\ & \vdots \\ & \vee \alpha(h_1) = \cdots = \alpha(h_{n-1}) = 0 \wedge \alpha(h_n) > 0 \end{aligned}$$

Dann ist $\geqslant$ eine totale Ordung auf $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ und wird als *lexikografische Ordnung* bezeichnet. Man definiert $\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha > 0\}$ und nennt dies ein *positives System* von Δ. Für die Standard-Wahl der geordneten Basis: $(E_{11}, \dots, E_{nn})$ erhält man

$$\Delta^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j\} \,.$$

Dies ist das Standard-positive System.

Sei ein positives System Δ^+ gewählt. Ist $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$, so heißt λ *dominant*, falls $\langle \lambda, \alpha \rangle \geqslant 0$ für alle $\alpha \in \Delta^+$. Mit anderen Worten ist der Kegel der dominanten Linearformen dual zu dem von Δ^+ aufgespannten. Ist Δ^+ das Standard-positive System, so ist $\lambda = \sum_j m_j \varepsilon_j$ dominant genau dann, wenn $m_1 \geqslant \cdots \geqslant m_n$.

Die folgenden zwei Sätze bilden zusammen das *Theorem vom höchsten Gewicht*.

Satz 1.3.12. Sei Δ^+ ein positives System und V eine irreduzible endlich-dimensionale G-Darstellung. In der Menge aller Gewichte von V gibt es ein größtes Element λ in der Dominanzordnung, das höchste Gewicht von V genannt. Es gilt

(i). λ ist ein dominantes, integrierbares Gewicht.

(ii). Jedes Gewicht von V ist der Form $\lambda - \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$ mit $n_\alpha \in \mathbb{N}$.

(iii). Der Gewichtsraum V_λ hat Dimension 1.

(iv). Ist $\alpha \in \Delta^+$ und $x \in \mathfrak{g}_\alpha$, so gilt $xV_\lambda = 0$. Umgekehrt: Wird $v \in V$ von $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha > 0$, annuliert, so gilt $v \in V_\lambda$.

Satz 1.3.13. Zu jedem dominanten, integrierbaren Gewicht λ von G gibt es bis auf Isomorphie genau eine irreduzible G-Darstellung mit höchstem Gewicht λ.

Beweis von Satz 1.3.12. Sei $\mathfrak{n}_\pm$ die Summe der $\mathfrak{g}_\alpha$ mit $\pm\alpha \in \Delta^+$. Dann $\mathfrak{n}^\pm$ unter $\mathfrak{h}$ invariante nilpotente Unteralgebren. Es gilt $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$, also ist nach Theorem 1.4.7 die

Multiplikationsabbildung

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{n}_-) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{n}_+) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$$

ein Vektorraumisomorphismus. Man rechnet sofort nach, dass sie für die adjungierte Wirkung $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$ von $\mathfrak{h}$ auf $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}_\pm$ und $\mathfrak{h}$ äquivariant ist.
Bezeichne die Dominanzordung mit $\preceq$. Ist $v \in V_\mu$, so gilt $\mathfrak{n}_+ v \subset \bigoplus_{\nu \succ \mu} V_\nu$. (Analoges gilt für $\mathfrak{n}_-$.) Jedes maximale λ erfüllt also $\mathfrak{n}_+ = 0$. Sei $v \in V_\lambda \setminus 0$; dann ist v zyklisch. Die obigen Isomorphismen liefern $V = \mathfrak{U}(\mathfrak{n}_-)v$, also gilt $\mu \prec \lambda$ für alle anderen Gewichte von V und $\dim V_\lambda = 1$. Offenbar ist λ integrierbar.
Wir haben sogar eingesehen, dass für jeden Gewichtsvektor $u \in V_\mu$ mit $\mathfrak{n}_+ u = 0$ die Menge $\mathfrak{U}(\mathfrak{n}_-)u$ ein Untermodul mit Gewichten $\preceq \mu$ ist. Wegen der Irreduzibilität muss gelten, dass $u = 0$ oder $\mu = \lambda$ sein muss. Gäbe es ein $w \notin V_\lambda$ mit $\mathfrak{n}_+ w = 0$, so würde folgen: $w = \sum_\mu w_\mu$ mit $w_\mu \in V_\mu$. O.B.d.A. $w_\lambda = 0$, aber dann würde für jedes maximale μ mit $w_\mu \neq 0$ folgen, dass $\mathfrak{n}_+ w_\mu = 0$ ist, ein Widerspruch! Daher sind (ii)-(iv) bewiesen und es bleibt zu zeigen, dass λ dominant ist.
Sei $\alpha \in \Delta^+$ und $(e_{\pm\alpha}, H)$ wie in Lemma 1.3.9 und $A = \mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ die von diesen Elementen in $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ erzeugte Unteralgebra. Es ist $U = Av$ ein $\mathfrak{s} = \langle e_{\pm\alpha}, H\rangle$-Modul und H wirkt mit den Eigenwerten

$$\lambda(H) - p\alpha(H) = \frac{2\langle\lambda, \alpha\rangle}{|\alpha|^2} - 2p\ .$$

Der höchste Eigenwert ist $m = \frac{2\langle\lambda,\alpha\rangle}{|\alpha|^2}$ und alle Eigenräume haben Dimension 1. Als endlich-dimensionale $\mathrm{SU}(2)$-Darstellung zerfällt U als direkte Summe irreduzibler Unterdarstellungen. Der Eigenwert m kann nur in einem irreduziblen Summanden vorkommen, und dieser hat Dimension $m + 1 \geqslant 1$. Damit ist $m \geqslant 0$ und es folgt, dass λ dominant ist. □

Beweis von Satz 1.3.13. Zur Injektivität: Seien V_1, V_2 endlich-dimensionale irreduzible G-Darstellungen mit höchstem Gewicht λ und $v_j \in V_{j,\lambda}$, $v_j \neq 0$. Man betrachte die G-Darstellung $W = V_1 \oplus V_2$ und die von $w = v_1 \oplus v_2$ erzeugte Unterdarstellung. Es hat w das Gewicht λ und $\mathfrak{n}_+ w = 0$. Daher ist $\dim W_\lambda = 1$. Sei $W = \bigoplus_{j=1}^m W_j$ mit W_j irreduzibel. Dann gilt $w = \sum_j w_j$ mit $w_j \in W_j$, o.B.d.A. $w_j \neq 0$ für alle j. Die Menge $w_1, \ldots, w_m$ ist linear unabhängig; man erhält leicht, dass $hw_j = \lambda(h)w_j$ für alle j, d.h. $m \leqslant \dim W_\lambda$. Damit ist $m = 1$ und W irreduzibel. Die Projektionen $p_j : W \subset V_1 \oplus V_2 \to V_j$ sind G-äquivariant und $p_j(w) = v_j \neq 0$. Nach Satz 1.1.5 sind p_1, p_2 Isomorphismen.
Zur Surjektivität: Sei $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ dominant und integrierbar. Angenommen, es gibt eine endlich-dimensionale Darstellung V mit λ als höchstem Gewicht. Zunächst einmal zeigen wir, dass es dann auch eine *irreduzible* Darstellung mit dieser Eigenschaft gibt. In der Tat, sei $v \in V_\lambda$, $v \neq 0$, und $V = \bigoplus_{j=1}^m V_j$ eine Zerlegung von V in irreduzible Teildarstellungen. Wie oben zeigt man $v \in V_j = V$ für ein j.
Es reicht also, irgendeine (nicht notwendig irreduzible) Höchgewichtdarstellung V mit Höchstgewicht λ zu konstruieren. Sei Δ^+ dazu zunächst das Standard-positive System und Λ die Menge aller Höchstgewichte endlich-dimensionaler G-Darstellungen. Man rechnet

nach, dass die Darstellung $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ für $0 \leqslant k \leqslant n$ das höchste Gewicht $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ besitzt, und $\det^k$ für $k \in \mathbb{Z}$ das höchste Gewicht $k(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)$. Das Tensorprodukt von Darstellungen mit Höchstgewicht λ_1, λ_2 enthält $\lambda_1 + \lambda_2$ als Höchstgewicht. Damit ist Λ ein additives Monoid.

Sei nun $\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_i \varepsilon_i$. Da λ dominant ist, gilt $\mu_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \in \mathbb{N}$ für alle $1 \leqslant i < n$; sei weiter $\mu_n = \lambda_n \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i) + \mu_n(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) \in \Lambda \ ,$$

also folgt die Behauptung für das Standard-positive System.

Allgemein betrachten wir das positive System $\Phi = w\Delta^+$ mit $w \in W$ (vgl. Satz 1.5.3). Dann ist λ Φ-dominant genau dann, wenn $w^{-1}\lambda$ Δ^*-dominant ist. Sei V eine irreduzible endlich-dimensionale G-Darstellung, deren Δ^+-Höchstgewicht $w^{-1}\lambda$ ist. Dann ist λ ein Gewicht von V. Sei μ ein Gewicht von V. Es gilt $w^{-1}\mu = w^{-1}\lambda - \sum_{\alpha\in\Delta^+} n_\alpha\alpha$ mit $n_\alpha \geqslant 0$. Es folgt

$$\mu = \lambda - \sum_{\alpha\in\Delta^+} n_\alpha w\alpha = \lambda - \sum_{\beta\in\Phi} n_{w^{-1}\beta}\beta \ .$$

Folglich ist λ bezüglich Φ ein Höchstgewicht. □

1.4 Exkurs: Universell einhüllende Algebra

1.4.1. Sei k ein Körper (oder auch ein Ring) der Charakteristik 0 und $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über k (frei als k-Modul im Fall eines Grundrings). Sei $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ der Quotient der Tensoralgebra $\bigotimes \mathfrak{g}$ modulo des von den Ausdrücken

$$xy - yx - [x, y] \quad x, y \in \mathfrak{g}$$

erzeugten Ideals. Dann ist $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ eine unitale assoziative Algebra. Die Einbettung $\mathfrak{g} \to \bigotimes \mathfrak{g}$ induziert eine Abbildung $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Für jede unitale assoziative Algebra A ist

$$\mathrm{Hom}_{Alg}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), A) \to \mathrm{Hom}_{Lie}(\mathfrak{g}, A) : f \mapsto f \circ \tau$$

eine Bijektion von der Menge aller unitalen Algebramorphismen in die Menge aller Liealgebra-Morphismen. Dies charakterisiert $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ bis auf kanonische Isomorphie eindeutig. Insbesondere gibt jeder Morphismus von Liealgebren $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ Anlass zu einem kanonisch definierten Morphismus unitaler assoziativer Algebren $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{h})$.

Ist $[,] = 0$, so erhält man die symmetrische Algebra $S(\mathfrak{g}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Die kanonische Abbildung $\mathfrak{g} \to S(\mathfrak{g})$ bezeichnen wir mit σ. Im allgemeinen kann diese beide Algebren wie folgt in Bezug setzen.

1.4.2. Sei $\mathfrak{U}^p(\mathfrak{g})$ das Bild von $\bigoplus_{\ell\leqslant p} \bigotimes^\ell \mathfrak{g}$ in $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Dann ist $(\mathfrak{U}^p(\mathfrak{g}))$ eine *Filtrierung* der

Algebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, d.h. die $\mathfrak{U}^p(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}^{p+1}(\mathfrak{g})$ sind Unterräume mit

$$\mathfrak{U}^p(\mathfrak{g}) \cdot \mathfrak{U}^q(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{U}^{p+q}(\mathfrak{g}) \ .$$

Sei $(x_j)_{j\in J}$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Für jede endliche Folge $I = (i_1, \dots, i_p)$ in J sei $x_I = \tau(x_{i_1}) \cdots \tau(i_p)$ und $\bar{x}_I = \sigma(x_{i_1}) \cdots \sigma(x_{i_p})$.

Lemma 1.4.3. Sei $I = (i_1, \dots, i_p)$ eine endliche Folge und $\pi(I) = (i_{\pi(1)}, \dots, i_{\pi(p)})$, wobei $\pi \in S_p$. Dann gilt

$$x_I - x_{\pi(I)} \in \mathfrak{U}^{p-1}(\mathfrak{g}) \ .$$

Beweis. Es reicht, die Behauptung für $p \geqslant 2$ und die Transposition $\pi = (j, j+1)$ mit $j < p$ zu zeigen. Dann gilt

$$x_I - x_{\pi(I)} = x_{(i_1,\dots,i_{j-1})} \underbrace{(\tau(x_{i_j})\tau(x_{i_{j+1}}) - \tau(x_{i_{j+1}})\tau(x_{i_j}))}_{=\tau([x_{i_j}, x_{i_{j+1}}])} x_{(i_{j+2},\dots,i_p)} \in \mathfrak{U}^{p-1}(\mathfrak{g}) \ .$$

Das ist die Behauptung. □

Die Algebra $S(\mathfrak{g})$ ist als Quotient von $\bigotimes \mathfrak{g}$ bezüglich eines graduierten Ideals graduiert. Die zugehörige Filtrierung bezeichnen wir mit $F^pS(\mathfrak{g})$. Wir nehmen weiterhin an, dass J total geordnet ist. Ist $I = (i_1, \dots, i_q)$ eine endliche Folge in J und $j \in J$, so schreiben wir $j \leqslant I$, falls $j \leqslant i_\ell$ für alle ℓ.

Lemma 1.4.4. Für alle $p \geqslant 0$ gibt es genau eine lineare Abbildung $* = *_p : \mathfrak{g} \otimes F^pS(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$, so dass für alle $i, j \in J$, $I = (i_1 < \cdots < i_q) \subset J$:

(i). $x_i * \bar{x}_I = \sigma(x_i)\bar{x}_I$, falls $i \leqslant I$, $|I| \leqslant p$.

(ii). $x_j * \bar{x}_I \equiv \sigma(x_j)\bar{x}_I \pmod{F^qS(\mathfrak{g})}$, falls $j \in J$, $q = |I| \leqslant p$.

(iii). $x_i * (x_j * \bar{x}_I) - x_j * (x_i * \bar{x}_I)) = [x_i, x_j] * \bar{x}_I$, falls $|I| < p$.

Weiterhin gilt $*_p|_{\mathfrak{g}\otimes F^{p-1}S(\mathfrak{g})} = *_{p-1}$.

Beweis. Die Bedingung (i) erzwingt $x_i * 1 = \bar{x}_i$. Seien Existenz und Eindeutigkeit von $*_{p-1}$ bewiesen. Falls eine Abbildung $*_p$ existiert, so ist aufgrund (i)-(iii) für $p-1$ offenbar $*_{p-1} = *_p|_{\mathfrak{g}\otimes F_{p-1}S(\mathfrak{g})}$. Zu zeigen ist also die eindeutige Existenz einer Fortsetzung von $*_{p-1}$, die (i)-(iii) erfüllt.

Für $i \leqslant I$ muss $x_i * \bar{x}_I = \bar{x}_i\bar{x}_I$ gelten. Andernfalls gilt $\bar{x}_I = \bar{x}_j\bar{x}_K$ mit $j < i$ und $j \leqslant K$. Weiter gilt $x_i * \bar{x}_K = \bar{x}_i\bar{x}_K + y$ mit $y \in F^{p-1}S(\mathfrak{g})$. Dann muss gelten

$$\begin{aligned} x_i * \bar{x}_I &= x_i * (x_j * \bar{x}_K) = x_j * (x_i * \bar{x}_K) + [x_i, x_j] * \bar{x}_K \\ &= \bar{x}_j\bar{x}_i\bar{x}_K + x_j * y + [x_i, x_j] * \bar{x}_K = \bar{x}_i\bar{x}_I + x_j * y + [x_i, x_j] * \bar{x}_K \end{aligned}$$

Wählt man j minimal, so bekommt man auf diese Weise eine eindeutige Fortsetzung $*_p$, die (i) und (ii) erfüllt. Es ist zu zeigen, dass $*_p$ auch (iii) erfüllt.

Falls $j < i$ und $j \leqslant I$, so ist (iii) per Konstruktion erfüllt. Da $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$, ist sie auch erfüllt, wenn $i < j$ und $i \leqslant I$. Für $i = j$ ist die Bedigung trivial, also ist (iii) erfüllt, falls $i \leqslant I$ oder $j \leqslant I$. Andernfalls ist $\bar{x}_I = \bar{x}_\ell \bar{x}_K$ mit $\ell < i, j$ und $i, j \leqslant K$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$x_j * \bar{x}_I = x_j * \bar{x}_\ell \bar{x}_K = x_j * (x_\ell * \bar{x}_K) = x_\ell * (x_j * \bar{x}_K) + [x_j, x_\ell] * \bar{x}_K$$

Es gilt $x_j * \bar{x}_K = \bar{x}_j \bar{x}_K + w$ mit $w \in F^{p-2}S(\mathfrak{g})$. Man kann (iii) auf $x_i * (x_\ell * \bar{x}_j \bar{x}_K)$ anwenden, weil $\ell \leqslant K$ und $\ell < j$ gilt. Man kann (iii) auf $x_I * (x_\ell * w)$ nach Induktionsvoraussetzung anwenden. Daher kann man es auf $x_i * (x_\ell * (x_j * \bar{x}_K)) = x_i * (x_\ell * \bar{x}_j \bar{x}_K) + x_i * (x_\ell * w)$ anwenden, und es gilt

$$\begin{aligned} x_I * (x_j * \bar{x}_I) &= x_i * (x_\ell * (x_j * \bar{x}_K)) + x_i * ([x_j, x_\ell] * \bar{x}_K) \\ &= x_k * (x_i * (x_j * \bar{x}_K)) + [x_i, x_\ell] * (x_j * \bar{x}_K) \\ &\quad + [x_j, x_\ell] * (x_i * \bar{x}_K) + [x_i, [x_j, x_\ell]] * \bar{x}_K \end{aligned}$$

Es folgt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} & x_i * (x_j * \bar{x}_I) - x_j * (x_i * \bar{x}_I) \\ &\quad = x_\ell * (x_i * (x_j * \bar{x}_K) - x_j * (x_i * \bar{x}_K)) + ([x_i, [x_j, x_\ell]] - [x_j, [x_i, x_\ell]]) * \bar{x}_K \\ &\quad = x_\ell * ([x_i, x_j] * \bar{x}_K) + [[x_i, x_j], x_\ell] * \bar{x}_K = [x_i, x_j] * (x_\ell * \bar{x}_K) = [x_i, x_j] * \bar{x}_J \,. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Lemma 1.4.5. Die x_I, mit $I = (i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p)$, bilden eine Basis von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

Beweis. Sei $* : \mathfrak{g} \otimes S(\mathfrak{g}) \to S(\mathfrak{g})$ die in Lemma 1.4.4 konstruierte Abbildung. Für $i_0 < I$, $I = (i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k)$, gilt $x_{i_0} * \bar{x}_I = \bar{x}_I$ und nach der Eigenschaft (iii) ist $*$ eine Liealgebra-Darstellung von $\mathfrak{g}$ in $S(\mathfrak{g})$. Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(S(\mathfrak{g}))$ mit $\varphi(\tau(x))(p) = x * p$ für alle $x \in \mathfrak{g}$ und $p \in S(\mathfrak{g})$.
Per Induktion folgt $\varphi(x_I)(1) = \bar{x}_I$ für alle $I = (i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p)$. Da $(\bar{x}_I)$, $I = (i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p)$, eine Basis von $S(\mathfrak{g})$ bilden, ist (x_I), $I = (i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_p)$, linear unabhängig in $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Da es sich per Konstruktion und mit Lemma 1.4.3 um ein Erzeugendensystem handelt, folgt die Behauptung. □

Korollar 1.4.6. Die kanonische Abbildung $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ ist injektiv.

Im folgenden identifizieren wir $\mathfrak{g}$ mit seinem Bild in $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Das folgende ist das *Theorem von Poincaré-Birkhoff-Witt*. Die obige Version ist für Liealgebren beliebiger Dimension gültig. Jetzt beschränken wir uns auf endlich-dimensionales $\mathfrak{g}$.

Theorem 1.4.7. Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine geordnete Basis von $\mathfrak{g}$. Die Monome $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ mit $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ bilden eine Basis von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.

1.5 Exkurs: Weyl-Gruppe

Definition 1.5.1. Die *Weyl-Gruppe* von G ist $W = N_G(T)/T$.

1.5.2. Da T Abelsch ist, wirkt W durch Konjugation auf T und auf $\mathfrak{h}$. Betrachte $h_i = E_{ii}$. Ist $w \in W$, so ist $wh_i \in \mathfrak{h}$ und besitzt dieselben Eigenwerte wie h_i. Daher gibt es genau ein $\sigma \in S_n$ mit $wh_i = h_{\sigma(i)}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Umgekehrt kann man $\sigma \in S_n$ die Klasse w_σ der Permutationsmatrix $(\delta_{ki}\delta_{\ell\sigma^{-1}(i)})_{k,\ell}$ zuordnen. Daher ist $W \cong S_n$.
Da W durch Automorphismen auf T (bzw. $\mathfrak{h}$) wirkt, lässt die duale Wirkung auf $\mathfrak{h}^*$ das Wurzelsystem Δ invariant. (Allgemeiner werden die Mengen von Gewichten endlich-dimensionaler T-Darstellungen invariant gelassen.)

Satz 1.5.3. Seien Φ_1, Φ_2 positive Systeme. Es gibt genau ein $w \in W$ mit $w\Phi_1 = \Phi_2$, d.h. W wirk einfach transitiv auf positiven Systemen.

Beweis. Es reicht, die Existenz für Φ_1 das Standard-positive System zu beweisen. Da $\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$, ist Φ_2 dadurch eindeutig bestimmt, in welcher Reihenfolge die ε_i bzgl. der gewählten lexikografischen Ordnung geordnet sind. Es gibt genau eine Permutation $\sigma \in S_n$, so dass $\varepsilon_{\sigma(1)} > \cdots > \varepsilon_{\sigma(n)}$ in dieser Ordnung und die Permutation ist durch Φ_2 eindeutig bestimmt. Es gilt $\Phi_2 = w_\sigma\Phi_1$ und $w = w_\sigma$ liegt damit eindeutig fest. Insbesondere gibt es genau $|W| = n!$ positive Systeme.
Sei nun Φ_1 beliebig, $\Phi_1 = w_\sigma\Delta^+$ mit Δ^+ dem Standard-positiven System. Für alle $\tau \in S_n$ gilt $w_\tau\Phi_1 = w_{\tau\sigma}\Delta^+$, also ist die Anzahl der positiven Systeme $w\Phi_1$, $w \in W$, gerade $|Ww_\sigma| = |S_n\sigma| = n!$. Dies zeigt die Behauptung. □

1.6 Der Satz von Borel-Weil

1.6.1. Sei $G_\mathbb{C} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ und $H = (\mathbb{C}^\times)^n \subset G_\mathbb{C}$. Sei Δ^+ ein positives System und $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$. Es gibt (genau) eine abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe B von $G_\mathbb{C}$ mit Liealgebra $\mathfrak{b}$, nämlich $N_{G_\mathbb{C}}(\mathfrak{b})$. Ist Δ^+ das Standard-positive System, so besteht B genau aus den unteren Dreiecksmatrizen.
Sei weiter N_- die abgeschlossene zusammenhängende Untergruppe von B mit Liealgebra $\mathfrak{n}_-$. Dann ist $B/N_- \cong H$; insbesondere setzt sich jede holomorphe endlich-dimensionale Darstellung von H holomorph auf B fort.

Lemma 1.6.2. Jede endlich-dimensionale Darstellung von G setzt sich holomorph auf $G_\mathbb{C}$ fort. Analoges gilt für T und H.

Beweis. Sei (V, π) eine endlich-dimensionale G-Darstellung. Aufgrund der Polarzerlegung lässt sich jedes $g \in G$ in eindeutiger Weise als $g = u \exp s$ schreiben, wobei s symmetrisch ist. Dann ist $s \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$ und man kann $\tilde{\pi}(g) = \pi(u)\exp(d\pi(s))$ definieren. Um einzusehen, dass dies eine holomorphe Abbildung $\tilde{\pi} : G_\mathbb{C} \to \mathrm{End}(V)$ definiert, reicht es einzusehen, dass das Differential an 1 komplex-linear ist; aber dies ist per Definition der Fall. Um einzusehen, dass es eine Darstellung ist, wendet man den Identitätssatz auf die Gleichung $\tilde{\pi}(g_1 g_2) = \tilde{\pi}(g_1)\tilde{\pi}(g_2)$ an, die auf $G \times G$ gilt. (Dies ist eine total reelle Untermannigfaltigkeit von $G_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}$.) □

1.6.3. Sei nun $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ dominant und integrierbar. Man setze den Charakter $\chi_\lambda(e^h) = e^{\lambda(h)}$ holomorph auf H und trivial auf B fort. Sei

$$H^0(G_{\mathbb{C}}/B, \mathbb{C}_\lambda) = \{h : G_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C} \mid h \text{ holomorph}, h(gb) = \chi_\lambda(b)^{-1} f(g) \ \forall g \in G_{\mathbb{C}}, b \in B\}$$

Theorem 1.6.4. Die Darstellung L, $L(s)h(g) = h(s^{-1}g)$, ist eine irreduzible Darstellung mit höchstem Gewicht λ.

Beweis. Sei (V, π) irreduzibel mit höchstem Gewicht λ, holomorph fortgesetzt auf $G_{\mathbb{C}}$. Dann gilt $\pi(g^*) = \pi(g)^*$ wegen der Unitarität von π und der komplexen Linearität des Differentials. Weiter sei durch

$$(h_1 : h_2) = \int_G \overline{h_1(g)} h_2(g)\, dg$$

ein G-invariantes Skalarprodukt auf $W = H^0(G_{\mathbb{C}}/B, \mathbb{C}_\lambda)$ erklärt. Sei $v_\lambda \in V_\lambda$, $\|v_\lambda\| = 1$. Für $v \in V$ sei $\psi_v(g) = (v_\lambda : \pi(g)^{-1} v)_V$ definiert. Es gilt mit $b = h \exp x$ mit $h \in H$, $x \in \mathfrak{n}_-$

$$\begin{aligned}\psi_v(gb) = (v_\lambda : \pi(b^{-1})\pi(g)^{-1} v) &= (\pi(b^{-1*}) v_\lambda : \pi(g)^{-1} v) \\ &= \chi_\lambda(h)^{-1} \cdot \psi_v(g) = \chi_\lambda(b)^{-1} \cdot \psi_v(g)\ ,\end{aligned}$$

da $b^{-1*} = h^{-1*} \exp(-x^*)$, $-x^* \in \mathfrak{n}_+$, und folglich

$$\pi(b^{-1*}) v_\lambda = \pi(h^{-1*})) v_\lambda = \overline{\chi_\lambda(h)^{-1}}\ .$$

Da ψ_v offenbar holomorph ist, gilt $\psi_v \in W$ und $W \neq 0$, da $\psi_{v_\lambda}(1) = 1$. Weiterhin rechnet man nach, dass $L(g)\psi_v = \psi_{\pi(g)v}$ ist für $g \in G_{\mathbb{C}}$. Damit ist ψ_V zu V als $G_{\mathbb{C}}$-Darstellung. Es reicht zu zeigen, dass W von dem Vektor $\psi_\lambda = \psi_{v_\lambda}$ als zyklische Darstellung erzeugt wird.
Wir zeigen zunächst, dass W vollständig ist. Sei dazu $h \in W$. Es gilt $\|h\| = \|\tilde{h}\|$, wobei $\tilde{h}(g) = \int_T h(tgt^{-1})\, dt$ ein Element $\tilde{h} \in W$ definiert. Es folgt mit Lemma 1.6.5

$$|h(1)|^2 \|\psi_\lambda\|^2 = \int_G |\tilde{h}(g)|^2\, dg \leqslant \int_G \int_T |h(tgt^{-1})|^2\, dt\, dg = \|h\|^2\ ,$$

also $|h(1)| \leqslant \|\psi_\lambda\|^{-1} \|h\|$. Da $G_{\mathbb{C}} = GB$, G isometrisch wirkt und $h(gb) = \chi_\lambda(b)^{-1} h(g)$, folgt: Für alle kompakten $K \subset G_{\mathbb{C}}$ existiert eine Konstante $C_K > 0$ mit

$$\sup_{g \in K} |h(g)| \leqslant C_K \cdot \|h\| \quad \text{für alle} \ \ h \in W\ .$$

Es folgt, dass W vollständig ist.
Sei nun U das Orthogonalkomplement von ψ_V in W. Es gilt $W = U \oplus U^\perp$. Falls es $h \in U$,

$h \neq 0$, gibt, so kann man o.B.d.A. $h(1) \neq 0$ annehmen. Es gilt $h(tgt^{-1}) = \chi_\lambda(t) \cdot L(t^{-1})h$; aus der Vollständigkeit von U folgt $\tilde{h} \in U$. Es gilt $\tilde{h} = h(1) \cdot \psi_\lambda \in U$. Damit ist $U \cap U^\perp \neq 0$, ein Widerspruch! Es folgt die Behauptung. □

Lemma 1.6.5. Für alle $h \in H^0(G_\mathbb{C}/B, \mathbb{C}_\lambda)$ und $g \in G_\mathbb{C}$ gilt $\int_T h(tgt^{-1})\,dt = h(1) \cdot \psi_\lambda(g)$.

Beweis. Die Idee ist zu zeigen, dass die rechte Seite gleich $h(1)$ mal eine von h unabhängige holomorphe Funktion auf $G_\mathbb{C}$ ist. Wir zeigen dies zunächst für g nahe an 1. Wir identifizieren dazu $x \in \mathfrak{g}$ mit dem zugehörigen links-invarianten Vektorfeld auf $G_\mathbb{C}$.
Es gibt eine kompakte Nullumgebung $U \subset \mathfrak{g}$, so dass die folgende Taylorreihe gleichmäßig für $x \in U$ konvergiert:

$$h(\exp x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j h(1)\ .$$

Für $t \in T$ gilt mit $\mathrm{Ad}(t)(x) = txt^{-1}$, dass $t(\exp x)t^{-1} = \exp \mathrm{Ad}(t)(x)$, also

$$\begin{aligned}\tilde{h}(\exp x) := \int_T h(t(expx)t^{-1})\,dt &= \int_T h(\exp \mathrm{Ad}(t)(x))\,dt \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_T \mathrm{Ad}(t)(x)^j h(1)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{x}^j h(1)\ ,\end{aligned}$$

wobei $\tilde{x}^j$ das T-invariante Element $\int_T \mathrm{Ad}(t)(x)^j\,dt \in \mathfrak{U}^j(\mathfrak{g})$ sei.
Seien $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha \setminus 0$, $\alpha \in \Delta$, und $H_1, \ldots, H_n$ eine Basis von $\mathfrak{h}$. Schreibe $\Delta^+ = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ (dann ist $m = \frac{n(n-1)}{2}$). Nach Theorem 1.4.7 ist

$$u_{MNK} = E_{\alpha_1}^{M_1} \cdots E_{\alpha_m}^{M_m} H_1^{N_1} \cdots H_n^{N_n} E_{-\alpha_1}^{K_1} \cdots E_{-\alpha_m}^{K_m}$$

eine Basis von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Es hat u_{MNK} das Gewicht $\sum_{i=1}^m (M_i - K_i)\alpha_i$ und $\tilde{x}^j$ das Gewicht 0. Weiterhin ist $L(\bar{\mathfrak{n}}_-)h = 0$, also tragen in der obigen Gleichung nur Summanden u_{MNK} mit $K = 0$ bei; dann muss aber $M = 0$ gelten. Für $H \in \mathfrak{h}$ gilt schließlich

$$Hh(g) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} h(g \exp(tH)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \chi_\lambda(\exp(-tH))h(g) = -\lambda(H)h(g)\ .$$

Daher ist $h(1)^{-1}\tilde{h}(\exp x)$ von h unabhängig (für $h(1) \neq 0$) und in U° holomorph. Nun ist für alle $t \in T$, $g \in G_\mathbb{C}$,

$$\psi_\lambda(tgt^{-1}) = (\pi(t)v_\lambda | \pi(g^{-1})\pi(t)v_\lambda) = |\chi_\lambda(t)|^2 \cdot \psi_\lambda(g) = \psi_\lambda(g)\ .$$

Indem man für h die Funktion ψ_λ einsetzt, erhält man $\tilde{h}(g) = h(1)\psi_\lambda(g)$ für $g \in \exp U$. Aus dem Identitätssatz folgt die Behauptung. □

2 Liealgebra-Cohomologie

2.1 Motivation aus Differentialformen

2.1.1. Seien

G Liegruppe (Mannigfaltigkeit mit glatter Gruppenstruktur $m : G \times G \to G$, $i : G \to G$)

$\mathfrak{g} = T_1(G) \cong \mathcal{X}(G)^G$ links-invariante Vektorfelder

$\mathfrak{g}^* \cong \Omega^1(G)^G$ links-invariante 1-Formen

Wir wollen in diesem Fall eine Formel für d herleiten, die die Liealgebra-Struktur von $\mathfrak{g}$ widerspiegelt. Diese Formel wird dann in einem weiteren Kontext ein Differential definieren.

2.1.2. Tatsachen:

(i). Da d mit Linkstranslationen kommutiert, $d\ell_g^* = \ell_g^* d$, ist $\Omega^\bullet(G)^G$ d-invariant, also ein Unterkomplex von $\Omega^\bullet(G)$.

(ii). Der Isomorphismus $G \times \mathfrak{g} \cong TG$ (Einschränkung von $Tm : TG \times TG \to TG$) induziert

$$\Omega^\bullet(G) \cong C^\infty(G) \otimes \bigwedge \mathfrak{g}^* \ .$$

(iii). Aus (ii) folgt: Es wird $\Omega^\bullet(G)$ als $C^\infty(G)$-Modul von $\Omega^\bullet(G)^G$ erzeugt, d.h., es gibt eine Basis von invarianten Formen.

(iv). Aus (i) und (iii) folgt: Um d zu berechnen, reicht es, d auf $\Omega^1(G)^G$ zu bestimmen.

Es wird im folgenden nützlich sein, eine kompakte Formel für das Algebra-Produkt auf $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ zur Verfügung zu haben. Dazu folgender Satz.

Satz 2.1.3. Sei V ein Vektorraum über dem Körper F.

(i). Definiere $\langle , \rangle : \bigwedge V^* \times \bigwedge V \to F$ durch

$$\langle \xi_1 \cdots \xi_k, x_1 \cdots x_k \rangle = \det(\xi_i(x_j)) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma \xi_{\sigma(1)}(x_1) \cdots \xi_{\sigma(k)}(x_k)$$

für alle $\xi_i \in V^*$, $x_j \in V$. Dann ist $\langle , \rangle$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform, so dass $\bigwedge V^*$ als Unterraum von $(\bigwedge V)^*$ aufgefasst werden kann.

(ii). Vermöge dieser Identifikation gilt für alle $\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge V^*$, $|\omega_1| = k$, $|\omega_2| = \ell$, sowie $x_1, \ldots, x_{k+\ell} \in V$,

$$(\omega_1\omega_2)(x_1 \cdots x_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in S_{k,\ell}} (-1)^\sigma \omega_1(x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)}) \omega_2(x_{\sigma(k+1)} \cdots x_{\sigma(k+\ell)}) \ ,$$

wobei

$$S_{k,\ell} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell} \mid \sigma(1) < \cdots \sigma(k)\ ,\ \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+\ell)\} \quad \text{(‘}(k,\ell)\text{-shuffles’)}\ .$$

Korollar 2.1.4.
(i). Für $|\omega_1| = 1$ und $|\omega_2| = k-1$ gilt

$$(\omega_1\omega_2)(x_1\cdots x_k) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}\omega_1(x_j)\omega_2(x_1\cdots\widehat{x_j}\cdots x_k) \tag{2.1}$$

(ii). Für $|\omega_1| = 2$ und $|\omega_2| = k-1$ gilt

$$(\omega_1\omega_2)(x_1\cdots x_{k+1}) = \sum_{1\le p<q\le k+1}(-1)^{p+q+1}\omega_1(x_p x_q)\omega_2(x_1\cdots\widehat{x_p}\cdots\widehat{x_q}\cdots x_{k+1}) \tag{2.2}$$

($\cdots\hat{y}\cdots$ heißt, dass y ausgelassen wird.)

2.1.5. Seien nun

X_i Basis von $\mathfrak{g}$

ω^j duale Basis von $\mathfrak{g}^*$

Wie oben eingesehen, reicht es, $d\omega^\ell$ zu bestimmen. Für alle $f \in C^\infty(G)$ rechnet man

$$\begin{aligned}
0 = d^2 f = d\Big(\textstyle\sum_j X_j f\cdot\omega^j\Big) &= \textstyle\sum_j d(X_j f)\omega^j + \sum_j X_j f d\omega^j \\
&= \textstyle\sum_{ij} X_i X_j f\omega^i\omega^j + \sum_j X_j f d\omega^j = \sum_{i<j}\underbrace{(X_iX_j - X_jX_i)}_{=[X_i,X_j]} f\omega^i\omega^j + \sum_j X_j f d\omega^j \\
&= \textstyle\sum_\ell X_\ell f\cdot\Big(\sum_{i<j} c_{ij}^\ell\omega^i\omega^j + d\omega^\ell\Big)
\end{aligned}$$

Hierbei sind c_{ij}^ℓ (die *Strukturkonstanten* von $\mathfrak{g}$) definiert durch $[X_i, X_j] = \sum_\ell c_{ij}^\ell X_\ell$. Durch Auswertung an 1 (dort sind $X_\ell f$ beliebig) schließt man

$$d\omega^\ell = -\textstyle\sum_{i<j} c_{ij}^\ell\omega^i\omega^j\ .$$

Lemma 2.1.6. Seien ω eine links-invariante 1-Form und X, Y Vektorfelder. Dann gilt

$$d\omega(XY) = -\omega([X,Y])\ . \tag{2.3}$$

Beweis. Es reicht, $\omega = \omega^\ell$ und $X = X_p$, $Y = X_q$ mit $p < q$ zu betrachten. Es gilt für $i < j$

$$(\omega^i\omega^j)(X_pX_q) = \omega^i(X_p)\omega^j(X_q) - \omega^i(X_q)\omega^j(X_p) = \omega^i(X_p)\omega^j(X_q) = \delta_{(i,j),(p,q)}\ .$$

Aus obiger Rechnung folgt

$$d\omega^\ell(X_pX_q) = -\sum_{i<j} c_{ij}^\ell(\omega^i\omega^j)(X_pX_q) = -c_{pq}^\ell = -\sum_k c_{pq}^k\omega^\ell(X_k) = -\omega^\ell([X_p,X_q])\ .$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 2.1.7. Sei ω eine k-Form. Als Element von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\bigwedge^{k+1}\mathfrak{g}, C^\infty(G))$ ist $d\omega$ durch die folgende Formel gegeben:

$$\begin{aligned} d\omega(Y_1\cdots Y_{k+1}) = &\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+1}Y_j(\omega(Y_1\cdots\widehat{Y_j}\cdots Y_{k+1})) \\ &+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([Y_i,Y_j]\cdot Y_1\cdots\widehat{Y_i}\cdots\widehat{Y_j}\cdots Y_{k+1}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

für alle $Y_1,\dots,Y_{k+1}\in\mathfrak{g}=\mathcal{X}(G)^G$.

Beweis. Es reicht, $\omega = f\omega^I$ mit $f\in C^\infty(G)$ und $\omega^I=\omega^{i_1}\cdots\omega^{i_k}$ für $I=(i_1<\cdots<i_k)$ zu betrachten. Dann ist

$$d\omega = df\omega^I + f\sum_{j=1}^k(-1)^{j+1}d\omega^{i_j}\omega^{i_1}\cdots\widehat{\omega^{i_j}}\cdots\omega^{i_k} =: (*)\ .$$

Wegen (2.2) und (2.3) gilt für $|\eta| = k-1$

$$d\omega^j\eta(Y_1\cdots Y_{k+1}) = \sum_{p<q}(-1)^{p+q}\omega^j([Y_p,Y_q])\eta(Y_1\cdots\widehat{Y_p}\cdots\widehat{Y_q}\cdots Y_{k+1})$$

Der zweite Summand von $(*)$, ausgewertet an $Y_1\cdots Y_{k+1}$, ist folglich

$$\begin{aligned} &\sum_{p<q}(-1)^{p+q}\sum_{j=1}^k(-1)^{j+1}\omega^{i_j}([Y_p,Y_q])(\omega^{i_1}\cdots\widehat{\omega^{i_j}}\cdots\omega^{i_k})(Y_1\cdots\widehat{Y_p}\cdots\widehat{Y_q}\cdots Y_{k+1}) \\ &\qquad = \sum_{p<q}(-1)^{p+q}\omega^I([Y_p,Y_q]\cdot Y_1\cdots\widehat{Y_p}\cdots\widehat{Y_q}\cdots Y_{k+1})\ , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt (2.1) auf $V=\mathfrak{g}^*$ angewandt wurde.
Ähnlich erhält man für den ersten Summanden

$$\begin{aligned} \sum_j X_jf(\omega^j\omega^I)(Y_1\cdots Y_{k+1}) &= \sum_{j,\ell}(-1)^{\ell+1}X_jf\omega^j(Y_\ell)\omega^I(Y_1\cdots\widehat{Y_\ell}\cdots Y_{k+1}) \\ &= \sum_\ell(-1)^{\ell+1}Y_\ell f\omega^I(Y_1\cdots\widehat{Y_\ell}\cdots Y_{k+1}) \\ &= \sum_\ell(-1)^{\ell+1}Y_\ell(\omega(Y_1\cdots\widehat{Y_\ell}\cdots Y_{k+1}))\ . \end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt die Invarianz von ω^I und den Y_j benutzt. Zusammen folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.1.8. Die Formel (2.4) gilt in lokalen Koordinaten auf einer beliebigen Mannigfaltigkeit, mit im wesentlichen dem gleichen Beweis.

Ersetzt man $C^\infty(G)$ durch einen beliebigen $\mathfrak{g}$-Modul, so liefert die Formel ein wohldefiniertes Differential. Dies werden wir weiter unten für eine erste Definition der Liealgebra-Cohomologie verwenden.

2.2 Motivation aus Liealgebra-Erweiterungen

Definition 2.2.1. Eine exakte Sequenz von Liealgebramorphismen

$$E: \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{\varrho} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

wobei $\mathfrak{a}$ als abelsch vorausgesetzt wird, heißt (abelsche) *Erweiterung* von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$.

2.2.2. Gegeben eine Erweiterung wie oben, wird das Ideal $\mathfrak{a}$ zum $\mathfrak{g}$-Modul vermöge

$$\pi(\varrho(x))y = [x, y] \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{h},\ y \in \mathfrak{a}\ .$$

(Hier geht ein, dass $\mathfrak{a}$ abelsch ist.) Man definiert zur jedem Schnitt τ von ϱ ($\varrho \circ \tau$) ein Element $\omega = \omega_\tau \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ durch

$$\omega(xy) = [\tau(x), \tau(y)] - \tau([x, y]) \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathfrak{g}\ .$$

Offenbar gilt $\varrho(\omega(xy)) = 0$, also $\omega(xy) \in \mathfrak{a}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} d\omega(xyz) = {} & x\omega(yz) - y\omega(xz) + z\omega(xy) - \omega([x,y]z) + \omega([x,z]y) - \omega([y,z]x) \\ = {} & [\tau(x), [\tau(y), \tau(z)]] - [\tau(y), [\tau(x), \tau(z)]] + [\tau(z), [\tau(x), \tau(y)]] \\ & - [\tau(x), \tau([y,z])] + [\tau(y), \tau([x,z])] - [\tau(z), \tau([x,y])] \\ & - [\tau([x,y]), \tau(z)] + [\tau([x,z]), \tau(y)] - [\tau([y,z]), \tau(x)] \\ & + \tau([[x,y],z]) - \tau([[x,z],y]) + \tau([[y,z],x]) \\ = {} & 0 \end{aligned}$$

Hierbei sind die erste und vierte Zeile $= 0$ aufgrund der Leibnizidentität und die sechs Terme in den zwei weiteren Zeilen heben sich aufgrund der Antisymmetrie der Lieklammer auf. Damit ist ω ein Cozykel.

Sei τ' ein weiterer Schnitt und $\alpha = \tau - \tau' \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \mathrm{Hom}(\bigwedge^1 \mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. Sei

$$d\alpha(xy) = \pi(x)\alpha(y) - \pi(y)\alpha(x) - \alpha([x, y])\ .$$

Dann ist $d\alpha \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ und

$$\begin{aligned} d\alpha(xy) = {} & [\tau(x), \alpha(y)] - [\tau'(y), \alpha(x)] - \alpha([x, y]) \\ = {} & [\tau(x), \tau(y)] - [\tau(x), \tau'(y)] - [\tau'(y), \alpha(x)] \\ & - \tau([x, y]) + \tau'([x, y]) \end{aligned}$$

$$= \omega_\tau(xy) - [\tau(x) - \alpha(x), \tau'(y)] - \tau'([x,y]) = (\omega_\tau - \omega'_\tau)(xy) \ .$$

Folglich ist $\omega_\tau - \omega_{\tau'}$ ein Corand und die Abbildung $E \mapsto [\omega]$ von Erweiterungen zu $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = \ker d / \operatorname{Im} d$ wohldefiniert.
Zwei Erweiterungen $E, \mathfrak{h}, \varrho$, $E', \mathfrak{h}', \varrho'$ von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$ heißen *äquivalent*, wenn es einen Isomorphismus $\sigma : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ mit $\varrho' \circ \sigma = \varrho$ gibt. (Insbesondere gilt $\varrho' \circ \iota' = \iota$ für die Inklusionen $\iota, \iota' : \mathfrak{a} \to \mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$.) Äquivalente Darstellungen führen offenbar zur gleichen Darstellung π.

Satz 2.2.3. Sei $\pi : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(\mathfrak{a})$ eine Liealgebra-Darstellung, wobei man $\mathfrak{a}$ als abelsche Liealgebra betrachte. Die Abbildung $[E] \to [\omega]$ von Äquivalenzklassen von Erweiterungen von $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{a}$ mit zugehöriger Darstellung π nach $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ ist eine Bijektion.

Beweis. Ist ω ein 2-Cozykel mit Werten in $\mathfrak{a}$, so definiert man auf $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{a}$ eine Klammer durch

$$[(x,y),(x',y')] = \big([x,y], \pi(x)y' - \pi(x')y + \omega(x,y)\big) \ .$$

Ist $d\alpha = \omega - \omega'$, so kann man einen Isomorphismus $\sigma : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ definieren durch die Vorschrift $\sigma(x,y) = (x + \alpha(y), y)$. Daher ist eine Abbildung von $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ zu Äquivalenzklassen von Erweiterungen definiert. Man rechnet nach, dass dies die Abbildung aus der Formulierung des Satzes umkehrt. □

2.2.4. Sei $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{a}$ eine Erweiterung zur Darstellung π und $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = 0$. Dann ist die Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h} : x \mapsto (x, 0)$ ein Liealgebra-Morphismus und $\mathfrak{h}$ ist das semi-direkte Produkt $\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \ltimes_\pi \mathfrak{a}$. Man kann nun nach linearen Abbildungen $\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ mit $\varrho \circ \tau' = \mathrm{id}$ fragen, wobei $\varrho = p_1$. Dann gilt also $\tau(x) = (x, \alpha(x))$ mit $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ und

$$\begin{aligned} d\alpha(xy) &= \pi(x)\alpha(y) - \pi(y)\alpha(x) - \alpha([x,y]) \\ &= p_2([\tau(x), \tau(y)]) - \alpha([x,y]) = p_2\big([\tau(x), \tau(y)] - \tau([x,y]\big) \ . \end{aligned}$$

D.h., α ist ein Cozykel genau dann, wenn τ ein Liealgebra-Homomorphismus ist, d.h. τ spaltet die Erweiterung. Man sieht auch, dass α genau dann ein Cozykel ist, wenn es eine Derivation von $\mathfrak{g}$ nach $\mathfrak{a}$ ist.
Die 1-Coränder sind die $d\gamma(x) = \pi(x)\gamma(1) = \pi(x)v$ für $\gamma = \gamma(1) = v \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}, \mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. Dies sind die sogenannten inneren Derivationen. Sei $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ in der offensichtlichen Weise definiert.

Satz 2.2.5. Es gibt eine Bijektion $\operatorname{Der}(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})/d\mathfrak{a} \to H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ und im Fall $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}) = 0$ klassifiziert dies Spaltungen der trivialen Erweiterung modulo innerer Derivationen.

2.3 Definition der Liealgebra-Cohomologie, Koszul-Auflösung

Im folgenden sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra über $\mathbb{C}$ (ohne Beschränkung an die Dimension). Alles wird genausogut über jedem anderen Körper der Charakteristik Null durchgehen.

Definition 2.3.1. Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert man $C^n = C^n(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Hom}(\bigwedge^n \mathfrak{g}, V)$. Weiter definiert man $d : C^k \to C^{k+1}$ durch

$$\begin{aligned} d\omega(Y_1 \cdots Y_{k+1}) = & \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} Y_j(\omega(Y_1 \cdots \widehat{Y_j} \cdots Y_{k+1})) \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([Y_i, Y_j] \cdot Y_1 \cdots \widehat{Y_i} \cdots \widehat{Y_j} \cdots Y_{k+1}) \end{aligned} \tag{2.5}$$

für alle $\omega \in C^k$, $Y_1, \ldots, Y_{k+1} \in \mathfrak{g}$.

Satz 2.3.2. Es gilt $d^2 = 0$. Man definiert $H^\bullet(\mathfrak{g}, V) = H^\bullet(C^\bullet, d)$.

Wir werden dies weiter unten beweisen.

Bemerkung 2.3.3. Man benutzt die Notation $Z^n = \ker d|_{C^n}$ und $B^n = \mathrm{Im}\, d|_{C^{n-1}}$.

(i). Es gilt

$$H^0(\mathfrak{g}, V) = Z^0(\mathfrak{g}, V) = \{v \in V \mid \forall x \in \mathfrak{g} : xv = 0\} = V^{\mathfrak{g}},$$

die *Invarianten* von V. Diese Perspektive wird später zu einer alternativen Definition von $H^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ führen.

(ii). Oben haben wir bereits $H^1(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Der}(\mathfrak{g}, V)/dV$ eingesehen. Insbesondere gilt für die triviale Darstellung $V = \mathbb{C}$, dass $H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^*$.

Wir werden nun beginnen, Instrumente zur Berechnung der Liealgebra-Cohomologie zu entwickeln, bevor wir diese schließlich auf Fragen der Darstellungstheorie von $\mathfrak{g}$ anwenden.

Definition 2.3.4.

(i). Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul. Eine *Auflösung* von V ist ein exakter Komplex

$$\varepsilon : X_\bullet \to V : \quad \cdots \xrightarrow{\partial} X_1 \xrightarrow{\partial} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} V \longrightarrow 0$$

von $\mathfrak{g}$-Moduln. Hierbei folgen wir folgender Konvention: Ein Komplex $M_\bullet$ ist homologisch graduiert, wenn $\partial : M_j \to M_{j-1}$; ein Komplex $N^\bullet$ ist cohomologisch graduiert, wenn $d : N^j \to N^{j+1}$.

(ii). Für $n \geqslant 0$ sei $X_n = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^n \mathfrak{g}$, wobei $\mathfrak{g}$ durch Linkstranslationen auf dem ersten

Faktor wirkt. Man definiert $\partial : X_n \to X_{n-1}$ durch

$$\begin{aligned}\partial(u \otimes x_1 \cdots x_n) = & \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} u x_i \otimes x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_n \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n \, .\end{aligned}$$

Weiterhin sei $\varepsilon : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = X_0 \to \mathbb{C}$ die kanonische Fortsetzung von $0 : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$. Man nennt $\varepsilon : X_\bullet \to \mathbb{C}$ die *Koszul-Auflösung*. Wir werden sehen, dass es sich um eine Auflösung des trivialen $\mathfrak{g}$-Moduls handelt.

Wir werden nun sehen, dass die Koszul-Auflösung und der Komplex $C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ eng miteinander verknüpft sind.

Satz 2.3.5. Seien A, B, C $\mathfrak{g}$-Moduln.

(i). $A \otimes B$ wird zu einem $\mathfrak{g}$-Modul via $x(a \otimes b) = (xa) \otimes b + a \otimes (xb)$.

(ii). $\mathrm{Hom}(A, B)$ wird zu einem $\mathfrak{g}$-Modul via $(x\varphi)(a) = x(\varphi(a)) - \varphi(xa)$.

(iii). Es gilt $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})}(A, B) = \mathrm{Hom}(A, B)^{\mathfrak{g}}$.

(iv). Es gibt einen natürlichen Isomorphismus

$$\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(A \otimes B, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(A, \mathrm{Hom}(B, C)) \, ,$$

gegeben durch $\Phi(\varphi)(a)(b) = \varphi(a \otimes b)$.

Beweis. (i), (ii) rechnet man leicht nach. Zu (iii) bemerkt man, dass $x\varphi = 0$ genau dann, wenn $x(\varphi(a)) = \varphi(xa)$ für alle $a \in A$.
Zu (iv): Man kann Φ als Abbildung $\mathrm{Hom}(A \otimes B, C) \to \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$ durch die gleiche Formel definieren. Die Umkehrabbildung Ψ ist gegeben durch $\Psi(\psi)(a \otimes b) = \psi(a)(b)$. Es reicht wegen (iii) nun zu zeigen, dass Φ $\mathfrak{g}$-äquivariant ist. Dazu rechnet man

$$\begin{aligned}\Phi(x\varphi)(a)(b) = x\varphi(a \otimes b) &= x(\varphi(a \otimes b)) - \varphi(x(a \otimes b)) \\ &= x(\Phi(\varphi))(a)(b)) - \varphi(xa \otimes b + a \otimes xb) \\ &= x(\Phi(\varphi)(a)(b)) - \Phi(\varphi)(xa)(b) - \Phi(\varphi)(a)(xb)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(x(\Phi(\varphi)))(a)(b) &= (x(\Phi(\varphi)(a)))(b) - \Phi(\varphi)(xa)(b) \\ &= x(\Phi(\varphi)(a)(b)) - \Phi(\varphi)(a)(xb) - \Phi(\varphi)(xa)(b) \, .\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 2.3.6. Es gilt $C^n(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(X_n, V)$ und $d = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\partial, \mathrm{id}_V)$.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 2.3.5 in Verbindung mit der Definitionen der Differentiale. □

Insbesondere folgt $d^2 = 0$ aus

Lemma 2.3.7. Es gilt $\partial^2 = \varepsilon\partial = 0$.

Beweis. In Grad $n = 0$ fehlte der zweite Term in der Definition von ∂. Für den ersten gilt $\operatorname{Im}\partial \subset \mathfrak{g}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C} = \ker\varepsilon$; es folgt die zweite Gleichung.
Nach Definition ist das Differential $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-linear, daher reicht es, die erste Gleichung auf $\mathbb{C} \otimes \bigwedge^n \mathfrak{g}$, $n > 1$, nachzurechnen. Nach Definition gilt $\partial(\bigwedge^n \mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g} \otimes \bigwedge^{n-1} \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C} \otimes \bigwedge^{n-1} \mathfrak{g}$, man kann also $\partial_j = p_j \circ \partial$, $j = 1, 2$, als ∂, gefolgt von der Projektion auf den j-ten Faktor, betrachten. Es gilt also

$$\partial^2 = (\partial_1 + \partial_2)(\partial_1 + \partial_2) = \partial_1^2 + \partial_1\partial_2 + \partial_2\partial_1 + \partial_2^2 \;.$$

Man rechnet

$$\begin{aligned}
\partial_1^2(1 \otimes x_1 \cdots x_n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j \otimes \partial_1(x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n) \\
&= \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{k<j} (-1)^{j+k} x_j x_k \otimes x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n \\
&\qquad - \sum_{k>j} (-1)^{j+k} x_k x_j \otimes x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots \widehat{x_k} \cdots x_n \Big) \\
&= \sum_{k<j} (-1)^{j+k} [x_j, x_k] \otimes x_1 \cdots \widehat{x_k} \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n \;,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\partial_2\partial_1(1 \otimes x_1 \cdots x_n) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} x_j \otimes \partial_2(x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n) \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k<\ell\,,\,k,\ell\neq j} (-1)^{j+k+\ell+\delta(j,k,\ell)+1} x_j \otimes [x_k, x_\ell] x_1 \cdots \widehat{x_{j,k,\ell}} \cdots x_n \;,
\end{aligned}$$

wobei $\delta(j, k, \ell) = 1$, falls $k < j < \ell$, und $\delta(j, k, \ell) = 0$ ansonsten. Weiter

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_2(1 \otimes x_1 \cdots x_n) &= \sum_{k<\ell} (-1)^{k+\ell} 1 \otimes \partial_1([x_k, x_\ell] x_1 \cdots \widehat{x_{k,\ell}} \cdots x_n) \\
&= \sum_{k<\ell} (-1)^{k+\ell} [x_k, x_\ell] \otimes x_1 \cdots \widehat{x_{k,\ell}} \cdots x_n \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \sum_{k<\ell\,,\,k,\ell\neq j} (-1)^{k+\ell+j+\delta(j,k,\ell)} x_j \otimes [x_k, x_\ell] x_1 \cdots \widehat{x_{j,k,\ell}} \cdots x_n \\
&= -(\partial_1^2 + \partial_2\partial_1)(1 \otimes x_1 \cdots x_n) \;.
\end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, dass $\partial_2^2 = 0$.

Dazu rechnet man

$$
\begin{aligned}
\partial_2^2(1\otimes x_1\cdots x_n) &= \sum_{k<\ell}(-1)^{k+\ell}1\otimes\partial_2([x_k,x_\ell]x_1\cdots\widehat{x_{k,\ell}}\cdots x_n)\\
&= \sum_{k<\ell}\Bigg(\sum_{p\neq k,\ell}(-1)^{k+\ell+p+\delta(p,k,\ell)+1}1\otimes[[x_k,x_\ell],x_p]x_1\cdots\widehat{x_{k,\ell,p}}\cdots x_n\\
&\qquad+\sum_{p<q\,,\,p,q\neq k,\ell}(-1)^{k+\ell+p+q+\delta(p,k,\ell)+\delta(q,k,\ell)}[x_k,x_\ell][x_p,x_q]x_1\cdots\widehat{x_{k,\ell,p,q}}\cdots x_n\Bigg)
\end{aligned}
$$

Der erste Term verschwindet aufgrund der Jacobigleichung und der zweite aufgrund der Vertauschungsrelationen in der äußeren Algebra. □

2.4 Homologische Algebra: Projektive Auflösungen

Im folgenden sei R ein Ring. Unser Paradebeispiel wird $R = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ für eine endlich-dimensionale Liealgebra $\mathfrak{g}$ über einem Körper der Charakteristik Null sein. Wir betrachten im wesentlichen Links-R-Moduln.

Definition 2.4.1. Ein R-Modul P heißt *projektiv*, falls für jedes Diagramm von R-Modul-Homomorphismen der folgenden Form,

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, dashed, "\tilde\varphi"] & \\
0 & M \arrow[l] & M' \arrow[l, "\psi"'] ,
\end{tikzcd}
$$

bei dem die Zeile exakt ist, ein Homomorphismus $\tilde\varphi$ existiert, so dass das Diagramm kommutiert, d.h. $\varphi = \psi\circ\tilde\varphi$.

Bemerkung 2.4.2.

(i). Jeder freie R-Modul ist projektiv.

In der Tat ,sei P frei mit Basis (x_k) und seien $y_k \in M'$ mit $\psi(y_k) = \varphi(x_k)$. Dann kann man $\tilde\varphi$ durch $\tilde\varphi(\sum_k \alpha_k x_k) = \sum_k \alpha_k y_k$ definieren.

(ii). Ein Modul P ist projektiv genau dann, wenn er ein direkter Summand eines freien Moduls ist:

Sei $N = P\oplus Q$ ein freier Modul. In der Situation der obigen Definition sei $\varphi' : N \to M$ definiert durch $\varphi'(p\oplus q) = \varphi(p)$. Man wendet (i) an, um $\tilde\varphi' : N \to M'$ mit $\varphi' = \psi\circ\tilde\varphi'$ zu erhalten. Nun kann man $\tilde\varphi : P \to M'$ durch $\tilde\varphi(p) = \tilde\varphi'(p\oplus 0)$ definieren.

Sei umgekehrt P projektiv und $M = R\otimes_{\mathbb{Z}} P$ der von P erzeugte freie Modul. Es gibt eine exakte Sequenz $M \xrightarrow{\pi} P \longrightarrow 0$. Man wende nun die universelle Eigenschaft auf die Identiät $\mathrm{id}_P : P \to P$ an. Man erhält einen Homomorphismus $\varphi : P \to M$ mit $\pi\circ\varphi = \mathrm{id}_P$. Offenbar ist φ ein Monomorphismus und $p = \varphi\circ\pi$ erfüllt $p^2 = p$,

$p \circ \varphi = \varphi$ und $p(\ker \pi) = 0$. Es folgt $M \cong P \oplus \ker \pi$, also ist P ein direkter Summand von M.

Lemma 2.4.3. Sei P ein projektiver R-Modul und folgendes kommutatives Diagramm mit exakter Zeile gegeben:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, dashed, "\tilde{\varphi}"] & \\ M' & M \arrow[l, "\psi'"'] & M'' \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Ist $\psi' \circ \varphi = 0$, so existiert ein Homomorphismus $\tilde{\varphi}$, so dass $\varphi = \psi \circ \tilde{\varphi}$.

Beweis. Nach Annahme folgt $\operatorname{Im} \varphi \subset \ker \psi' = \operatorname{Im} \psi$, so dass man durch Einschränkung das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"'] & \\ 0 & \operatorname{Im} \psi \arrow[l] & M'' \arrow[l, "\psi"'] \end{tikzcd} ,$$

betrachten kann. □

Definition 2.4.4. Eine Auflösung $P_\bullet \to M \to 0$ heißt *projektiv*, falls alle P_j projektive Moduln sind. Der Modul M muss nicht projektiv sein.

Satz 2.4.5.

(i). Sei folgendes Diagramm gegeben,

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] & V \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ M_\bullet \arrow[r] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dessen Zeilen Auflösungen sind. Ist die erste Zeile eine projektive Auflösung, so existiert eine Kettenabbildung $\tilde{f}$, die das Diagramm kommutativ macht.

(ii). Sind in der obigen Situation g, g' Kettenabbildungen, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r] \arrow[d, dashed, "{g,g'}"] & V \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ M_\bullet \arrow[r] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kommutativ machen, so gilt $g \simeq g'$, d.h. es existiert eine Kettenabbildung $h : P_\bullet \to M[1]_\bullet$, so dass $g - g' = \partial h + h\partial$. Dabei ist $M[1]_\bullet$ durch $M[1]_j = M_{j+1}$ definiert.

Beweis. Zu (i). Wir zeigen per Induktion, dass es Homomorphismen $\tilde{f}_0, \ldots, \tilde{f}_n$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
P_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\tilde{f}_n"] & \cdots \arrow[r, "\partial"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_0"] & V \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
M_n \arrow[r, "\partial"] & \cdots \arrow[r, "\partial"] & M_0 \arrow[r] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Im Induktionsanfang $n = 0$ wendet man die Definition von ‘projektiv’ auf den Homomorphismus φ im folgenden kommutativen Diagramm an, um $\tilde{f}_0 = \tilde{\varphi}$ zu konstruieren:

$$\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_0"'] \arrow[dr, "\varphi"] & V \arrow[d, "f"] & \\
M_0 \arrow[r] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

In Induktionsschritt wende man Lemma 2.4.3 auf φ im folgenden kommutativen Diagramm mit exakten Zeilen an, um $\tilde{f}_{n+1} = \tilde{\varphi}$ zu konstruieren:

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_{n+1}"'] \arrow[dr, "\varphi"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_n"] & P_{n-1} \arrow[d, "\tilde{f}_{n-1}"] \\
M_{n+1} \arrow[r] & M_n \arrow[r] & M_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Hierbei beachte man, dass $\partial \circ \varphi = \tilde{f}_{n-1} \circ \partial^2 = 0$ gilt. (Dabei setze man $P_{-1} = V$ und $\tilde{f}_{-1} = f$. Es wird nicht angenommen, dass V projektiv sei.)
Zu (ii). Man zeigt per Induktion nach n, dass es Homomorphismen $h_0, \ldots, h_n$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
& P_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[dl, "h_n"'] \arrow[d, "g_n - g_n' - h_{n-1}\partial"] & P_{n-1}\cdots \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dl, "h_{n-1}"] & & P_0 \arrow[r] \arrow[dl, "h_0"'] \arrow[d, "g_0 - g_0'"] & V \arrow[r] \arrow[d, "f - f = 0"] & 0 \\
M_{n+1} \arrow[r, "\partial"] & M_n \cdots \arrow[rr, "\partial"] & & M_1 \arrow[r, "\partial"] & M_0 \arrow[r] & W \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Hierzu wendet man Lemma 2.4.3 induktiv auf die Homomorphismen $\varphi = g_n - g_n' - h_{n-1}\partial$ (mit $h_{-1} = 0$) an, um $h_{n+1} = \tilde{\varphi}$ zu konstruieren. Dabei beachte man

$$\partial\varphi = (g_{n-1} - g_{n-1}')\partial - \partial h_{n-1}\partial = (\partial h_{n-1} + h_{n-2}\partial)\partial - \partial h_{n-1}\partial = \partial(h_{n-1} - h_{n-1})\partial = 0\ .$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Definition 2.4.6. Seien Kettenabbildungen $f, g : M_\bullet \to N_\bullet$ gegeben. Eine Kettenabbildung $h : M_\bullet \to N[1]_\bullet$, so dass $f - g = \partial h + h\partial$, heißt *Kettenhomotopie*. Mit anderen Worten muss das folgende Diagramm kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial"] & M_n \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_n-g_n-h_{n-1}\partial"] \arrow[dl, "h_n"'] & M_{n-1} \cdots \arrow[d] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] \\
\cdots \arrow[r, "\partial"] & N_n \arrow[r, "\partial"] & N_{n-1} \cdots
\end{tikzcd}$$

Falls so ein h existiert, heißen f und g *homotop*, in Symbolen $f \simeq g$.

Bemerkung 2.4.7. Homotope Kettenabbildungen induzieren die gleichen Abbildungen auf der (Co-) Homologie. In der Tat, $h\partial$ verschwindet auf $\ker \partial$, und ∂h nimmt Werte in $\operatorname{Im} \partial$ an.

Definition 2.4.8. Eine Kategorie C von R-Moduln heißt *gut*, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i). Die Objektklasse von C ist abgeschlossen unter Untermoduln, Quotienten und endlichen direkten Summen. (Präziser: Zu $M \in C$ und $N \subset M$ einem Untermodul von M existiert ein $N' \in C$, dass zu N isomorph ist, etc.)

(ii). C ist voll, d.h. sind M, N in C und $f : M \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, so ist f ein Morphismus in C.

Bemerkung 2.4.9.

(i). Abstrakt definiert man abelsche Kategorien durch die folgenden Eigenschaften:

- Es gibt ein Nullobjekt.
- Pullbacks und Pushouts existieren.
- Jeder Monomorphismus ist ein Kern und jeder Epimorphismus ist ein Cokern.

Für jede abelsche Kategorie A gibt es einen Ring R und einen volltreuen Funktor von A nach R-Moduln, der exakte Sequenzen auf exakte Sequenzen abbildet. Das 'Bild' von A ist eine gute Kategorie von R-Moduln. Umgekehrt ist jede gute Kategorie von R-Moduln abelsch. Daher sind die Konstruktionen, die wir durchführen werden, ebenso allgemein, als würden wir abelsche Kategorien benutzen.

Wir vermeiden dadurch etwas Maschinerie; natürlich schränkt das andererseits die Möglichkeiten kategorieller Konstruktionen ein.

(ii). Die obigen Definitionen (Kettenkomplexe, exakt, projektiv,...) und Konstruktionen (Fortsetzung eines Morphismus auf projektive Auflösungen...) kann man im Kontext guter Kategorien Wort für Wort in identischer Weise durchführen.

Eine *Ausnahme* bildet die Aussage, dass ein Modul genau dann projektiv ist, wenn er ein direkter Summand eines freien Moduls ist, der in der gewählten guten Kategorie liegt. Diese ist zwar für die guten Kategorien aller oder auch der endlich erzeugten R-Moduln richtig, aber im allgemeinen falsch.

Definition 2.4.10. Sei $F : C \to C'$ ein Funktor (oder Cofunktor) zwischen guten Kategorien. Dann heißt F *additiv*, falls $F(\varphi_1 + \varphi_2) = F(\varphi_1) + F(\varphi_2)$ für alle Morphismen φ_1, φ_2 in C, die den gleichen Definitions- und Bildbereich haben.

Bemerkung 2.4.11. Ein additiver Funktor bildet Kettenkomplexe auf Kettenkomplexe ab, Kettenabbildungen auf Kettenabbildungen und Kettenhomotopien auf Kettenhomotopien. Im allgemeinen werden exakte Sequenzen aber nicht auf exakte Sequenzen abgebildet.

Satz 2.4.12. Sei $F : C \to C'$ ein additiver (Co-) Funktor zwischen guten Kategorien und $V \in C$. Besitzt V projektive Auflösungen $P_\bullet$ und $Q_\bullet$, so sind $H(F(P_\bullet), F(\partial))$ und $H(F(Q_\bullet), F(\partial))$ kanonisch isomorph.

Beweis. Nach Satz 2.4.5 (i) gibt es Kettenabbildungen f und g, so dass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Q_\bullet \arrow[d] \\ V \arrow[r, equal] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q_\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d] & P_\bullet \arrow[d] \\ V \arrow[r, equal] & V \end{tikzcd}$$

Nach Satz 2.4.5 (ii) gibt es Kettenhomotopien $h : g \circ f \simeq \mathrm{id}_{P_\bullet}$ und $\tilde{h} : f \circ g \simeq \mathrm{id}_{Q_\bullet}$. Es folgt $F(h) : F(g) \circ F(f) \simeq \mathrm{id}_{F(P_\bullet)}$ und $F(\tilde{h}) : F(f) \circ F(g) \simeq \mathrm{id}_{F(Q_\bullet)}$. Insbesondere gilt $H(F(f))^{-1} = H(F(g))$.

Ist $f' : P_\bullet \to Q_\bullet$ eine andere Kettenabbildung, die das analoge Diagramm wie für f kommutativ macht, so ist nach Satz 2.4.5 (ii) $f' \simeq f$ und wie soeben zeigt man, dass $H(F(f')) = H(F(f))$; d.h., der Isomorphismus ist von der Wahl von f unabhängig. □

Korollar 2.4.13. Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul und $P_\bullet \to \mathbb{C}$ eine projektive Auflösung des trivialen Moduls. Dann sind $H^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ und $H^\bullet(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_n, V), \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\partial, V))$ kanonisch isomorph.

Beweis. Hier greifen wir auf das Ergebnis vor, dass die Koszul-Auflösung eine freie (insbesondere projektive) Auflösung ist (Theorem 2.6.1). Ansonsten folgt die Behauptung aus Satz 2.3.6 und Satz 2.4.12. □

2.5 Homologische Algebra: Lange exakte Sequenz

Das folgende Lemma wird als *Schlangenlemma* bezeichnet. Der Beweis des Lemmas ist eine sogenannte Diagrammjagd.

Lemma 2.5.1. In einer guten Kategorie sei folgendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen gegeben:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\mu'"] \arrow[d, "\varphi'"'] & M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varphi"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "\varphi''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\nu'"'] & N \arrow[r, "\nu"'] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dann existiert ein Homomorphismus $\varrho : \ker \varphi'' \to N' / \operatorname{Im} \varphi'$ mit

$$\ker \varrho = \mu(\ker \varphi) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} \varrho = \nu'^{-1}(\operatorname{Im} \varphi) / \operatorname{Im} \varphi' \ .$$

Beweis. Sei $\varphi''(m'') = 0$ und $m \in M$ mit $\mu(m) = m''$ gegeben. Es gibt ein $n' \in N'$ mit $\nu'(n') = \varphi(m) \in \ker \nu$. Man definiere $\varrho(m'') = n' + \operatorname{Im} \varphi'$. (D.h., ϱ 'schlängelt' sich durch das Diagramm.)
Zur Wohldefiniertheit. Seien $\tilde{m} \in M$ und $\tilde{n}' \in N'$ gegeben, so dass $\varphi(\tilde{m}) = m''$ und $\nu'(\tilde{n}') = \varphi(\tilde{m}')$. Es gilt $\mu(\tilde{m} - m) = 0$, also gibt es $m' \in M'$ mit $\mu'(m') = \tilde{m} - m$. Es gilt

$$\nu'(\tilde{n}') = \varphi(\tilde{m}) = \varphi(m) + \varphi(\mu'(m')) = \varphi(m) + \nu'(\varphi'(m')) = \nu'(n' + \varphi'(m')) \ ,$$

also, da ν' injektiv ist, $\tilde{n}' = n' + \varphi'(m')$, so dass $\tilde{n}' + \operatorname{Im} \varphi' = n' + \operatorname{Im} \varphi$. Dies zeigt die Wohldefiniertheit. Offenbar ist ϱ ein Homomorphismus.
Zu $\ker \varrho$. Sei $\varrho(m'') = 0$, d.h. $m'' = \mu(m)$, $\varphi(m) = \nu'(n')$ mit $n' \in \operatorname{Im} \varphi'$. Dann existiert ein $m' \in M'$ mit $\varphi'(m') = n'$, d.h. $\varphi(m) = \nu'(\varphi'(m')) = \varphi(\mu'(m'))$. Es gilt

$$m'' = \mu(m) = \mu(m - \mu'(m')) \quad \text{und} \quad \varphi(m - \mu'(m')) = 0 \ ,$$

d.h. $m'' \in \mu(\ker \varphi)$.
Umgekehrt sei $\varphi(m) = 0$ und $m'' = \mu(m)$. Dann ist $\nu'(0) = 0 = \varphi(m)$, also $\varrho(m) = \operatorname{Im} \varphi'$, d.h. $m \in \ker \varrho$.
Zu $\operatorname{Im} \varrho$. Nach Definition von ϱ ist $\operatorname{Im} \varrho \subset \nu'^{-1}(\operatorname{Im} \varphi) / \operatorname{Im} \varphi'$. Umgekehrt sei $n' + \operatorname{Im} \varphi' \in \nu'^{-1}(\operatorname{Im} \varphi) / \operatorname{Im} \varphi'$. Dann gibt es ein $\tilde{n}' \in N'$ mit $\tilde{n}' - n' \in \operatorname{Im} \varphi'$ und $\nu'(\tilde{n}') = \varphi(m)$ für ein $m \in M$. Es folgt

$$\varrho(\mu(m)) = \tilde{n}' + \operatorname{Im} \varphi' = n' + \operatorname{Im} \varphi' \ .$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Theorem 2.5.2. In einer guten Kategorie sei

$$0 \longrightarrow M'_\bullet \xrightarrow{\varphi} M_\bullet \xrightarrow{\psi} M''_\bullet \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von (homologisch graduierten) Komplexen. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, dashed] & H_n(M') \arrow[r, "H_n(\varphi)"] & H_n(M) \arrow[r, "H_n(\psi)"] & H_n(M'') \arrow[dll, rounded corners, to path={ -- ([xshift=2ex]\tikztostart.east) |- ([yshift=-2ex]\tikztostart.south) -| ([xshift=-2ex]\tikztotarget.west) -- (\tikztotarget)}, "\delta_n"] \\
& H^{n-1}(M') \arrow[r, "H_{n-1}(\varphi)"] & H_{n-1}(M) \arrow[r, "H_{n-1}(\psi)"] & H_{n-1}(M'') \arrow[r, dashed] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Sind die Komplexe cohomologisch graduiert, so erhöhen die verbindenden Homomorphismen δ den cohomologischen Grad.

Beweis. Nach Lemma 2.5.1 existieren Homomorphismen $\varrho_n : \ker \partial''_n \to M''_n / \operatorname{Im} \partial_n$. Es gilt $\varrho_n(\ker \partial''_n) \subset \varphi'^{-1}(\operatorname{Im} \partial_n) / \operatorname{Im} \partial'_n$, sowie

$$\varphi \partial'_{n-1} \varphi^{-1}(\operatorname{Im} \partial_n) = \partial_{n-1} \varphi \varphi^{-1}(\operatorname{Im} \partial_n) \subset \partial_{n-1}(\operatorname{Im} \partial_n) = 0 \ ,$$

also induziert ϱ_n eine Abbildung

$$\delta_n : H_n(M'') = \ker \partial''_n / \operatorname{Im} \partial''_{n+1} \to \ker \partial'_{n-1} / \operatorname{Im} \partial'_n = H_n(M') \ .$$

Es gilt

$$\operatorname{Im} \delta_n = \varphi^{-1}(\operatorname{Im} \partial_n) / \operatorname{Im} \partial'_n = \ker H_{n-1}(\varphi) \ ,$$

sowie

$$\ker \delta_n = \psi(\ker \partial_n) / \operatorname{Im} \partial''_{n+1} = \operatorname{Im} H_n(\psi) \ .$$

Weiter

$$\operatorname{Im} H_n(\varphi) = \varphi(\ker \partial'_n) / \operatorname{Im} \partial_{n+1} \subset \psi^{-1}(\operatorname{Im} \partial''_{n+1}) / \operatorname{Im} \partial_{n+1} = \ker H_n(\psi) \ .$$

Sei $m \in \ker H_n(\psi) = \psi^{-1}(\operatorname{Im} \partial''_{n+1})$, $\psi(m) = \partial''_{n+1}(m'')$. Da ψ surjektiv ist, gibt es $\tilde{m} \in M_{n+1}$ mit $\psi(\tilde{m}) = m''$. Es folgt

$$\psi \partial_{n+1}(\tilde{m}) = \partial''_{n+1} \psi(\tilde{m}) = \partial''_{n+1}(m'') = \psi(m) \ ,$$

d.h. $m - \partial_{n+1}\tilde{m} \in \ker \psi = \operatorname{Im} \varphi$, so dass es ein $m' \in M'_n$ gibt mit $\varphi(m') = m - \partial_{n+1}\tilde{m}$. Somit

$$m = \varphi(m') + \partial_{n+1}(\tilde{m})$$

und $m + \operatorname{Im} \partial_{n+1} = \varphi(m') + \operatorname{Im} \partial_{n+1} \in \operatorname{Im} H_n(\varphi)$. □

Korollar 2.5.3. Sind in einer kurzen exakten Sequenz von Komplexen in einer guten Kategorie zwei der Komplexe exakt, so gilt dies auch für den dritten.

Beweis. Sei M der potenziell homologisch nicht-triviale Term in der kurzen exakten Sequenz. In der langen exakten Sequenz kommen lauter exakte Teilsequenzen der Form $0 \to H_n(M) \to 0$ vor. Es folgt, dass M triviale Homologie hat. □

2.6 Exaktheit der Koszul-Auflösung

Theorem 2.6.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Liealgebra über einem Körper k der Charakteristik Null. Dann ist die Koszul-Auflösung $X_n = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_k \bigwedge^n \mathfrak{g}$ eine freie (insbesondere projektive) Auflösung des trivialen Moduls k.

Qua Definition sind die $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-Moduln X_n frei und wir wissen, dass $\varepsilon : X_\bullet \to \mathbb{C}$ ein Komplex ist. Es reicht also zu zeigen, dass dieser Komplex exakt ist. Zunächst beweisen wir dies in einem Spezialfall.

Satz 2.6.2. Das Theorem 2.6.1 gilt, wenn $\mathfrak{g}$ abelsch ist.

Beweis. Sei $x_1, \dots, x_N$ eine Basis von $\mathfrak{g}$. Dann gilt $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) = k[x_1, \dots, x_N]$. Für $m \leqslant N$ sei J_m das Ideal

$$J_m = \sum_{j=1}^{m} k[x_1, \dots, x_N]x_j \ .$$

Offenbar gilt $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})/J_m \cong k[x_{m+1}, \dots, x_N]$.
Das Differential ∂ lässt $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^n(x_1, \dots, x_m)$ invariant. Man erhält damit einen Komplex $X_j^{(m)} = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^j(x_1, \dots, x_m)$,

$$0 \longrightarrow X_m^{(m)} \xrightarrow{\partial} X_{m-1}^{(m)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_0^{(m)} = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes k \xrightarrow{\varepsilon_m} \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/J_m \longrightarrow 0$$

Dabei ist ε_m der kanonische Epimorphismus $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/J_m$. Insbesondere ist $X_j = X_j^{(m)}$ die Koszul-Auflösung. Wir zeigen per Induktion die Exaktheit von $X_\bullet^{(m)} \to \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/J_m \to 0$. Man beobachte, dass $\ker \varepsilon_m = J_m = \operatorname{Im} \partial_0$ ist. Die Exaktheit ist also äquivalent zu der von $\tilde{X}_j^{(m)} \to 0$, wobei $\tilde{X}_0^{(m)} = J_m$ und $\tilde{X}_j^{(m)} = X_j^{(m)}$ für $j > 0$.
Für $m = 0$ ist nichts zu zeigen, da $\tilde{X}_j^{(m)} = 0$. Weiter gilt $\tilde{X}_j^{(m)} \subset \tilde{X}_j^{(m+1)}$ und dies ist per Konstruktion eine Inklusion von Komplexen. Man betrachte die kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow \tilde{X}_\bullet^{(m)} \longrightarrow \tilde{X}_\bullet^{(m+1)} \longrightarrow \tilde{X}_\bullet^{(m+1)}/X_\bullet^{(m)} \longrightarrow 0$$

Per Induktionannahme ist die linke Seite exakt. Wir zeigen, dass die rechte Seite exakt ist. Dann folgt die Behauptung aus Korollar 2.5.3.
Sei $r_m : X_\bullet^{(m)} \to \tilde{X}_\bullet^{(m+1)}/\tilde{X}_\bullet^{(m)}$ der durch Rechtsmultiplikation mit x_m induzierte Homomorphismus. Man rechnet leicht nach, dass dies ein Isomorphismus von Komplexen ist und die Behauptung folgt. □

Beweis von Theorem 2.6.1. Man betrachtet die Filtrierung $\mathfrak{U}^j(\mathfrak{g})$ und die Subkomplexe $X_j^{(p)} = \mathfrak{U}^{p-j}(\mathfrak{g}) \otimes_k \bigwedge^j \mathfrak{g}$ für $0 \leqslant j \leqslant p$. Der Komplex $X_\bullet^{(p)} \to k \to 0$ ist exakt genau dann, wenn $\tilde{X}_\bullet^{(p)} \to 0$ exakt ist, wobei $\tilde{X}_0^{(p)} = X_0^{(p)}/k$ und $\tilde{X}_j^{(p)} = X_j^{(p)}$ für $j > 0$. Da $X_\bullet = \bigcup_{p \geqslant 0} X_\bullet^{(p)}$, zeigen wir per Induktion die Exaktheit von $\tilde{X}_\bullet^{(p)} \to 0$.
Für $p = 0$ erhält man den Komplex $0 \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \to 0$, wobei das nicht-triviale Differential $\mathrm{id}_{\mathfrak{g}}$ ist. Man betrachtet im Induktionsschritt die kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \longrightarrow \tilde{X}_\bullet^{(p)} \longrightarrow \tilde{X}_\bullet^{(p+1)} \longrightarrow \tilde{X}_\bullet^{(p+1)}/\tilde{X}_\bullet^{(p)} = X_\bullet^{(p+1)}/X_\bullet^{(p)} \longrightarrow 0 \ .$$

Die rechte Seite ist

$$X_j^{(p+1)}/X_j^{(p)} = \mathfrak{U}^{p+1-j}(\mathfrak{g})/\mathfrak{U}^{p-j}(\mathfrak{g}) \otimes \textstyle\bigwedge^j \mathfrak{g} \cong S^{p+1-j}(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^j \mathfrak{g}$$

nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt und man rechnet nach, dass das Differential auf der rechten Seite die Einschränkung des in Satz 2.6.2 betrachteten ist. Die rechte Seite der kurzen exakten Sequenz ist also isomorph zu dem Teil des Koszul-Komplexes für die

Abelianisierung von $\mathfrak{g}$, der homogen vom Grad $p + 1 - \bullet$ ist. $\square$

Bemerkung 2.6.3. Eine genaue Betrachtung des Beweises zeigt, dass die Argumente auch ohne die Annahme endlicher Dimension durchgehen.

3 Anwendungen der Liealgebra-Cohomologie

3.1 Ein einfaches Beispiel

Satz 3.1.1. Sei $\mathfrak{g}$ eine Liealgebra (über $\mathbb{C}$) und $\mathfrak{h}$ eine endlich-dimensionale Unteralgebra. Sei V ein $\mathfrak{h}$-Modul und $U = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{h})} V$. Dies ist durch Linksmultiplikation ein $\mathfrak{g}$-Modul. Es gilt

$$H^n(\mathfrak{g}, U^*) = 0 \quad \text{für alle } \; n > \dim \mathfrak{h} \, .$$

Wir zeigen zunächst, dass die folgenden Lemmata den Satz beweisen und diskutieren sie anschließend in einem weiteren Kontext.

Lemma 3.1.2. Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul. Der Funktor $(-) \otimes_{\mathbb{C}} V$ bildet projektive $\mathfrak{g}$-Moduln auf projektive $\mathfrak{g}$-Moduln ab und exakte Sequenzen auf exakte Sequenzen.

Lemma 3.1.3. Der Funktor $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{h})} (-)$ bildet projektive $\mathfrak{h}$-Moduln auf projektive $\mathfrak{g}$-Moduln ab und exakte Sequenzen auf exakte Sequenzen.

Beweis. Da ein Modul genau dann projektiv ist, wenn ein diekter Summand eines freien, und der Funktor additiv ist (also direkte Summen auf direke Summen abbildet), reicht es, die erste Aussage für freie Moduln zu zeigen. In jeden freien Modul gilt $F = \mathfrak{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} V$ für einen Vektorraum V, also

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{h})} F = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{h})} \mathfrak{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathbb{C}} V = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{C}} V$$

und dies zeigt die erste Behauptung.
Für die zweite reicht es, Lemma 3.1.2 (für $\mathfrak{g} = 0$) anzuwenden, denn für ein Vektorraumkomplement $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ von $\mathfrak{h}$ gibt es natürliche Vektorraumisomorphismen

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{h})} W \cong S(\mathfrak{q}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{U}(\mathfrak{h}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{h})} W \cong S(\mathfrak{q}) \otimes_{\mathbb{C}} W \, ,$$

wie aus dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt folgt. □

Beweis von Satz 3.1.1. Sei (X_n) die Koszul-Auflösung. Wie wir wissen, ist

$$H^n(\mathfrak{g}, U^*) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(X_\bullet, U^*)) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(X_\bullet, \mathrm{Hom}(U, \mathbb{C}))) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(X_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} U, \mathbb{C})) \, ,$$

da $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(X_\bullet, \mathrm{Hom}(U, \mathbb{C})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(X_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} U, \mathbb{C})$ als Komplexe (folgt aus der Natürlichkeit). Nun ist $(X_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} U, \partial \otimes \mathrm{id})$ ein exakter Komplex, also nach Lemma 3.1.2 eine projektive Auflösung von U. Es reicht also, eine projektive Auflösung Y von U zu finden, so dass $H^n(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(Y_\bullet, \mathbb{C})) = 0$ für alle $n > \dim \mathfrak{h}$.
Sei dazu $X_\bullet^{\mathfrak{h}}$ die Koszul-Auflösung von $\mathbb{C}$ als $\mathfrak{h}$-Modul. Dann ist $X_\bullet^{\mathfrak{h}} \otimes_{\mathbb{C}} V$ eine projektive Auflösung von V. Wir definieren $Y_\bullet = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{h})} V$. Nach Lemma 3.1.3 ist dies eine projektive Auflösung. Aber $Y_n = 0$ für $n > \dim \mathfrak{h}$ und dies zeigt die Behauptung. □

3.2 Homologische Algebra: Abgeleitete Funktoren

In dem obigen Beispiel haben wir gesehen, dass eine besondere und nützliche Eigenschaft eines Funktors ist, exakte Sequenzen zu erhalten und projektive auf projektive Objekte abzubilden. Beide Aspekte wollen wir etwas systematisieren.

Definition 3.2.1. Sei $F : C \to C'$ ein additiver Funktor von guten Kategorien (covariant oder kontravariant). F heißt *exakt*, wenn er exakte Sequenzen auf exakte Sequenzen abbildet. Man sieht leicht, dass es dafür reicht, kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\varphi_{12}} M_2 \xrightarrow{\varphi_{23}} M_3 \longrightarrow 0$$

wieder auf solche abzubilden (Übung).
Man nennt F *links exakt*, falls für jede kurze exakte Sequenz wie oben die folgende Sequenz exakt ist:

$$0 \longrightarrow F(M_{\sigma(1)}) \xrightarrow{F(\varphi_{\sigma(12)})} F(M_{\sigma(2)}) \xrightarrow{F(\varphi_{\sigma(23)})} F(M_{\sigma(3)}) \ ,$$

wobei $\sigma = \mathrm{id}$, wenn F covariant ist, und $\sigma = (13)$, wenn F kontravariant ist.
Analog nennt man F *rechts exakt*, wenn in der entsprechenden Situation stets die folgende Sequenz exakt ist:

$$F(M_{\sigma(1)}) \xrightarrow{F(\varphi_{\sigma(12)})} F(M_{\sigma(2)}) \xrightarrow{F(\varphi_{\sigma(23)})} F(M_{\sigma(3)}) \longrightarrow 0 \ .$$

Man sieht ein, dass für die Exaktheit der jeweiligen Sequenzen die Exaktheit nur an den Stellen im Definitionsbereich vorausgesetzt werden muss, an der sie im Bildbereich gefordert wird (Übung).

Bemerkung 3.2.2.

(i). $\mathrm{Hom}_R(-, V)$ ist kontravariant und links exakt.

Sei

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Sei $h \in \mathrm{Hom}_R(M'', V)$ mit $h \circ \psi = \mathrm{Hom}_R(\psi, \mathrm{id})(h) = 0$. Da $\mathrm{Im}\,\psi = M''$, ist $h = 0$. Sei $h \in \mathrm{Hom}_R(M, V)$ mit $h \circ \varphi = \mathrm{Hom}_R(\varphi, \mathrm{id})(h) = 0$. Dann gilt $\ker h \supset \mathrm{Im}\,\varphi = \ker \psi$. Definiert man $g \in \mathrm{Hom}_R(M'', V)$ durch $g(\psi(m)) = h(m)$, so ist g ein wohldefinierter R-Modul-Homomorphismus und $h = g \circ \psi = \mathrm{Hom}_R(\psi, \mathrm{id})(g)$.

(ii). $\mathrm{Hom}_R(V, -)$ ist covariant und links exakt.

Sei

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Es gilt für alle $h \in \mathrm{Hom}_R(V, M')$

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}, \varphi)(h) = 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi \circ h = 0 \;\Leftrightarrow\; h = 0\,.$$

Dann ist $\ker \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}, \varphi) = 0$. Ist $h \in \mathrm{Hom}_R(V, M)$ mit $\psi \circ h = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}, \psi)(h) = 0$, so gilt $\mathrm{Im}\, h \subset \ker \psi = \mathrm{Im}\, \varphi$, also existiert $g \in \mathrm{Hom}_R(V, M')$ mit $h = \varphi \circ g = \mathrm{Hom}_R(\mathrm{id}, \varphi)(g)$. Dies zeigt die Behauptung.

(iii). $V \otimes_R (-)$ ist covariant und rechts exakt.

Sei

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Sei $x \in V \otimes_R M''$, $x = \sum_j v_j \otimes m''_j$ mit $v_j \in V$, $m''_j \in M''$. Es gibt $m_j \in M$ mit $\psi(m_j) = m''_j$. Dann gilt mit $y = \sum_j v_j \otimes m_j \in V \otimes_R M$, dass $x = (\mathrm{id} \otimes_R \psi)(y)$. Um zu sehen, dass $\ker(\mathrm{id} \otimes_R \psi) = \mathrm{Im}(\mathrm{id} \otimes_R \varphi)$, reicht es zu zeigen, dass $\ker(\mathrm{id} \otimes_R \psi) = V \otimes_R \ker \psi$.

Man definiert dazu eine Abbildung $f : V \otimes_R M'' \to V \otimes_R M / V \otimes_R \ker \psi$ durch die Vorschrift $f(v \otimes \psi(m)) = [v \otimes m]$. Diese ist offenbar wohldefiniert.

Ist $\pi : V \otimes_R M \to V \otimes_R M / V \otimes_R \ker \psi$ die kanonische Projektion, so gilt $f \circ (\mathrm{id} \otimes_R \psi) = \pi$, also $\ker(\mathrm{id} \otimes_R \psi) \subset \ker \pi = V \otimes_R \ker \psi$.

Satz 3.2.3.

(i). Genau dann ist P projektiv, wenn $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ exakt ist.

(ii). Genau dann ist $\mathrm{Hom}_R(-, I)$ exakt, wenn jedes Diagramm mit exakter Zeile der folgenden Form

$$\begin{tikzcd} & I & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] & M' \arrow[ul, dashed, "\tilde{\varphi}"'] \end{tikzcd} ,$$

wie angezeigt kommutativ ergänzt werden kann. In diesem Fall heißt I *injektiv*.

Beweis. Zu (i). Sei

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz. In der Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P, M') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \varphi)} \mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \psi)} \mathrm{Hom}_R(P, M'') \longrightarrow 0$$

ist Exaktheit an der Stelle $\mathrm{Hom}_R(P, M'')$ zu diskutieren. Ist also $h \in \mathrm{Hom}_R(P, M'')$ gegeben, so ist die Existenz von $h' \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ mit $h = \psi \circ h' = \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \psi)(h')$ genau dann stets gesichert, wenn P projektiv ist.
Zu (ii). Es ist Analoges zu zeigen und dies ist in analoger Weise zu bewerkstelligen. □

Korollar 3.2.4. Ist R ein Körper, so sind die Funktoren $\mathrm{Hom}_R(V,-)$, $\mathrm{Hom}_R(-,V)$ und $V \otimes_R (-)$ exakt.

Beweis. Für die ersten beiden folgt dies aus der Bemerkung, dass ein freier Modul projektiv und injektiv ist. Im letzten Fall hilft der Umstand, dass man jedes $x \in V \otimes_R M$ als $v = \sum_j v_j \otimes m_j$ darstellen kann, wobei (v_j) linear unabhängig ist. □

Für einseitig exakte Funktoren ist die Konstruktion: Ersetze einen Modul durch eine Auflösung, nehme die (Co-) Homologie, sinnvoll. Genauer muss man je nach Situation projektive und injektive Auflösungen betrachten und Homologie oder Cohomologie betrachten. Die präzisen Definitionen sind wie folgt.

Definition 3.2.5. Eine (cohomologisch graduierte) Auflösung

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^\bullet$$

heißt *injektiv*, falls alle I^j injektiv sind.
Man sagt, eine gute Kategorie C habe *genug Projektive*, falls jedes Objekt der Quotient eines projektiven ist. (D.h., es gibt eine kurze exakte Sequenz $P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ mit P projektiv.) Analog sagt man, C habe *genug Injektive*, falls jedes Objekt Unterobjekt eines injektiven ist. (D.h., es gibt eine kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow M \longrightarrow I$ mit I injektiv.) In ersteren Fall hat jedes Objekt eine projektive Auflösung; im zweiten Fall hat jedes Objekt eine injektive Auflösung (Übung).

Bemerkung 3.2.6. R-Mod hat genug Injektive und Projektive. Zum Beispiel hat (je nach Ring) aber die volle Unterkategorie der Moduln endlicher Länge nicht unbedingt genug Injektive.

Definition 3.2.7. Sei $F : C \to C'$ ein additiver Funktor von guten Kategorien, wobei C genug Injektive und Projektive besitze.
Ist F links-exakt, so definiert man *Rechts-Ableitungen* $RF^i = F^i$ von F, die cohomologisch graduiert sind. Ist F covariant, so definiert man $RF^i(M) = H^i(F(I^\bullet))$, wobei $0 \longrightarrow M \longrightarrow I^\bullet$ eine *injektive* Auflösung von M sei. Ist F kontravariant, so definiert man $RF^i(M) = H^i(F(P_\bullet))$, wobei $P_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$ eine *projektive* Auflösung von M ist.
Ist F rechts-exakt, so definiert man *Links-Ableitungen* $L_iF = F_i$ von F, die homologisch graduiert sind. Ist F covariant, so definiert man $LF_i(M) = H_i(F(P_\bullet))$, wobei $P_\bullet \longrightarrow M \longrightarrow 0$ eine projektive Auflösung von M ist. Ist F kontravariant, so definiert man umgekehrt $L_iF(M) = H_i(F(I^\bullet))$, wobei $0 \longrightarrow M \longrightarrow I^\bullet$ eine injektive Auflösung ist.
Die Graduierung der Ableitungen wird also durch die Exaktheit von F bestimmt und die Covarianz oder Kontravarianz von F bestimmt dann, ob injektive (cohomologische) oder projektive (homologische) Auflösungen benutzt werden müsssen.

Satz 3.2.8. Die oben definierten Ableitungen von Funktoren sind wohldefiniert bis auf natürliche Isomorphie und definieren tatsächlich Funktoren.

Beweis. Im Fall projektiver Auflösungen ist dies in Satz 2.4.12 bewiesen worden. Entsprechende Sätze gelten auch für injektive Auflösungen. □

Bemerkung 3.2.9. Welche Exaktheit für den abzuleitenden Funktor vorausgesetzt wird, spielte bisher keine Rolle. Dies ist im folgenden Satz anders, der zeigt, dass die Definition abgeleiteter Funktoren natürlich ist.

Satz 3.2.10. Sei F links-exakt und G rechts-exakt. Dann gibt es natürliche Isomorphismen $R^0F \cong F$ und $L_0G \cong G$.

Beweis. Sei F covariant und $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} I^\bullet$ eine injektive Auflösung. Dann ist die Sequenz $0 \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(\varepsilon)} F(I^0) \xrightarrow{d^0} F(I^1)$ exakt, also

$$F(M) = \ker d^0 = H^0(F(I^\bullet)) = R^0F(M) \ .$$

Dass der Isomorphismus natürlich ist, sieht man wie im vorherigen Satz. (Vgl. den Beweis von Satz 2.4.12.) Die anderen Fällen beweist man analog. □

Die beiden folgenden Sätze folgen aus dem Umstand, dass exakte additive Funktoren Isomorphismen auf der (Co-) Homologie von Komplexen induzieren.

Satz 3.2.11. Sei $F : C' :\to C$ ein exakter Funktor, $G : C'' \to C$. Ist F covariant und G links- (rechts-) exakt, so ist $F \circ G$ links- (rechts-) exakt und $R^i(F \circ G) = F \circ R^iG$ ($L_i(F \circ G) = F \circ L_iG$). Ist F kontravariant und G links- (rechts-) exakt, so ist $F \circ G$ rechts- (links-) exakt und $L_i(F \circ G) = F \circ R^iG$ ($R^i(F \circ G) = F \circ L_iG$).

Satz 3.2.12. Seien $F : C \to C'$ und $G : C' \to C''$ Funktoren, wobei F exakt sei. Ist F covariant, so sei G durch Injektive (Projektive) definiert und F bilde Injektive auf Injektive (Projektive auf Projektive) ab. Ist F kontravariant, so sei G durch Injektive (Projektive) definiert und F bilde Projektive auf Injektive (Injektive auf Projektive) ab. Dann ist $G \circ F$ links- (rechts-) exakt, falls G links- (rechts-) exakt ist, und es gilt $R^i(G \circ F) = R^iG \circ F$ ($L_i(G \circ F) = L_iG \circ F$).

Bemerkung 3.2.13. Die allgemeine Situation der Ableitung einer Komposition von halbseitig exakten Funktoren ist wesentlich komplizierter. Stichwort: Grothendieck-Spektralsequenz.

3.3 Die fundamentalen Funktoren auf $\mathfrak{g}$-Moduln

Sei $\mathfrak{g}$ eine endlich-dimensionale Liealgebra über $\mathbb{C}$ (oder irgendeinem Körper der Charakteristik 0). Wir betrachten die Kategorie $\mathfrak{g}$- Mod aller $\mathfrak{g}$-Moduln.

Satz 3.3.1. Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul.

(i). $V \otimes_{\mathbb{C}} (-)$ ist covariant, exakt und bildet projektive auf projektive Moduln ab.

(ii). $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-, V)$ ist kontravariant, exakt und bildet projektive auf injektive Moduln ab.

(iii). $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, -)$ ist covariant, exakt und bildet injektive auf injektive Moduln ab.

Beweis. Covarianz/Kontravarianz und Exaktheit sind bekannt.
Zu (i). Sei P projektiv. Es gilt $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P \otimes_{\mathbb{C}} U, W) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, W))$. Die rechte Seite ist ein exakter Funktor in W. Folglich ist $P \otimes_{\mathbb{C}} U$ projektiv.
Zu (ii). Sei P projektiv. Es gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(P, U)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W \otimes_{\mathbb{C}} P, U) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W, U)) .$$

Die rechte Seite ist ein exakter Funktor in W, also ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(P, U)$ injektiv.
Zu (iii). Sei I injektiv. Es gilt $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, I)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W \otimes_{\mathbb{C}} U, I)$. Die rechte Seite ist ein exakter Funktor in W, also ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U, I)$ injektiv. □

3.3.2. Ist $X_\bullet \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$ die Koszul-Auflösung, so erhält man also für jeden $\mathfrak{g}$-Modul eine projektive und eine injektive Auflösung

$$X_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} V \longrightarrow V \longrightarrow 0 \qquad\qquad 0 \longrightarrow V \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X_\bullet, V)$$

Diese heißen *Standard-Auflösungen.* Insbesondere besitzt $\mathfrak{g}$- Mod genug Injektive und genug Projektive und man kann halbseitig exakte Funktoren ableiten. Wir haben bereits eingesehen, dass $H^n(\mathfrak{g}, V) = R^n F(V)$ gilt, wobei $F(V) = V^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}, V)$ der linksexakte Invariantenfunktor ist. Dual kann man den *Coinvarianten-Funktor*

$$G(V) = V_{\mathfrak{g}} = V/\mathfrak{g}V = \mathbb{C} \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})} V$$

definieren, der aufgrund der allgemeinen Theorie rechts-exakt ist. Die Linksableitungen definieren die *Liealgebra-Homologie* $H_n(\mathfrak{g}, V) = L_n G(V)$. Wie die allgemeine Theorie zeigt, lässt sich diese aus dem folgenden Komplex berechnen:

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathfrak{g}} (X_\bullet \otimes_{\mathbb{C}} V) = {\textstyle\bigwedge}^\bullet \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} V \longrightarrow 0$$

mit dem Differential

$$\begin{aligned} \partial(x_1 \cdots x_n \otimes v) = & \sum_{j=1}^{n} (-1)^j x_1 \cdots \widehat{x_j} \cdots x_n \otimes x_n v \\ & + \sum_{p<q} (-1)^{p+q} [x_p, x_q] x_1 \cdots \widehat{x_{p,q}} \cdots x_n \otimes v . \end{aligned}$$

Definition 3.3.3. Sei $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra. Wir definieren Funktoren

$$I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}, P_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} : \mathfrak{q}\text{- Mod} \to \mathfrak{g}\text{- Mod} \quad \text{und} \quad F_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{q}} : \mathfrak{q}\text{- Mod} \to \mathfrak{g}\text{- Mod} .$$

Die Funktoren $P_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$ und $I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$ heißen *Induktion* bzw. *Coinduktion* und sind wie folgt definiert:

$$P_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{q})} (-) \quad \text{und} \quad I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), -) .$$

DIe $\mathfrak{g}$-Wirkungen sind hier respektive durch Linksmultiplikation auf dem ersten Tensorfaktor bzw. durch Rechtsmultiplikation im Argument gegeben, d.h.

$$x(u \otimes v) = xu \otimes v \quad \text{und} \quad (x\varphi)(u) = \varphi(ux)$$

für alle $x \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{g}, V)$, $v \in V$, $V \in \mathfrak{q}$-Mod.
Der Funktor $F_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$ heißt *vergesslicher* oder *Vergissfunktor* und ordnet einem jeden $\mathfrak{g}$-Modul (-Morphismus) den zugrundeliegen $\mathfrak{q}$-Modul (-Morphismus) zu.

Bemerkung 3.3.4. Die Funktoren $I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$ und $P_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$ sind algebraische Varianten der 'Induktion' von Gruppendarstellungen. Z.B. sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ und $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ die 'negative' Borelalgebra für irgendeine Wahl des positiven Systems. Dann ist

$$H^0(G_{\mathbb{C}}/B, \mathbb{C}_\lambda) \subset \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \mathbb{C}_\lambda) = I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}_\lambda) \ ,$$

indem man $f \in H^0(G_{\mathbb{C}}/B, \mathbb{C}_\lambda)$ die Abbildung φ_f, $\varphi_f(u) = (uf)(1)$, zuordnet.
Es ist somit $I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}_\lambda)$ als eine Menge formaler vektorwertiger Potenzreihen aufzufassen, also als algebraischer 'Abschluss' der holomorphen Schnitte in dem Geradenbündel $G_{\mathbb{C}} \times^B \mathbb{C}_\lambda$.

Satz 3.3.5. Seien $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ Unteralgebren.

(i). Die Funktoren $I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$, $P_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$ und $F_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{q}}$ sind covariant und exakt.

(ii). Es gilt $P_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} P_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{q}} = P_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}$, $I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}} I_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{q}} = P_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}$ und $F_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{h}} F_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{q}} = F_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{h}}$.

(iii). Es gibt natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}(U), V) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(U, F_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{q}}(V)) \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}(U)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(F_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{q}}(V), U)$$

für alle $U \in \mathfrak{q}$-Mod und $V \in \mathfrak{g}$-Mod.

(iv). $P_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$ bildet Projektive auf Projektive ab und $I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$ bildet Injektive auf Injektive ab.

Beweis. Zu (i). Die Covarianz liegt auf der Hand, wie auch die Exaktheit von $F_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{q}}$. Die Exaktheit von $P_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$ folgt wie in Lemma 3.1.3. Analog argumentiert man für die Exaktheit von $I_{\mathfrak{q}}^{\mathfrak{g}}$, denn $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S(\mathfrak{q}'), -)$ ist ein exakter Funktor auf Vektorräumen.
Zu (ii). Die dritte Identität ist trivial. Die anderen beiden folgen, in Verbindung mit (iii).
Zu (iii). Es gilt

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{q})} U, V) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(U, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), V)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(U, F_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{q}}(V))$$

und

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), U)) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})} V, U) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}(F_{\mathfrak{g}}^{\mathfrak{q}}(V), U) \ .$$

Zu (iv). Dies folgt aus (iii) wie im Beweis von Satz 3.3.1. □

Bemerkung 3.3.6. Auf der Basis der bis hierhin durchgeführten Überlegungen lässt sich der Beweis von Satz 3.1.1 nun also besser verstehen und in 'kanonischer Weise' führen.

3.4 Ext **und Poincaré-Dualität**

Definition 3.4.1. Um die Ableitungen von $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}$ genauer zu verstehen, definieren wir $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{g}}$. Für $U \in \mathfrak{g}\text{-}\mathrm{Mod}$ sei $\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}}(U,-) = R^n\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U,-)$.

Satz 3.4.2. Für $U, V \in \mathfrak{g}\text{-}\mathrm{Mod}$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}}(U,V) = H^n(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)) .$$

Weiter ist $\mathrm{Ext}^n(-,V) = R^n\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(-,V)$.

Bemerkung 3.4.3. Der zweite Isomorphismus gilt für allgemeinere Ringe als $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, der Beweis erfordert aber fortgeschrittenere Methoden.

Beweis von Satz 3.4.2. Sei I^j eine injektive Auflösung von V. Dann gilt

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}}(U,V) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U,I^j)) .$$

Es gilt $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U,I^j) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,I^j)^{\mathfrak{g}}$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,I^j)$ ist nach Satz 3.3.1 eine injektive Auflösung von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)$. Damit ist $H^n(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(U,I^j)) = H^n(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V))$ und nach Satz 3.2.8 sind alle Isomorphismen natürlich.
Analog sei P_j eine projektive Auflösung von U. Dann gilt

$$R^n\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(-,V)(U) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P_j,V)) .$$

Es ist $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(P_j,V)$ eine injektive Auflösung von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)$, also folgt

$$R^n\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(-,V)(U) = H^n(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U,V)) ,$$

natürlich isomorph. Es folgt die Behauptung. □

Das folgende Theorem ist bekannt als *Shapiros Lemma*. Es ist eine abgeleitete Version von Satz 3.3.5 (iii).

Theorem 3.4.4. Sei $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra. Es gibt natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}}(P^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{q}}(U),V) = \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{q}}(U, F^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{g}}(V)) \quad \text{und} \quad \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}}(V, I^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{q}}(U)) = \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{q}}(F^{\mathfrak{q}}_{\mathfrak{g}}(V),U)$$

für $U \in \mathfrak{q}\text{-}\mathrm{Mod}$ und $V \in \mathfrak{g}\text{-}\mathrm{Mod}$.

Beweis. Angesichts dessen, dass die Funktoren $I^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{q}}$ und $P^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{q}}$ exakt sind und Projektive auf Projektive bzw. Injektive auf Injektive abbilden, folgt die Behauptung aus Satz 3.3.5 (iii), in Verbindung mit Satz 3.4.2 und Satz 3.2.12. □

Bemerkung 3.4.5. Mit Shapiros Lemma lässt sich die Aussage von Satz 3.1.1 präzisieren. Sei also $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Unteralgebra und $U = P^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}}(V)$, wobei V ein $\mathfrak{h}$-Modul sei. Dann gilt

$$H^n(\mathfrak{g}, U^*) = H^n(\mathfrak{g}, \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(P^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}}(V), \mathbb{C})) = \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{g}}(P^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}}(V), \mathbb{C}) = \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{h}}(V, \mathbb{C}) = H^n(\mathfrak{h}, V^*) .$$

Insbesondere ist dies für $n > \mathfrak{h}$ gleich 0.

Wir haben oben Liealgebra-Homologie in Analogie zur Cohomologie eingeführt. Wir wollen nun den Bezug zwischen beiden Invarianten besser verstehen. Der folgende Satz ist in Analogie zu einem Satz aus der Differentialgeometrie (über de Rham-(Co-)Homologie) als *Poincaré-Dualität* bekannt.

Theorem 3.4.6. Sei $V \in \mathfrak{g}$-Mod und $N = \mathfrak{g}$. Für $n \leqslant N$ gibt es natürliche Isomorphismen

$$H^n(\mathfrak{g}, V^*) = H_n(\mathfrak{g}, V)^* \ , \ H^n(\mathfrak{g}, V) = H_{N-n}(\mathfrak{g}, V \otimes_{\mathbb{C}} \textstyle\bigwedge^N \mathfrak{g}^*)$$

und

$$H^n(\mathfrak{g}, V^*) = H^{N-n}(\mathfrak{g}, V \otimes \textstyle\bigwedge^N \mathfrak{g}^*) \ .$$

Beweis. Die dritte Identität folgt aus den anderen beiden. Die erste ist einfach: Der Funktor $D : V \mapsto V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-, \mathbb{C})(V)$ ist nach Satz 3.3.1 kontravariant, exakt und bildet projektive auf injektive Moduln ab. Aus Satz 3.2.11 und Satz 3.2.12 folgt

$$R^n(F \circ D) = R^n F \circ D \quad \text{und} \quad R^n(D \circ G) = D \circ L_n G \ ,$$

wobei $F = (-)^{\mathfrak{g}}$ und $G = (-)_{\mathfrak{g}}$. Die Behauptung folgt nun aus

$$F \circ D(V) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{C}, V^*) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C} \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})} V, \mathbb{C}) = D \circ G(V) \ ,$$

welches natürlich in V ist.
Der zweite Isomorphismus ist etwas anspruchsvoller. Die Multiplikation von Formen induziert eine Paarung

$$\textstyle\bigwedge^n \mathfrak{g} \otimes \bigwedge^{N-n} \mathfrak{g} \to \bigwedge^N \mathfrak{g} \ ,$$

die nicht-ausgeartet und $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-invariant ist. Folglich gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi : \textstyle\bigwedge^n \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} V \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^N \mathfrak{g}^* \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^{N-n} \mathfrak{g}^*, V) \ ,$$

gegeben durch

$$\varphi(x \otimes v \otimes \omega)(y) = \langle xy, \omega \rangle \cdot v \ .$$

Es reicht zu zeigen, dass dies (bis auf Vorzeichen) ein Isomorphismus von Komplexen ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle xy, d(\omega \otimes v) \rangle = \langle \partial(xy), \omega \otimes v \rangle = \langle \partial(x)y + (-1)^n x \partial y, \omega \otimes v \rangle \\ &= \varphi(\partial(x \otimes v) \otimes \omega)(y) + (-1)^n (d\varphi(x \otimes v \otimes \omega))(y) \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. □

3.5 Das Theorem von Kostant

3.5.1. Seien $G = \mathrm{U}(n)$, $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{h}_0$ die Diagonalmatrizen in $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = i\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 \otimes \mathbb{C}$. Weiter sei $\Delta = \Delta(\mathfrak{g} : \mathfrak{h}) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j | i \neq j\}$ das zugehörige Wurzelsystem, Δ^+ ein positives System und $W = N_G(T)/T = S_n$ die Weylgruppe.
Dem positiven System ordnet man die Menge $B(\Delta^+) = \{\alpha \in \Delta^+ \mid \alpha \notin \Delta^+ + \Delta^+\}$ der *einfachen Wurzeln* zu. Wir halten die folgenden Tatsachen fest.
Satz 3.5.2. Die Weylgruppe W wirkt treu auf $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$. Für jedes $\alpha \in \Delta$ ist die Spiegelung s_α an $\alpha^\perp = \{\beta | \langle \alpha, \beta \rangle = 0\}$, gegeben durch $s_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha|^2} \alpha$, in W enthalten. Weiter ist die Menge der s_α, $\alpha \in B(\Delta^+)$, ein Erzeugendensystem für W.
Definition 3.5.3. Jeder Wahl eines positiven Systems kann man somit eine Längenfunktion $\ell : W \to \mathbb{N}$ zuordnen,

$$\ell(w) = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in B(\Delta^+) : w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_m}\} .$$

Sie hat folgende Eigenschaften:

$$\ell(ww') \leqslant \ell(w) + \ell(w') \quad \text{und} \quad \ell(s_\alpha w) \in \{\ell(w) - 1, \ell(w) + 1\}$$

für alle $\alpha \in B(\Delta^+)$. (Man beachte $s_\alpha^2 = \mathrm{id}$.)
Es gibt genau ein Element w_0 maximaler Länge in W und seine Länge ist $|\Delta^+|$. Es hat die Eigenschaft, dass $w_0(\Delta^+) = -\Delta^+$. Die folgende Tatsache präzisiert diesen Zusammenhang zwischen Länge und positiven Wurzeln, die zu negativen gemacht werden.
Lemma 3.5.4. Es gilt $\ell(w) = |\Delta^+(w)|$, wobei

$$\Delta^+(w) = \{\beta \in \Delta^+ \mid w^{-1}\beta < 0\} .$$

Theorem 3.5.5. Sei $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$, V eine endlich-dimensionale irreduzible G-Darstellung vom höchsten Gewicht λ und $0 \leqslant k \leqslant \dim \mathfrak{n} = \frac{n(n-1)}{2}$. Dann ist $H^k(\mathfrak{n}, V)$ als T-Darstellung multiplizitätsfrei. Die auftretenden T-Gewichte sind genau

$$w.\lambda = w(\lambda + \varrho) - \varrho \ , \ w \in W \ , \ \ell(w) = k .$$

Bemerkung 3.5.6. Bevor wir den Satz allgemein beweisen, ist es interessant, den Fall $k = d := \dim \mathfrak{n}$ zu betrachten. Es gilt $\dim \mathfrak{n} = |\Delta^+|$, also besagt das Theorem in diesem Fall, dass $H^k(\mathfrak{n}, V)$ ein eindimensionaler T-Modul ist, vom Gewicht

$$w_0.\lambda = w_0\lambda - \varrho - \varrho = w_0\lambda - 2\varrho .$$

Ist andererseits $v \in V$, $v \neq 0$, ein Vektor *niedrigsten* Gewichts (also höchsten Gewichts bzgl. $-\Delta^+$), so hat v das Gewicht $w_0\lambda$. Ist $V = \bigoplus_\mu V_\mu$ die Gewichtsraumzerlegung von V,

so gilt für jedes μ, dass $\mu = w_0\lambda + \sum_{\alpha\in\Delta^+} n_\alpha\alpha$ mit $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Daher ist $\mathfrak{n}V = \bigoplus_{\mu\neq w_0\lambda} V_\mu$ und $V/\mathfrak{n}V$ als T-Modul zu $\mathbb{C}v$ isomorph.
Weiterhin ist $\operatorname{tr}_\mathfrak{n} \operatorname{ad} = 2\varrho$ und folglich $\bigwedge^d \mathfrak{n} = \mathbb{C}_{2\varrho}$ als T-Moduln. D.h., als T-Moduln gilt

$$\mathbb{C}_{w_0\lambda-2\varrho} = V/\mathfrak{n}V \otimes (\textstyle\bigwedge^d \mathfrak{n})^* \ .$$

Betrachtet man auf $(\bigwedge \mathfrak{n})^*$ die triviale $\mathfrak{n}$-Wirkung, so gilt als $\mathfrak{n}$- und T-Moduln

$$\begin{aligned} V/\mathfrak{n}V \otimes (\textstyle\bigwedge^d \mathfrak{n})^* &= (V \otimes (\textstyle\bigwedge^d \mathfrak{n})^*)/\mathfrak{n}(V \otimes (\textstyle\bigwedge^d \mathfrak{n})^*) \\ &= H_0(\mathfrak{n}, V \otimes (\textstyle\bigwedge^d \mathfrak{n})^*) = H^d(\mathfrak{n}, V) \ , \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Poincaré-Dualität benutzt wurde.
Der erste Teil im Beweis des Theorems erfordert noch keine fortgeschrittenen algebraischen Methoden.

Beweis von Theorem 3.5.5 (Multiplizitätsfreiheit). Wir zeigen, dass

$$\dim \operatorname{Hom}(\textstyle\bigwedge^k \mathfrak{n}, V)_{w.\lambda} = \delta_{k,\ell(w)} \ .$$

Offenbar sind die Gewichte von $\operatorname{Hom}(\bigwedge^k \mathfrak{n}, V)$ gerade $\mu = \gamma - \sum_{\alpha\in S} \alpha$ für γ ein Gewicht von V und $S \subset \Delta^+$ mit $|S| = k$. Die Multipliziät von μ ist $\sum_{\mu=\gamma-\sum_{\alpha\in S}\alpha} m_\gamma$.
Die Gleichung

$$w.\lambda = \gamma - \textstyle\sum_{\alpha\in S} \alpha$$

impliziert nach Lemma 3.5.7 unten, dass $|\gamma| \geqslant |\lambda|$.
Umgekehrt gilt $|\gamma| \leqslant |\lambda|$: O.b.d.A. ist γ dominant (Satz 1.5.3) und $\gamma = \lambda - \sum_{\alpha\in\Delta^+} n_\alpha\alpha$ mit $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$|\mu|^2 = \langle\lambda, \mu\rangle - \textstyle\sum_{\alpha\in\Delta^+} n_\alpha\langle\alpha, \mu\rangle \leqslant \langle\lambda, \mu\rangle = |\lambda|^2 - \sum_{\alpha\in\Delta^+} n_\alpha\langle\lambda, \alpha\rangle \leqslant |\lambda|^2 \ .$$

Damit ist $|\lambda| = |\mu|$ und Lemma 3.5.7 impliziert, dass $S = \Delta^+(w)$, also $\sum_{\alpha\in S} \alpha = \varrho - w\varrho$.[3]
Da $\varrho - w\varrho = -w.\varrho$, folgt $\gamma = w.\lambda - w.\varrho = w\lambda$. Da dieses Gewicht für das positive System $w(\Delta^+)$ das höchste ist, hat es Multiplizität eins. Zudem gilt $k = |S| = |\Delta^+(w)| = \ell(w)$. Dies zeigt die obige Behauptung. □

Lemma 3.5.7. Seien $\lambda \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ dominant, $w \in W$ und $S \subset \Delta^+$. Dann gilt

$$\left|w.\lambda + \textstyle\sum_{\alpha\in S} \alpha\right| \geqslant |\lambda|$$

und Gleichheit gilt genau für $S = \Delta^+(w)$.

[3] Ist $\beta = -w\alpha$ positiv, so ist $w^{-1}\beta < 0$, also $\beta \in \Delta^+(w)$; in diesem Fall kommt der Ausdruck $\frac{1}{2}\beta$ auf der rechten Seite zweimal vor. Ist $\beta = -w\alpha$ negativ, so ist $\beta \notin \Delta^+(w)$; andererseits ist dann $\beta = -\delta$ für eine positive Wurzel δ und dieser Term liefert auf der rechten Seite keinen Beitrag.

Beweis. Es gilt $w.\lambda = w\lambda + w.\varrho$ mit $w.\varrho = w\varrho - \varrho = -\sum_{\alpha\in\Delta^+(w)} \alpha$. Weiter gilt $|\lambda| = |w\lambda|$. Es folgt

$$\left|w.\lambda + \textstyle\sum_{\alpha\in S}\alpha\right|^2 - |\lambda|^2 = 2\langle w\lambda, \textstyle\sum_{\alpha\in S}\alpha - \sum_{\alpha\in\Delta^+(w)}\alpha\rangle + \left|\textstyle\sum_{\alpha\in S}\alpha - \sum_{\alpha\in\Delta^+(w)}\alpha\right|^2 .$$

Falls $\alpha \in S \setminus \Delta^+(w)$, so ist $w^{-1}\alpha > 0$, also $\langle w\lambda, \alpha\rangle > 0$. Falls $\alpha \in \Delta^+(w) \setminus S$, so ist $w^{-1}\alpha < 0$, also $\langle w\lambda, -\alpha\rangle > 0$. Damit ist der erste Summand auf der rechten Seite der obigen Gleichung nicht-negativ. Dies zeigt die erste Behauptung. Die Gleichheit gilt nun genau dann, wenn die rechte Seite gleich Null ist. Dafür muss der zweite Summand gleich Null sein, d.h. $S = \Delta^+(w)$. Dann ist aber auch der erste Summand Null. Damit ist das Lemma bewiesen. □

3.5.8. Um den Beweis von Konstants Theorem zu vervollständigen, benötigen wir den Satz von Casselman-Osborne, der seinerseits mit homologischen Methoden bewiesen werden wird. Zunächst wollen wir den Satz beweisen. Dazu müssen wir die Wirkung des Zentrums $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ betrachten.
Auf $\mathrm{Hom}(\bigwedge^\bullet \mathfrak{n}, V)$ wirkt $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ per Definition durch $(z\omega)(x) = z(\omega(x))$. Die Wirkung vertauscht mit d und induziert somit eine Wirkung auf $H^\bullet(\mathfrak{n}, V)$. Andererseits ist letzteres ein T- und somit auch ein $\mathfrak{h}$- und $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$-Modul. Man kann die beiden Wirkungen vergleichen, denn die Algebren $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})^W$ sind isomorph:
Nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt liefert die Multiplikation einen Isomorphismus $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \cong \mathfrak{U}(\bar{\mathfrak{n}}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{n})$ von Vektorräumen, wobei $\bar{\mathfrak{n}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Folglich gibt es eine lineare Abbildung

$$\gamma' : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{h}) ,$$

definiert durch $u - \gamma'(u) \in \bar{\mathfrak{n}}\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) + \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$. Da $\mathfrak{h}$ abelsch ist, gilt $\mathfrak{U}(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ als Algebren. Man definiert $\gamma : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ durch $\gamma(u)(\lambda) = \gamma'(u)(\lambda - \varrho)$. Der Isomorphiesatz von Harish-Chandra besagt nun, dass dies auf $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ eingeschränkt einen Isomorphismus mit den W-invarianten $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})^W = \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ liefert.
Das folgende Theorem ist nun das von *Casselman-Osborne.*

Theorem 3.5.9. Sei V ein $\mathfrak{g}$-Modul. Dann gilt für alle $\omega \in H^\bullet(\mathfrak{n}, V)$ und $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ die Gleichung

$$z\omega = \gamma'(z)\omega .$$

Dieses Theorem werden wir später beweisen. Zunächst beenden wir den Beweis von Kostants Theorem.

Beweis von Theorem 3.5.5 (Bestimmung der Gewichte). Aus dem ersten Teil des Beweises wissen wir, dass die Gewichte $w.\lambda$ in $C^k = \mathrm{Hom}(\bigwedge^k \mathfrak{n}, V)$ mit Multiplizität $\delta_{k,\ell(w)}$ vorkommen. Insbesondere kommt $w.\lambda$ nicht in C^{k-1} und somit auch nicht in B^{k-1} vor. Es kommt auch nicht in C^{k+1} vor, muss also von d annuliert werden; d.h., es kommt in Z^{k+1} vor. Damit überlebt jedes solche Gewicht in der Cohomologie und kommt dort auch multiplizitätsfrei vor.

Es bleibt zu zeigen, dass die $w.\lambda$ die einzigen vorkommenden Gewichte sind. Aus Satz 1.1.5 folgt, dass $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ auf V durch einen Skalar wirkt. Da $[\mathfrak{h}, z] = 0$, aber $\bar{\mathfrak{n}}\mathfrak{U}(\mathfrak{h} \oplus \bar{\mathfrak{n}})$ kein Element $\neq 0$ vom $\mathfrak{h}$-Gewicht 0 enthält, gilt $z \in \mathfrak{U}(\mathfrak{h}) \oplus \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$, so dass z auf dem Höchstgewichtsvektor durch den Skalar $\gamma'(z)(\lambda)$ wirkt. Mit diesem Skalar wirkt z auch auf $H^\bullet(\mathfrak{n}, V)$.
Sei μ ein Gewicht in $H^k(\mathfrak{n}, V)$. Wegen Theorem 3.5.9 wirkt z durch $\gamma'(z)(\mu)$ auf dem entsprechenden Gewichtsvektor. Daher

$$\gamma(z)(\lambda + \varrho) = \gamma'(z)(\lambda) = \gamma'(z)(\mu) = \gamma(z)(\mu + \varrho) \ .$$

Wegen des Isomorphiesatzes von Harish-Chandra folgt $p(\lambda + \varrho) = p(\mu + \varrho)$ für alle $p \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]^W$. Es folgt leicht, dass $\mu + \varrho = w(\lambda + \varrho)$ für ein $w \in W$. Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 3.5.10. Der Beweis von Kostants Theorem liefert eine Interpretation des Theorems von Casselman-Osborne (Theorem 3.5.9): Vom Standpunkt der Wirkung von $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ verhält sich $H^\bullet(\mathfrak{n}, V)$ wie eine Höchstgewichtdarstellung.

3.6 Exkurs: Der Harish-Chandra-Isomorphismus

3.7 Homologische Algebra: Lange exakte Sequenz für abgeleitete Funktoren

Theorem 3.7.1. Sei $F : C \to C'$ ein halbseitig exakter additiver Funktor von guten Kategorien. Sei

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in C. Dann gibt es eine lange exakte Sequenz in C'.

(i). Ist F rechts-exakt, so hat die Sequenz die Form

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, dashed] & L_1F(M_{\sigma(1)}) \arrow[r] & L_1F(M_2) & L_1F(M_{\sigma(3)}) \arrow[l] \arrow[dll, rounded corners] & \\ & F(M_{\sigma(1)}) \arrow[r] & F(M_2) & F(M_{\sigma(3)}) \arrow[l] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

wobei $\sigma = \mathrm{id}$, wenn F covariant ist, und $\sigma = (13)$, wenn F kontravariant ist.

(ii). Ist F links-exakt, so hat die Sequenz die Form

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & F(M_{\sigma(1)}) \arrow[r] & F(M_2) \arrow[r] & F(M_{\sigma(3)}) \arrow[dll, rounded corners] & \\ & R^1F(M_{\sigma(1)}) \arrow[r] & R^1F(M_2) \arrow[r] & R^1F(M_{\sigma(3)}) \arrow[r, dashed] & {} \end{tikzcd}$$

wobei $\sigma = \mathrm{id}$, wenn F covariant ist, und $\sigma = (13)$, wenn F kontravariant ist.

3.8 Beweis des Theorems von Casselman-Osborne

3.8.1. us Theorem 3.7.1, angewandt auf den Funktor $F = (-)^{\mathfrak{n}}$, hat man für eine kurze exakte Sequenz von $\mathfrak{n}$-Moduln

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$$

eine lange exakte Sequenz

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(\mathfrak{n}, M_1)) \arrow[r] & H^0(\mathfrak{n}, M_2) \arrow[r] & H^0(\mathfrak{n}, M_3) \arrow[dll, out=0, in=180] \\ & H^1(\mathfrak{n}, M_1) \arrow[r] & H^1(\mathfrak{n}, M_2) \arrow[r] & H^1(\mathfrak{n}, M_3) \arrow[r, dashed] & {} \end{tikzcd}$$

Lemma 3.8.2. Ist eine kurze exakte Sequenz in $\mathfrak{g}$- Mod gegeben, so sind die Abbildungen in der langen exakten Sequenz für $H^\bullet(\mathfrak{n}, \cdot)$ äquivariant bezüglich der $\mathfrak{h}$- und $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Wirkungen.

Beweis. Wir zeigen diese Aussage für die $\mathfrak{h}$-Wirkung. Das Argument für die $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-Wirkung ist analog. Sei die folgende kurze exakte Sequenz in $\mathfrak{g}$- Mod gegeben:

$$0 \longrightarrow V' \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} V'' \longrightarrow 0$$

Die Cohomologie die der Terme in der folgenden kurzen exakten Sequenz von Komplexen:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\textstyle\bigwedge^\bullet \mathfrak{n}, V') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\varphi)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\textstyle\bigwedge^\bullet \mathfrak{n}, V) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\psi)} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\textstyle\bigwedge^\bullet \mathfrak{n}, V'') \longrightarrow 0$$

Es gilt (für $f = \varphi, \psi$)

$$\begin{aligned} [h\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, f)(x)](\omega) &= h(\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, f)(x)(\omega)) - \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, f)(x)(h\omega) \\ &= h(f(x(\omega))) - f(x(h\omega)) = f(h(x\omega)) - f(x(h\omega)) \\ &= f((hx)(\omega)) = \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, f)(hx)(\omega) \end{aligned}$$

für alle $h \in \mathfrak{h}$, $x \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^\bullet \mathfrak{n}, W)$ und $\omega \in W$ ($W = V', V$, je nach $f = \varphi, \psi$).
Insbesondere induzieren $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \varphi)$ und $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \psi)$ äquivariante Abbildungen auf der $\mathfrak{n}$-Cohomologie.
Bleibt der verbindende Homomorphismus δ. Sei $x \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^{k-1} \mathfrak{n}, V'')$ mit $dx = 0$. Sei weiter $y \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^{k-1} \mathfrak{n}, V)$, $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \psi)(y) = x$. Dann ist $\delta[x] = [z]$ für $z \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^{k} \mathfrak{n}, V')$ mit $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \varphi)(z) = d(y)$ ist. Für die Äquivarianz von δ reicht es also zu zeigen, dass d äquivariant ist. Doch das wissen wir bereits. □

Beweis von Theorem 3.5.9. Wir zeigen per Induktion nach k, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ auf $H^k(\mathfrak{n}, V)$ gilt: $z\omega = \gamma'(z)\omega$ für alle $z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.
Für $k = 0$ gilt $H^0(\mathfrak{n}, V) = V^{\mathfrak{n}}$; zudem ist $z - \gamma'(z) \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{n}$, wie wir schon gesehen haben. Die Behauptung folgt für $k = 0$.

Der Induktionsschritt wird mit einer unter dem Begriff ‘Dimensionsverschiebung’ bekannten Technik bewerkstelligt: Man wendet die lange exakte Sequenz an, um von einem Grad der Cohomologie zum nächsten zu kommen.
Gelte also die Behauptung für $k-1 \geqslant 0$ und für beliebige $\mathfrak{g}$-Moduln. Der Anfang der Standard-injektiven Auflösung in $\mathfrak{g}$- Mod liefert eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow I = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{g}), V) \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Die lange exakte Sequenz für $H^\bullet(\mathfrak{n}, \cdot)$ besitzt den Teilabschnitt

$$H^{k-1}(\mathfrak{n}, Q) \xrightarrow{\delta} H^k(\mathfrak{n}, V) \longrightarrow H^k(\mathfrak{n}, I)$$

Nach Lemma 3.8.2 ist δ sowohl $\mathfrak{h}$-, als auch $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-äquivariant. Nach Induktionsvoraussetzung reicht es zu zeigen, dass δ surjektiv ist. Dafür reicht es wiederum einzusehen, dass $H^k(\mathfrak{n}, I) = 0$ ist. Da $k > 0$, reicht dafür schließlich, dass I ein *injektiver* $\mathfrak{n}$-Modul ist.
Nun gilt $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ als Vektorräume, so dass nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \cong S(\bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{n})$ als Rechts-$\mathfrak{n}$-Moduln (Rechtsmultiplikation mit $\mathfrak{n}$, triviale Wirkung auf $S(\bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h})$. Damit

$$I = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S(\bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{n}), V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{n}), \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(S(\bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{h}), V)) \ .$$

Nach Satz 3.3.5 folgt, dass I ein injektiver $\mathfrak{n}$-Modul ist ($\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-, U)$ bildet projektive auf injektive Moduln ab und $\mathfrak{U}(\mathfrak{n})$ ist frei und folglich projektiv). Dies impliziert somit die Behauptung. □

Stichwortverzeichnis