Skript zur VL “Darstellungstheorie lokal-kompakter Gruppen”

Dr. A. Alldridge

22. Juli 2009

Die Vorlesung folgt anfangs dem schönen Buch [Fol95]. Teile dieses Skripts paraphrasieren den Text des Buches, der sich kaum verbessern lässt. Weitere verwendete Literatur ist das Buch [DE09] und für das Kapitel über kompakte Gruppen das Vorlesungsskript [Joh05].

Inhalt

0 Einleitung

Das Ziel dieser Vorlesung ist grob gesprochen die Verallgemeinerung der klassischen Fourieranalysis auf $\mathbb{R}$ in den Rahmen allgemeinerer lokal-kompakter Gruppen. Dies führt zu einer Neuinterpretation der Fouriertransformation und zur Entdeckung neuer Querverbindungen zwischen zuvor isolierten Sachverhalten. Ein Slogan könnte sein: Aus "harmonischer Analysis" (Analysis im Frequenzbereich) wird "Darstellungstheorie".

Dies wollen wir anhand eines konkreten Beispiels nachvollziehen. Man kann sich etwa fragen: Was haben die Fourier-Inversionsformel und die Poisson-Summationsformel miteinander zu tun?

Erinnern wir uns zunächst einmal an diese Formeln. Sei $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ und definiere

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(x)\, dx\ .$$

Ist $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, so gilt für fast alle x

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi\ . \tag{FI}$$

Sei $f \in C_c(\mathbb{R})$. Falls $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, so gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}\ . \tag{PS}$$

Auf den ersten Blick haben beide Formeln kaum etwas miteinander zu tun. Wir zeigen nun, wir man durch Verallgemeinerung der Formel (FI) die Formel (PS) beweisen kann.

Sei dazu

$$\widehat{\mathbb{R}} = \{\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{T} \mid \xi \text{ stetig}, \xi(x+y) = \xi(x)\xi(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}\}\ .$$

Dann ist

$$\widehat{\mathbb{R}} = \{e^{2\pi i \xi \cdot} : x \mapsto e^{2\pi \xi x} \mid \xi \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$$

als topologische Gruppen. Man setzt $\langle x, \xi\rangle = e^{2\pi i x\xi}$. Es sind $dx, d\xi$ translationsinvariante Maße auf $\mathbb{R}, \widehat{\mathbb{R}}$ und es gilt $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\langle x, \xi\rangle} f(x)\, dx$.

Man kann nun $\mathbb{R}$ durch eine beliebige lokal-kompakte abelsche Gruppe G ersetzen und erhält die folgende allgemeinere Fourier-Inversionsformel: Ist ein

$f \in \mathbf{L}^1(G)$ gegeben, so dass $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\hat{G})$, so gilt für fast alle $x \in G$

$$\hat{f}(x) = \int_{\hat{G}} \langle x, \xi \rangle \hat{f}(\xi)\, d\xi\ . \tag{FI}$$

Mit dieser Formel für eine bestimmte Wahl der Gruppe G können wir nun (PS) beweisen.
Sei also $f \in C_c(\mathbb{R})$ mit $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Es gilt $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{T}$ als topologische Gruppen, via der durch $\theta \mapsto e^{2\pi i\theta}$ induzierten Abbildung, und $\int_0^1 g(\theta)\, d\theta$ defiert ein invariantes Maß auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Weiter definiert $\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)$ ein invariantes Maß auf $\mathbb{Z}$. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(x+n)\, dx = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{Z}} g(x+n)\, dn\, d\dot{x}$$

für alle $g \in C_c(\mathbb{R})$.
Definiere nun $F \in C(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ durch

$$F(\dot{x}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \int_{\mathbb{Z}} f(x+n)\, dn\ .$$

Dies ist also die linke Seite der Gleichung (PS). Für $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ gilt nach dem Homomorphiesatz

$$\widehat{G} = \mathbb{Z}^{\perp} = \{\xi \in \widehat{\mathbb{R}} \mid \langle x, \xi \rangle = 1\ \forall x \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2\pi i n\cdot} : \dot{x} \mapsto e^{2\pi i n x} \mid n \in \mathbb{Z}\}\ .$$

Es folgt für alle $n \in \widehat{G}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(n) &= \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \overline{\langle x, n \rangle} F(\dot{x})\, d\dot{x} = \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{Z}} f(x+m) \overline{\langle x+m, n \rangle}\, dm\, d\dot{x} \\
&= \int_0^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) e^{-2\pi i(x+m)n}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{\langle x, n \rangle} f(x)\, dx = \widehat{f}(n)\ ,
\end{aligned}$$

da $\langle x, n \rangle = \langle x+m, n \rangle$. Damit ist $\hat{F} = (\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ und man kann (FI) für $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ anwenden:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = F(\dot{x}) = \int_{\widehat{G}} \langle x, n \rangle \hat{F}(n)\, dn = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i x n}\ ,$$

zunächst für fast alle $\dot{x} \in G$, aber aus Stetigkeitsgründen sogar für alle.

1 Lokal-kompakte Gruppen

In diesem Kapitel besprechen wir einige Allgemeinheiten zu lokal-kompakten Gruppen. Einiges Grundlegendes kann man für topologische Gruppen beweisen. Für das wichtigste Hilfsmittel für unsere Zwecke, das *Haarmaß*, sind die lokal-kompakten Gruppen aber der richtige Rahmen. Seine Existenz und Eindeutigkeit, und sich daraus unmittelbar ergebende Folgerungen, bilden den wichtigsten Teil des Kapitels.

1.1 Topologische Gruppen

Definition 1.1.1. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G mit einer Topologie, so dass die Abbildung $G \times G \to G : (a,b) \mapsto a^{-1}b$ stetig ist. Äquivalent: Multiplikation und Inversion sind stetig. Jede Gruppe kann als topologische Gruppe betrachtet werden, indem man sie mit der diskreten Topologie versieht.
Wir fixieren etwas Notation. Das neutrale Element von G wird immer mit 1 bezeichnet werden. Für $A \subset G$, $x \in G$ schreiben wir

$$xA = \{xy \mid y \in A\}\ ,\ Ax = \{yx \mid y \in A\}\ ,\ A^{-1} = \{y^{-1} \mid y \in A\}\ .$$

Wenn $B \subset G$, so schreiben wir

$$AB = \{xy \mid x \in A,\, y \in B\}\ .$$

Die Teilmenge $A \subset G$ heißt *symmetrisch*, falls $A = A^{-1}$. Es ist eine nützliche Beobachtung, dass

$$A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad 1 \notin A^{-1}B\ .$$

Wir beginnen mit ein paar einfachen, grundlegenden Beobachtungen.

Satz 1.1.2. Sei G eine topologische Gruppe.

(i). Die Topologie ist invariant unter Translationen und Inversion. D.h., für offenes $U \subset G$ und $A \subset G$ beliebig sind die Mengen AU, UA und U^{-1} offen.

(ii). Zu jeder 1-Umgebung U gibt es eine symmetrische 1-Umgebung V mit $VV \subset U$.

(iii). Für jede Untergruppe $H \subset G$ ist auch der Abschluss $\overline{H}$ eine Untergruppe.

(iv). Jede offene Untergruppe von G ist abgeschlossen. (Natürlich ist nicht jede abgeschlossene Untergruppe offen!)

(v). Sind $A, B \subset G$ kompakt, so auch AB.

Beweis. (i). Es ist $i : x \mapsto x^{-1}$ stetig, also ist $U^{-1} = i^{-1}(U)$ offen. Da $(x,y) \mapsto xy$ separat stetig ist, ist $f : y \mapsto x^{-1}y$ für $x \in G$ stetig und $xU = f^{-1}(U)$ offen, analog für Ux. Es folgt, dass $AU = \bigcup_{x\in A} xU$ und $UA = \bigcup_{x\in A} Ux$ offen sind.
(ii). Die Stetigkeit der Multiplikation in $(1,1)$ impliziert $W_1W_2 \subset U$ für gewisse 1-Umgebungen W_1, W_2. Dann ist $V = W_1 \cap W_1^{-1} \cap W_2 \cap W_2^{-1}$ eine symmetrische 1-Umgebung mit $VV \subset U$.
(iv). Für das Komplement von H gilt $G \setminus H = \bigcup_{x\notin H} xH$, denn $xH \cap H = \emptyset \Leftrightarrow x \notin HH^{-1} = H$. Alle der Mengen xH sind offen. Daher ist H abgeschlossen.
(iii), (v) sind einfach. □

1.1.3. Sei G eine topologische Gruppe und H eine Untergruppe. Der Raum G/H aller H-Rechtssnebenklassen wird bezüglich der kanonischen Projektionsabbildung $q : G \to G/H : x \mapsto xH$ mit der *Quotiententopologie* versehen. D.h., eine Teilmenge $U \subset G/H$ ist offen genau dann, wenn $q^{-1}(U)$ offen in G ist.
Dann ist q eine *offene* Abbildung: Ist $V \subset G$ offen, so ist gemäß Satz 1.1.2 (i) $q^{-1}(q(V)) = VH$ offen in G, also $q(V)$ offen in G/H.[1]

Satz 1.1.4. Sei H eine Untergruppe der topologischen Gruppe G.

(i). Ist H abgeschlossen, so ist G/H Hausdorffsch.

(ii). Ist G lokal-kompakt, so gilt dies auch für G/H.

(iii). Ist H ein Normalteiler, so ist G/H eine topologische Gruppe.

Beweis. (i). Sei $xH \neq yH$. Dann ist $1 \notin xHy^{-1}$, wobei die Menge xHy^{-1} abgeschlossen ist. Nach Satz 1.1.2 (ii) gibt es eine symmetrische 1-Umgebung $U \subset G$ mit $UU \cap xHy^{-1} = \emptyset$. Es folgt

$$1 \notin U^{-1}xHy^{-1}U^{-1} = UxH(Uy)^{-1} = (UxH)(UyH)^{-1}$$

da $U = U^{-1}$ und $HH = H$. Damit ist $UxH \cap UyH = \emptyset$, d.h., $q(Ux) = UxH$ und $q(Uy) = UyH$ sind disjunkte Umgebungen von xH und yH.
(ii), (iii) folgen sofort, da q offen ist. □

Korollar 1.1.5. Ist G ein T_1-Raum (d.h. Einpunktmengen sind abgeschlossen), so ist G Hausdorffsch. Ist G kein T_1-Raum, so ist $N = \overline{\{1\}}$ ein abgeschlossener Normalteiler und G/N ist eine Hausdorffsche topologische Gruppe.

Beweis. Sei $N = \overline{\{1\}}$. Dann ist N die kleinste abgeschlossene Untergruppe von G. Die Menge aller abgeschlossenen Untergruppen ist unter der Konjugation mit $g \in G$ invariant. Es folgt für alle $g \in G$, dass auch gNg^{-1} die kleinste abgeschlossene Untegruppe von G ist. Somit $N = gNg^{-1}$, so dass N ein Normalteiler

[1]Dies gilt jenseits von Quotienten topologischer Gruppen nicht automatisch: Die kanonische Abbildung $f : Q = [0,1]^2 \to D$ auf das 'Dreieck' $D = Q/[0,1] \times \{1\}$ ist nicht offen.

ist. Nach (i) und (iii) in Satz 1.1.4 ist G/N eine Hausdorffsche topologische Gruppe. Dies zeigt die zweite Behauptung. Ist G nun T_1, so gilt $N = \{1\}$ und die erste Behauptung folgt. □

1.1.6. Wie das Korollar zeigt, ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit nur mit Hausdorffschen topologischen Gruppen zu arbeiten. Wenn wir im folgenden den Begriff *lokal-kompakte Gruppe* verwenden, so wird dies immer eine topologische Gruppe meinen, die lokal-kompakt *und Hausdorffsch* ist.

Satz 1.1.7. Sei G eine lokal-kompakte Gruppe. Dann besitzt G eine Untergruppe H, die offen, abgeschlossen und σ-kompakt ist. Insbesondere gilt: Hat G nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten (z.B. ist G zusammenhängend), so ist G σ-kompakt.

Beweis. Sei U eine kompakte symmetrische 1-Umgebung und sei $U_n = U \cdots U$ (n Faktoren). Für die von U erzeugte Untergruppe $H \subset G$ gilt $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ (denn $U_n^{-1} = U_n$), also ist H σ-kompakt. Für alle n ist U_{n+1} eine Umgebung von U_n, also ist H offen und somit auch abgeschlossen gemäß Satz 1.1.2 (iv).
Es gilt nun $G = \bigcup_{g \notin H} gH$ (disjunkte Vereinigung) und jede der Teilmengen gH ist offen und abgeschlossen, also die Vereinigung von Zusammenhangskomponenten. Besitzt G also nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, so gibt es höchstens abzählbar viele Nebenklassen von H und G ist folglich σ-kompakt. □

Definition 1.1.8. Sei f eine Funktion auf G und $y \in G$. Wir definieren *Links- und Rechtstranslate* von f durch

$$L_y f(x) = f(y^{-1}x) \quad \text{und} \quad R_y f(x) = f(xy)\ .$$

Dann sind $y \mapsto L_y$ und $y \mapsto R_y$ Homomorphismen,

$$L_y L_z = L_{yz} \quad \text{und} \quad R_y R_z = R_{yz}\ .$$

Wir sagen, f sei *links* bzw. *rechts gleichmäßig stetig*, falls

$$\|L_y f - f\|_\infty \to 0 \quad \text{bzw.} \quad \|R_y f - f\|_\infty \to 0 \quad \text{für} \quad y \to 1\ .$$

Dabei ist $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm und wir schreiben $f(y) \to z$ für $y \to 1$, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine 1-Umgebung U mit $|f(y) - z| \leqslant \varepsilon$ für alle $y \in U$ gibt.

Satz 1.1.9. Sei G eine topologische Gruppe und $C_c(G)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : G \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Jedes $f \in C_c(G)$ ist links und rechts gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir beweisen die rechts gleichmäßige Stetigkeit. Da $C_c(G)$ nicht von der Gruppenstruktur abhängt, folgt die links gleichmäßige Stetigkeit dann durch

Betrachtung der umgekehrten Gruppe G° mit der Verknüpfung $(x,y) \mapsto yx$ (diese ist homöomorph zu G).
Seien $f \in C_c(G)$, $K = \operatorname{supp} f$, $\varepsilon > 0$. Für alle $x \in K$ gibt eine offene symmetrische 1-Umgebung V_x mit

$$|f(xz) - f(x)| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } \ z \in V_x V_x \,.$$

Da $K = \bigcup_{x \in K} x V_x$, gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$, so dass $K = \bigcup_{j=1}^n x_j V_{x_j}$. Sei nun $V = \bigcap_{j=1}^n x_j V_{x_j}$ und $y \in V$. Für $x \in K$ gibt es ein j mit $x_j^{-1} x \in V_{x_j}$, so dass $x_j^{-1} x y \in V_{x_j} V_{x_j}$ und

$$|f(xy) - f(x)| \leqslant |f(x_j(x_j^{-1}xy)) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x_j(x_j^{-1}x))| \leqslant \varepsilon \,.$$

Eine ähnliche Abschätzung gilt für $xy \in K$. Andernfalls gilt $xy, x \notin K$ und $f(xy) = f(x) = 0$, so dass $\|R_y f - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ für alle $y \in V$. □

1.2 Ein Beispiel: p-adische Zahlen

1.2.1. Einige Beispiele lokal-kompakter Gruppen sind $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ und der Torus $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Beide Gruppen sind Liegruppen, d.h. sie sind Mannigfaltigkeiten und ihre Verknüpfungen sind glatt. Ein einfaches Beispiel einer lokal-kompakten Gruppe, die keine Liegruppe ist, ist das des Produkts $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$ abzählbar unendlich vieler Kopien der zwei-elementigen Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Wir möchten unseren Beispielvorrat etwas erweitern und betrachten daher auch die Körper $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen ($p \in \mathbb{P}$), die wir unten einführen. Man kann auch Matrixgruppen über diesen Körpern betrachten. Sie sind interessante Beispiele lokal-kompakter Gruppen.

Definition 1.2.2. Sei $p \in \mathbb{P}$ (also eine Primzahl). Aus der eindeutigen Existenz von Primfaktorzerlegungen folgt, dass für alle $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ein eindeutiges $m \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $r = p^m q$ und p weder Zähler noch Nenner der rationalen Zahl q teilt. Man definiert die *p-adische Bewertung* $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ durch

$$|r|_p = \begin{cases} p^{-m} & r \neq 0\,,\ r = p^m q \ \text{(wie oben)}\,, \\ 0 & r = 0\,. \end{cases}$$

Es gilt

$$|r_1 + r_2|_p \leqslant \max(|r_1|_p, |r_2|_p) \leqslant |r_1|_p + |r_2|_p \quad \text{und} \quad |r_1 r_2|_p = |r_1|_p |r_2|_p \,. \tag{1.1}$$

Der p-adische Abstand $d_p(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|_p$ ist insbesondere eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ (wegen der verschärften Dreiecksungleichung sogar eine *Ultrametrik*). Weiter-

hin sind die Körperverknüpfungen auf $\mathbb{Q}$ bezüglich d_p stetig.
Sei $\mathbb{Q}_p$ die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ bzgl. $|\cdot|_p$. Dann ist $\mathbb{Q}_p$ ein vollständiger Körper, genannt *Körper der p-adischen Zahlen*. Der folgende Satz erklärt diese Terminologie und beschreibt $\mathbb{Q}_p$ ein wenig konkreter.

Satz 1.2.3. Seien $m \in \mathbb{Z}$ und $0 \leqslant c_j \leqslant p-1$ für alle $j \leqslant m$. Dann konvergiert $\sum_{j=m}^{\infty} c_j p^j$ in $\mathbb{Q}_p$. Jede p-adische Zahl ist Limes einer solchen Reihe.

Beweis. Für alle $m \leqslant k \leqslant \ell$ gilt $|\sum_{j=k}^{\ell} c_j p^j| \leqslant \max_{j=k}^{\ell} p^{-j} \leqslant p^{-k}$, also ist die Folge der Partialsummen eine $|\cdot|_p$-Cauchyfolge und die Konvergenz folgt.
Sei nun F die Menge aller Grenzwerte solcher 'p-adischen Entwicklungen'. Offenbar ist F unter Addition, Multiplikation und Divison abgeschlossen. (Man verwende die üblichen Algorithmen zur schriftlichen Addition, ...) Dass F auch unter additiven Inversen abgeschlossen ist, folgt aus folgender Gleichung (wobei $c_m \neq 0$ sei):

$$-\sum_{j=m}^{\infty} c_j p^j = \sum_{j=m+1}^{\infty} (p-1-c_j)p^j + (p-c_m)p^m \ .$$

Somit ist F ein Körper.
Wir zeigen nun, dass $\mathbb{Q} \subset F$. Da F ein Körper ist, reicht es zu zeigen, dass $\mathbb{N} \subset F$. Da jede natürliche Zahl bei der Division durch p einen Teilungsrest $0 \leqslant r \leqslant p-1$ besitzt, ist klar, dass jedes $n \in \mathbb{N}$ sich als $\sum_{j=0}^{M} c_j p^j$ mit $0 \leqslant c_j \leqslant p-1$ schreiben lässt. Damit ist F ein Körper mit $\mathbb{Q} \subset F \subset \mathbb{Q}_p$. Es reicht nun zu zeigen, dass F vollständig ist.
Seien dazu $x_n = \sum_j c_{jn} p^j \in F$, so dass (x_n) eine Cauchyfolge in $\mathbb{Q}_p$ bilde. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert N_m, so dass $|x_k - x_\ell|_p \leqslant p^{-m}$ für alle $k, \ell \geqslant N_m$. Für die Fortsetzung der p-adischen Norm $|\cdot|_p$ auf $\mathbb{Q}_p$ gilt $|\sum_j c_j p^j| = p^{-n}$, wobei $n = \min\{j | c_j \neq 0\}$.
Es folgt $c_{jk} = c_{j\ell}$ für alle $j \leqslant m$ und $k, \ell \geqslant m$. D.h., die Folgen $(c_{jn})_n$ werden für alle j stationär, so dass die Grenzwerte $c_j = \lim_{n\to\infty} c_{jn}$ existieren und schließlich $\lim_n x_n = \sum_j c_j p^j \in F$ gilt. □

1.2.4. Für $r \in \mathbb{Q}$, $r \geqslant 0$, und $x \in \mathbb{Q}_p$ sei

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{Q}_p \mid |x-y|_p \leqslant r\}$$

die abgeschlossene r-Kugel um x.
Die p-adische Norm $|\cdot|_p$ nimmt laut Satz 1.2.3 nur die Werte 0 und p^k, $k \in \mathbb{Z}$, an. Ist also $r > 0$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$|x-y|_p \leqslant r \quad \Leftrightarrow \quad |x-y|_p < r + \varepsilon \ .$$

Daher sind die Mengen $B_r(x)$, $r > 0$, offen und abgeschlossen. Somit hat der topologische Raum $\mathbb{Q}_p$ eine Basis von offenen und abgeschlossenen Mengen. Man sagt, $\mathbb{Q}_p$ sei *total unzusammenhängend*. Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}_p$ ist, hat $\mathbb{Q}_p$ keine isolierten Punkte. Man kann damit zeigen, dass $\mathbb{Q}_p$ homöomorph zum Schnitt der Cantormenge mit $]0,1[$ ist.
Aus der ultrametrischen Ungleichung (1.1) folgt, dass

$$y \in B_r(x) \;\Rightarrow\; B_r(x) = B_r(y)\ .$$

Weiterhin sind $B_r(0)$, $r \geqslant 0$, additive Untergruppen von $\mathbb{Q}_p$ und $\mathbb{Z}_p = B_1(0)$ ist ein Unterring. Da $\sum_{j=m}^{\infty} c_j p^j \in \mathbb{Z}_p$ (mit $c_m \neq 0$) genau dann, wenn $m \geqslant 0$, folgt aus Satz 1.2.3 sofort, dass $\mathbb{Z}_p$ der Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}_p$ ist.

Satz 1.2.5. Der Quotient $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist die zyklische Gruppe der Ordnung p. Jede Kugel $B_{p^m}(x)$ ist für $m > n \in \mathbb{Z}$ die disjunkte Vereinigung von p^{m-n} Kugeln vom Radius p^n. Die Kugeln $B_r(x)$ sind kompakt, also ist $\mathbb{Q}_p$ lokal-kompakt und $\mathbb{Z}_p$ ist ein kompakter Unterring.

Beweis. Aus der Definition der p-adischen Bewertung folgt $p\mathbb{Z}_p = B_{p^{-1}}(0)$, was eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_p$ ist. Aus Satz 1.2.3 folgt sofort, dass $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Insbesondere ist $\mathbb{Z}_p$ die disjunkte Vereinigung von p Nebenklassen von $p\mathbb{Z}_p$ und letztere sind Kugeln vom Radius p^{-1}.
Sei $m > n$. Es gilt $B_{p^m}(x) = x + p^{-m}\mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{Z}_p/p^{m-n}\mathbb{Z}_p$ hat Ordnung p^{m-n}, so dass $\mathbb{Z}_p$ die disjunkte Vereinigung von p^{m-n} Kugeln vom Radius p^{n-m} ist. Damit ist die Kugel $B_{p^m}(x)$ die disjunkte Vereinigung von p^{m-n} Kugeln vom Radius $p^n = p^m p^{n-m}$.
Folglich wird für jedes $r > 0$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Kugel $B_r(x)$ von endlich vielen ε-Kugeln überdeckt, d.h. sie ist präkompakt (totalbeschränkt). Da $\mathbb{Z}_p$ vollständig ist (Abschluss von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}_p$), sind die Kugeln $B_r(x)$ allesamt kompakt. Die restlichen Behauptungen folgen sofort. □

1.3 Das Haarmaß

Definition 1.3.1. Im folgenden sei G stets eine lokal-kompakte Gruppe. Wir bezeichnen weiter mit $C_c(G)$ die Menge der kompakt getragenen stetigen Funktionen auf G mit Werten in $\mathbb{R}$ und setzen

$$C_c^+(G) = \{f \in C_c(G) \setminus \{0\} \mid f \geqslant 0\}\ .$$

Der $\mathbb{R}$-lineare Aufspann von $C_c^+(G)$ ist $C_c(G)$.
Man erinnere sich daran, dass ein *Radonmaß* ein lokal endliches, von außen reguläres Borelmaß ist, das *auf offenen Mengen und Borelmengen endlichen Maßes*

von innen regulär ist. Nach dem Darstellungssatz von Riesz sind die Radonmaße μ auf einem lokal-kompakten Raum X und die positiven Linearformen ν auf $C_c(X)$ in Bijektion via $\int f\,d\mu = \nu(f)$ für alle $f \in C_c(X)$.
Ein *linkes* bzw. *rechtes Haarmaß* auf G ist ein nicht-triviales Radonmaß μ, so dass man die Gleichungen $\mu(xE) = \mu(E)$ bzw. $\mu(Ex) = \mu(E)$ für alle Borelmengen $E \subset G$ und alle $x \in G$ hat.

Satz 1.3.2. Sei μ ein Radonmaß auf G. Definiere ein weiteres Radonmaß $\tilde{\mu}$ durch $\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$ für alle Borelmengen E.

(i). μ ist ein linkes Haarmaß genau dann, wenn $\tilde{\mu}$ ein rechtes Haarmaß ist.

(ii). Genau dann ist μ ein linkes Haarmaß, wenn $\int L_y f\,d\mu = \int f\,d\mu$ für alle $y \in G$ und $f \in C_c^+(G)$.

Beweis. (i). Dies ist klar.
(ii). Definiert man μ_y durch $\mu_y(E) = \mu(yE)$, so gilt $\int L_y f\,d\mu = \int f\,d\mu_y$ für alle einfachen Funktionen f und daher auch für alle $f \in C_c^+(G)$. Ist also μ ein Haarmaß, so gilt $\int L_y f\,d\mu = \int f\,d\mu$ für alle $f \in C_c^+(G)$. Sei umgekehrt diese Bedingung erfüllt. Die Gleichung gilt dann auch für alle $f \in C_c(G)$ und auf dem Darstellungssatz von Riesz folgt $\mu = \mu_y$. □

Bemerkung 1.3.3.

(i). Ob man linke oder rechte Haarmaße betrachtet, ist nach obigem Satz irrelevant. Wir werden im folgenden immer *linke* Haarmaße betrachten. (Dies ist die übliche Wahl in der Literatur.)

(ii). Der folgende Satz, der die Existenz von Haarmaßen garantiert, ist von fundamentaler Bedeutung. Für kompakte Gruppen wurde er von dem Ungarn Alfréd Haar (1933) bewiesen, dessen Namen das Haarmaß auch trägt. Der allgemeine Fall geht auf André Weil (1940) zurück.

(iii). Für die meisten konkreten Gruppen läßt sich das Haarmaß meist in einfacherer Form herleiten. Wir werden weiter unten einige Beispiele diskutieren.

Theorem 1.3.4. Jede lokal-kompakte Gruppe besitzt ein linkes Haarmaß λ.

Beweis. Wir werden λ als Funktional auf $C_c(G)$ konstruieren. Die Idee ist, alle Funktionen $f \in C_c^+(G)$ durch Linearkombinationen $\sum_j c_j L_{x_j}\varphi$ zu approximieren, wobei φ eine 'Buckelfunktion' ist. Nun muss für das gesuchte λ gelten: $\int \sum_j c_j L_{x_j}\varphi\,d\lambda = (\sum_j c_j)\int \varphi\,d\lambda$. Daher entfernt man durch Normalisierung den Faktor $\int \varphi\,d\lambda$ und läßt den Träger von φ schrumpfen, um λ durch die Summen $\sum_j c_j$ zu definieren. (Auf diese Weise wird manchmal auch das übliche Lebesgueintegral auf $\mathbb{R}$ eingeführt.)

Definiere nun für alle $f, \varphi \in C_c^+(G)$:

$$(f : \varphi) = \inf\left\{\sum_{j=1}^n c_j \;\middle|\; c_j \geqslant 0\,,\, f \leqslant \sum_{j=1}^n c_j L_{x_j}\varphi \text{ für gewisse } x_1, \dots, x_n \in G\right\}.$$

Offenbar ist $(f : \varphi) < \infty$, denn $\varphi \not\equiv 0$ und $\operatorname{supp} f$ ist kompakt.
Diese Größe hat folgende Eigenschaften:

$$(f : \varphi) = (L_y f : \varphi) \quad \text{für alle} \;\; y \in G\,, \tag{1.2}$$

$$(f_1 + f_2 : \varphi) \leqslant (f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi)\,, \tag{1.3}$$

$$(cf : \varphi) = c \cdot (f : \varphi) \quad \text{für alle} \;\; c > 0\,, \tag{1.4}$$

$$(f_1 : \varphi) \leqslant (f_2 : \varphi) \quad \text{wann immer} \quad f_1 \leqslant f_2\,, \tag{1.5}$$

$$(f : \varphi) \geqslant \tfrac{\|f\|_\infty}{\|\varphi\|_\infty}\,, \tag{1.6}$$

$$(f : \varphi) \leqslant (f : \psi)(\psi : \varphi)\,. \tag{1.7}$$

Die ersten vier Aussagen sind leicht einzusehen. Die Ungleichung (1.6) folgt aus $\sum_j c_j L_{x_j}\varphi \leqslant (\sum_j c_j)\|\varphi\|_\infty$ für alle c_j und $\varphi \in C_c^+(G)$. Die Ungleichung (1.7) sieht man wie folgt: Gilt $f \leqslant \sum_j c_j L_{y_j}\psi$ und $\psi \leqslant \sum_i b_i L_{x_j}\varphi$, so folgt

$$f \leqslant \sum_j c_j \sum_i b_i L_{y_j} L_{x_j}\varphi = \sum_{i,j} b_i c_j L_{x_i y_j}\varphi\,.$$

Sei nun $f_0 \in C_c^+(G)$ fest gewählt. Man definiert

$$I_\varphi(f) = \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \quad \text{für alle} \;\; f, \varphi \in C_c^+(G)\,.$$

Nach den Gleichungen (1.2)-(1.5) ist I_φ G-invariant, subadditiv, homogen vom Grad 1 und monoton. Nach (1.7) gelten Ungleichungen $(f : \varphi) \leqslant (f : f_0)(f_0 : \varphi)$, sowie $(f_0 : \varphi) \leqslant (f_0 : f)(f : \varphi)$, also

$$(f_0 : f)^{-1} \leqslant I_\varphi(f) \leqslant (f : f_0)\,. \tag{1.8}$$

Wäre nun I_φ bereits additiv, so könnte man den Beweis mit dem Darstellungssatz von Riesz an dieser Stelle beenden. Das folgende Lemma zeigt, wie dies man durch Verkleinerung des Trägers von φ erreichen kann. □

Lemma 1.3.5. Seien $f_1, f_2 \in C_c^+(G)$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt eine 1-Umgebung $V \subset G$, so dass $I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leqslant I_\varphi(f_1 + f_2) + \varepsilon$ für alle φ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset V$.

Beweis. Sei $g \in C_c^+(G)$ derart, dass $1_{\operatorname{supp}(f_1+f_2)} \leqslant g \leqslant 1$. Setze $h = f_1 + f_2 + \delta g$ (wobei $\delta > 0$ später bestimmt wird). Es gibt $h_i \in C_c^+(G)$ mit $\operatorname{supp} h_i \subset \operatorname{supp} f_i$ mit $hh_i = f_i$ $(i = 1, 2)$, denn $h \geqslant \delta$ auf $\operatorname{supp} f_i$. Nach Satz 1.1.9 existiert eine

1-Umgebung V mit

$$|h_i(x) - h_i(y)| \leqslant \delta \quad \text{für alle } \ i = 1, 2\,,\, x^{-1}y \in V\,.$$

Sei nun $\operatorname{supp}\varphi \subset V$ und $h \leqslant \sum_j c_j L_{x_j}\varphi$. Dann gilt

$$f_i(x) = h(x)h_i(x) \leqslant \sum_j c_j \varphi(x_j^{-1}x)h_i(x) \leqslant \sum_j c_j \varphi(x_j^{-1}x)\big(h_i(x_j) + \delta\big)\,,$$

da $|h_i(x) - h_i(x_j)| \leqslant \delta$, wenn $x_j^{-1}x \in \operatorname{supp}\varphi$. Nach Definition ist $h_1 + h_2 \leqslant 1$, also folgt

$$(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leqslant \sum_j c_j\big(h_1(x_j) + h_2(x_j) + 2\delta\big) \leqslant (1 + 2\delta)\sum_j c_j\,.$$

Da c_j beliebig war, folgt $(f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi) \leqslant (1 + 2\delta)(h : \varphi)$ und

$$I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2) \leqslant (1 + 2\delta)I_\varphi(h) \leqslant (1 + 2\delta)\big(I_\varphi(f_1 + f_2) + \delta I_\varphi(g)\big)\,.$$

Es reicht also, $\delta > 0$ so klein wählen, dass

$$2\delta I_\varphi(f_1 + f_2) + \delta(1 + \delta)I_\varphi(g) \leqslant \varepsilon$$

gilt. Damit folgt die Behauptung. □

Beweis von Theorem 1.3.4 (Fortsetzung). Für alle $f \in C_c^+(G)$ betrachte man das Intervall $X_f = [(f_0 : f)^{-1}, (f : f_0)]$. Definiere

$$X = \prod_{f \in C_c^+(G)} X_f = \Big\{ I : C_c^+(G) \to]0, \infty[\;\Big|\; I(f) \in X_f \text{ für alle } f \in C_c^+(G) \Big\}\,.$$

Mit der Produkttopologie versehen ist X ein kompakter Hausdorffraum (Satz von Tychonov) und nach (1.8) ist $I_\varphi \in X$ für alle $\varphi \in C_c^+(G)$.
Für jede 1-Umgebung sei K_V der Abschluss in X der Menge $\{I_\varphi \mid \operatorname{supp}\varphi \subset V\}$.
Die Familie (K_V) hat die endliche Durchschnittseigenschaft (der Schnitt jeder endlichen Teilmenge ist nicht leer): Es gilt $K_{\bigcap_{j=1}^n V_j} \subset \bigcap_{j=1}^n K_{V_j}$.
Da X kompakt ist, gibt es ein $I \in \bigcap_V K_V$. Das bedeutet, dass es für alle 1-Umgebungen V, alle $\varepsilon > 0$ und alle $f_1, \dots, f_n \in C_c^+(G)$ ein φ gibt mit $\operatorname{supp}\varphi \subset V$ und

$$|I(f_j) - I_\varphi(f_j)| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } \ j = 1, \dots, n\,.$$

Mit Lemma 1.3.5 folgt, dass I additiv, 1-homogen, G-invariant und monoton ist. Man sieht leicht, dass sich I eindeutig zu einem invarianten positiven linearen Funktional auf $C_c(G)$ fortsetzt, welches ungleich 0 ist. Nach dem Darstellungssatz von Riesz folgt die Behauptung. □

Satz 1.3.6. Sei λ ein linkes Haarmaß auf G. Dann gilt $\lambda(U) > 0$ für alle offenen

$\emptyset \neq U \subset G$ und $\int f\,d\lambda > 0$ für alle $f \in C_c^+(G)$.

Beweis. Sei $\lambda(U) = 0$. Jedes Kompaktum K lässt sich mit endlich vielen Translaten von U überdecken, also folgt $\lambda(K) = 0$. Da G eine Borelmenge ist und λ von innen regulär auf der offenen Menge G, folgt $\lambda(G) = 0$, ein Widerspruch.
Für $f \in C_c^+(G)$ ist $U = \{x | 2f(x) > \|f\|_\infty\}$ offen und nicht leer, also folgt $\int f\,d\lambda > \frac{1}{2}\|f\|_\infty \lambda(U) > 0$. □

Theorem 1.3.7. Seien λ, μ linke Haarmaße auf G. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass $\mu = c\lambda$.

Bemerkung 1.3.8. Es ist leider im allgemeinen nicht möglich, hier den Satz von Radon-Nikodym zu benutzen, da G nicht σ-kompakt sein muss.

Beweis. Die Aussage des Theorems ist äquivalent zur Existenz einer Konstanten $c > 0$, so dass $c = \frac{\int f\,d\lambda}{\int f\,d\mu}$ für alle $f \in C_c^+(G)$.
Sei V_0 eine kompakte symmetrische 1-Umgebung. Definiere für alle $f \in C_c^+(G)$

$$A_f = (\operatorname{supp} f)V_0 + V_0(\operatorname{supp} f)\ .$$

Dann ist A_f kompakt und für alle $y \in V_0$ hat die Funktion $x \mapsto f(yx) - f(xy)$ ihren Träger in A_f.
Seien $f, g \in C_c^+(G)$ und $\varepsilon > 0$. Es gibt nach Satz 1.1.9 eine symmetrische 1-Umgebung $V \subset V_0$, so dass

$$|h(xy) - h(yx)| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } \ y \in V\,,\ x \in G\,,\ h \in \{f, g\}\ .$$

Sei $\chi \in C_c^+(G)$ derart, dass $\operatorname{supp}\chi \subset V$ und $\chi(x) = \chi(x^{-1})$ für alle $x \in G$. Dann gilt

$$\int \chi\,d\mu \int f\,d\lambda = \iint \chi(y) f(x)\,d\lambda(x) d\mu(y) = \iint \chi(y) f(yx)\,d\lambda(x) d\mu(y)\ .$$

Da $\chi(y) = \chi(y^{-1})$ für alle $y \in G$, folgt andererseits

$$\begin{aligned}\int \chi\,d\lambda \int f\,d\mu &= \iint \chi(x) f(y)\,d\lambda(x) d\mu(y) = \iint \chi(y^{-1}x) f(y)\,d\lambda(x) d\mu(y)\\ &= \iint \chi(x^{-1}y) f(y)\,d\mu(y) d\lambda(x) = \iint \chi(y) f(xy)\,d\mu(y) d\lambda(x)\\ &= \iint \chi(y) f(xy)\,d\lambda(x) d\mu(y)\ .\end{aligned}$$

Somit

$$\begin{aligned}&\left| \int \chi\,d\mu \int f\,d\lambda - \int \chi\,d\lambda \int f\,d\mu \right|\\ &\qquad \leqslant \iint \chi(y) |f(xy) - f(yx)|\,d\lambda(x) d\mu(y) \leqslant \varepsilon \lambda(A_f) \int \chi\,d\mu\ ,\end{aligned}$$

also nach Division durch $\int \chi\, d\mu \int f\, d\mu$

$$\left| \frac{\int \chi\, d\lambda}{\int \chi\, d\mu} - \frac{\int f\, d\lambda}{\int f\, d\mu} \right| \leqslant \varepsilon \frac{\lambda(A_f)}{\int f\, d\lambda} .$$

Eine ähnliche Ungleichung gilt für g und man erhält insgesamt

$$\left| \frac{\int g\, d\lambda}{\int g\, d\mu} - \frac{\int f\, d\lambda}{\int f\, d\mu} \right| \leqslant \varepsilon \cdot \left[\frac{\lambda(A_f)}{\int f\, d\lambda} + \frac{\lambda(A_g)}{\int g\, d\lambda} \right] .$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Der obige Beweis vereinfacht sich stark, wenn man den Satz von Radon–Nikodym anwenden kann. Dieser setzt aber voraus, dass eines der Maße σ-endlich ist. Dies kann man nur erwarten, wenn G σ-kompakt ist (was aber im allgemeinen nicht der Fall ist).

1.3.9. Im folgenden konstruieren wir einige Haarmaße explizit.

Falls G eine Liegruppe ist, kann man ein links Haarmaß auf zwei Weisen erhalten. Entweder man wählt ein reelles Skalarprodukt b auf $T_1(G)$ und definiert eine G-invariante Riemannsche Metrik g durch Linkstranslationen:

$$g(dl_x(u), dl_x v) = b(u,v) \quad \text{für alle } \; u, v \in T_1(G)\, ,\, x \in G\, .$$

Dann ist das Riemannsche Maß ein Haarmaß. Oder man wählt eine nicht verschwindende Volumenform $\omega_0 \in \bigwedge^{\dim G} T_1^*(G)$ und definiert $\omega(x) = l_{x^{-1}}^* \omega_0$. Dann definiert das Funktional $f \mapsto \int_G f\omega$ ein Haarmaß.

Als einen Spezialfall betrachte man G offen in $\mathbb{R}^n$ und $xy = A(x)y + b(x)$ für differenzierbare Abbildungen $A : G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $b : G \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $|\det A(x)|^{-1}\, dx$ ein Haarmaß auf G. Als Spezialfälle bekommt man, dass $\frac{dx}{|x|}$ ein Haarmaß von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist und $|\det T|^{-n}\, dT$ eines von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n \times n}$. Diese sind linke und rechte Haarmaße.

Ein weiteres Beispiel aus dieser Klasse ist die $ax+b$-Gruppe. Dies ist die Gruppe G der affinen Transformationen $x \mapsto ax + b$ von $\mathbb{R}$, wobei $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Ein linkes Haarmaß auf dieser Gruppe ist durch $\frac{da\,db}{a^2}$ gegeben, wohingegen ein rechtes durch $\frac{da\,db}{a}$ gegeben ist.

Ein Haarmaß auf $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, mit Koordinaten $z = x + iy$, ist gegeben durch $\frac{dx\,dy}{x^2+y^2}$. Linkstranslation ist hier $(x + iy)(u + iv) = xu - yv + i(xv + yu)$, d.h. die 2×2-Matrix $A(x + iy)$ ist in diesem Fall $A(x + iy) = \left(\begin{smallmatrix} x & -y \\ y & x \end{smallmatrix}\right)$ und $\det A(x + iy) = x^2 + y^2$.

Schließlich hat man auf der Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen (α_{ij}), $\alpha_{ij} = 0$ für alle $i > j$, mit Diagonalelementen $\alpha_{ii} = 1$ das linke und rechte Haarmaß $\prod_{i<j} d\alpha_{ij}$. Dies ist der Fall einer nilpotenten Liegruppe (d.h. $\operatorname{ad} x$ ist für alle Elemente $x \in \mathfrak{g} = T_1(G)$ nilpotent). Diese kann als offene Teilmenge ihrer Lie-

algebra betrachtet werden. Wegen der Nilpotenz können die linearen Teile der Linkstranslationen nur Determinante 1 haben. (Alle Eigenwerte = 1.)

1.3.10. Seien $G_1, \dots, G_n$ lokal-kompakte Gruppen mit gegebenen linken Haarmaßen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Das *Radonprodukt* λ der λ_i ist das dem linearen Funktional

$$f \mapsto \int \cdots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

zugeordnete Radonmaß. Dies ist ein Haarmaß für $G = \prod_{j=1}^n G_j$. Wenn die G_j nicht σ-kompakt sind oder das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllen (d.h. ein G_j hat keine abzählbare Basis der Topologie), ist λ nicht das gewöhnliche Produktmaß bzw. noch nicht einmal eine Fortsetzung dieses Maßes. Die Borel-σ-Algebra eines Produkts wird in der Regel nur von den Produkten von Borelmengen erzeugt, wenn die Faktoren das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Wenn die Faktoren nicht σ-kompakt sind, so steht die äußere Regularität des Haarmaßes im Widerspruch zur üblichen Definition des Produktmaßes.

Sei z.B. $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_d$, wobei $\mathbb{R}_d$ die additive Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ mit der diskreten Topologie sei, und λ ein Haarmaß auf G. Die Einschränkung von λ auf H ist notwendigerweise ein Vielfaches des Lebesguemaßes.

Es ist weiter $H = \mathbb{R} \times 0$ eine offene, σ-kompakte Untergruppe. Die abgeschlossene Teilmenge $Y = 0 \times \mathbb{R}_d$ hat unendliches Maß: Denn nach der äußeren Regulariät gibt eine offene Teilmenge $U \supset Y$ mit $\lambda(U) \leqslant \lambda(Y) + 1$; aber es gilt $U \cap yH = U \cap (\mathbb{R} \times \{y\}) \neq \emptyset$ für alle $y \in Y$. Da Y überabzählbar ist und $\lambda(U \cap yH) > 0$ gilt, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\lambda(U \cap yH) \geqslant \varepsilon$ für überabzählbar viele $y \in Y$. Es folgt $\lambda(U) = \infty$ und somit $\lambda(Y) = \infty$.

Andererseits ist $Y \cap H$ vom Maß Null. Ist also μ das Produkt der Haarmaße von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_d$, so gilt $\mu(Y) = 0$.

1.3.11. Seien nun G_α, $\alpha \in A$, *kompakte* Gruppen mit (linken) Haarmaßen λ_α. (Wie wir bald sehen werden, sind dies automatisch auch rechte Haarmaße.) Dabei darf die Menge A beliebige Kardinalität haben. Wir nehmen an, dass $\lambda_\alpha(G_\alpha) = 1$ sei. Sei $G = \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ und definiere $C_F(G) = \bigcup_{B \subset A} C(\prod_{\alpha \in B} G_\alpha)$, wobei B die endlichen Teilmengen von A durchlaufe.

Offenbar ist $C_F(G)$ eine unitale, involutive Unteralgebra von $C(G)$, die die Punkte von G trennt. (Verschiedene Punkte in G unterscheiden sich in einer Koordinate.) Nach Stone–Weierstraß ist $C_F(G)$ also dicht in $C(G)$ und stetige lineare Funktionale sind eindeutig bestimmt durch ihre Einschränkung auf $C_F(G)$.

Sei $f \in C(\prod_{j=1}^n G_{\alpha_j}) \subset C_F(G)$. Definiere $I(f)$ durch

$$I(f) = \int \cdots \int f(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n})\, dx_{\alpha_1} \cdots dx_{\alpha_n} \,.$$

Dadurch ist ein links-invariantes, positives Funktional I auf $C_F(G)$ definiert, für dass $I(1) = 1$ und $I(f) \leqslant \|f\|_\infty$ gilt. Das der eindeutigen Fortsetzung dieses Funktionals zugeordnete Radonmaß ist ein Haarmaß für G.

1.3.12. Von besonderem Interesse ist das Beispiel $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Das auf das Volumen 1 normierte Haarmaß von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ordnet jeder Punktemenge das Maß $\frac{1}{2}$ zu. Die Elemente von G sind unendliche Folgen $a_1a_2\cdots$ mit $a_i \in \{0,1\}$. Sei $\phi : G \to [0,1]$ definiert durch $\phi(a_1a_2\cdots) = 0.a_1a_2\cdots = \sum_{k=1}^\infty a_k 2^{-k}$. Diese Abbildung ist weder stetig noch ein Gruppenhomomorphismus (nach $\mathbb{R}$), besitzt aber dennoch einige interessante Eigenschaften.

Zunächst beachte man, dass ϕ fast bijektiv ist: Für alle $x \in [0,1]$ besteht $\phi^{-1}(\{x\})$ aus einem Punkt, es sei denn, dass $x = j2^{-k}$ mit $0 < j < 2^k$, in welchem Fall $\phi^{-1}(\{x\})$ genau zwei Punkte enthält. (Dies folgt aus der Gleichung $2^{-k} = \sum_{k+1}^{n} 2^{-n}$.)

Wir behaupten nun, dass ϕ messbar ist das Haarmaß μ auf G auf das Lebesguemaß λ auf $[0,1]$ abbildet. Aus der obigen Überlegung über die Urbilder von Punktmengen folgt, dass $\phi^{-1}(I)$ für $I = [j2^{-k}, (j+1)2^{-k}]$, $j < 2^k$, der Form $\prod_{i=1}^n E_i$ mit $\#E_i = 1$ für alle $i \leqslant k$ und $E_i = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für alle $i > k$ ist. Da Punkte in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ das Maß $\frac{1}{2}$ haben, folgt $\mu(\phi^{-1}(I)) = 2^{-k} = \lambda(I)$.

Nun bilden die disjunkten endlichen Vereinigungen der Mengen vom Typ I bzw. E Mengen-Algebren $\mathcal{A}_{[0,1]}$ und $\mathcal{A}_G$, die die Borel-σ-Algebren von $[0,1]$ und G erzeugen (Definition der Produkttopologie). Weiter gilt $\lambda = \phi(\mu)$ auf $\mathcal{A}_{[0,1]}$. Standardargumente zeigen nun, dass $\lambda = \phi(\mu)$ gilt.

1.3.13. Schließlich zeigen wir, wie man ein Haarmaß λ auf $(\mathbb{Q}_p, +)$ konstruiert. Es reicht, die offene kompakte Untergruppe $\mathbb{Z}_p$ zu betrachten. Dort fixieren wir das Maß zu $\lambda(\mathbb{Z}_p) = 1$. Wegen der Invarianz muss $\lambda(B_1(x)) = 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}_p$ gelten. Für $m > 0$ ist $B_{p^m}(x)$ die disjunkte Vereinigung von p^m Kugeln vom Radius 1, also gilt $\lambda(B_{p^m}(x)) = p^m$. Ebenso ist $B_1(x)$ die disjunkte Vereinigung von p^m Kugeln vom Radius p^{-m}. Da diese alle das gleiche Maß haben müssen (Translationsinvarianz), folgt $B_{p^{-m}}(x) = p^{-m}$, also $B_{p^k}(x) = p^k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Das Maß jeder Borelmenge $E \subset G$ ist nun bestimmt durch die äußere Regulariät:

$$\lambda(E) = \inf\left\{\sum\nolimits_{j=1}^\infty p^{m_j} \;\middle|\; E \subset \bigcup\nolimits_{j=1}^\infty B_{p^{m_j}}(x_j)\right\}.$$

Diese ähnelt der Formel für das 1-dimensionale Lebesguemaß. (Die Normierung ist etwas anders, beim Lebesguemaß ist das Maß einer Kugel der Diameter, nicht der Radius.)

1.4 Modulfunktion

1.4.1. Sei im folgenden G eine lokal-kompakte Gruppe mit (linkem) Haarmaß λ. Ist $x \in G$, so definiert $\lambda_x(E) = \lambda(Ex)$ für alle Borelmengen E ein weiteres Haarmaß λ_x. Nach Theorem 1.3.7 gibt es also eine eindeutige Konstante $\Delta(x) > 0$ mit $\lambda_x = \Delta(x) \cdot \lambda$. Man sieht leicht ein, dass $\Delta(x)$ von der Wahl des Haarmaßes λ unabhängig ist.
Die so definierte Abbildung $\Delta : G \to]0, \infty[$ heißt die *Modulfunktion* von G.

Satz 1.4.2. Die Modulfunktion Δ ist ein stetiger Gruppen-Homomorphismus, wobei $]0, \infty[\subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ als Gruppe bzgl. $\cdot$ betrachtet wird. Weiter gilt

$$\int R_y f \, d\lambda = \Delta(y^{-1}) \int f \, d\lambda \quad \text{für alle} \ \ f \in \mathbf{L}^1(\lambda)\,,\ y \in G\,. \tag{1.9}$$

Beweis. Man hat $\Delta(xy)\lambda = \lambda_{xy} = \Delta(y)\lambda_x = \Delta(x)\Delta(y)\lambda$, da λ_x ein Haarmaß ist und $\lambda_{xy} = (\lambda_x)_y$. Folglich ist Δ ein Homomorphismus. Die Gleichung (1.9) folgt aus $\int R_y f \, d\lambda = \int f \, d\lambda_{y^{-1}}$, welches sicherlich für $f = 1_E$ ($E \subset G$ eine Borelmenge) gilt und somit auch für alle $f \in \mathbf{L}^1(\lambda)$.
Die Abbildung $y \mapsto R_y f : G \to C_c(G)$ ist für $f \in C_c(G)$ stetig nach Satz 1.1.9, also folgt die Stetigkeit von Δ aus (1.9). □

1.4.3. Man schreibt auch $d\lambda(xy)$ für $d\lambda_y(x)$. Dann kann man die Gleichung (1.9) auch in der Form $d\lambda(xy) = \Delta(y) d\lambda(x)$ schreiben.
Die Gruppe G heißt *unimodular*, falls $\Delta = 1$ ist. Dies ist gemäß (1.9) offenbar dazu äquivalent, dass λ auch ein rechtes Haarmaß ist. Abelsche Gruppen sind offenbar unimodular, jedoch ist diese Eigenschaft viel verbreiteter. Es folgen einige Beispiele.

Satz 1.4.4. Ist K eine kompakte Untergruppe von G, so gilt $\Delta|_K = 1$. Insbesondere ist G unimodular, wenn G kompakt ist.

Beweis. Es ist $H = \Delta(K)$ eine kompakte Untergruppe von $]0, \infty[\cong (\mathbb{R}, +)$, also gilt $H = \{1\}$. □

Definition 1.4.5. Sei $[G, G]$ die kleinste abgeschlossene Untergruppe von G, die alle *Kommutatoren* $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ enthält. Man nennt $[G, G]$ die *Kommutatoruntergruppe* von G. Die Kommutatoruntergruppe ist ein Normalteiler, da $z[x, y]z^{-1} = [zxz^{-1}, zyz^{-1}]$ für alle $x, y, z \in G$ gilt. Folglich ist $G/[G, G]$ abelsch.

Satz 1.4.6. Sei N ein abgeschlossener Normalteiler von G mit $\Delta|_N = 1$, so dass G/N kompakt ist. Dann ist G unimodular. Insbesondere gilt dies, wenn $G/[G, G]$ kompakt ist.

Beweis. Gilt $\Delta|_N = 1$, so faktorisiert Δ durch die kompakte Gruppe G/N und hat folglich kompaktes Bild. Dann muss $\Delta = 1$ gelten. Da für alle $x, y \in G$ gilt $\Delta([x,y]) = [\Delta(x), \Delta(y)] = 1$, folgt $\Delta|_{[G,G]} = 1$. □

Korollar 1.4.7. Sei G eine zusammenhängende Liegruppe, deren Liealgebra $\mathfrak{g}$ reduktiv ist, d.h. $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, wobei $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ abelsch und $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ die Summe von einfachen Idealen ist. Dann ist G unimodular.

Beweis. Man kann annehmen, dass G einfach zusammenhängend ist (sonst faktorisiert man aus $\tilde{G}$ nur eine zentrale diskrete Untegruppe aus). Dann ist $G = Z(G) \times [G,G]$, wobei $[G,G]$ die Liealgebra $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ hat. Da $Z(G)$ abelsch ist, kann man annehmen, dass $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ ist. Dann ist aber $G = [G,G]$ und die Behauptung folgt sofort. □

Bemerkung 1.4.8. Man kann den Beweis so abwandeln, dass er auch für endlich viele Zusammenhangskomponenten funktioniert. Dann ist $G/[G,G]$ endlich.
In dieser Weise ist das Korollar auf alle klassischen Matrixgruppen anwendbar, also $G = \mathrm{GL}(n,\mathbb{D}), \mathrm{Sp}(2n,\mathbb{R})$, etc. Auf diese Weise sind sowohl abelsche als Gruppen, die weit davon entfernt sind, abelsch zu sein (einfache Liegruppen), unimodular. Das einfachste Beispiel einer nicht unimodularen Gruppen ist die $ax+b$-Gruppe. Allgemeiner kann man die Modulfunktion für eine zusammenhängende Liegruppe wie folgt bestimmen. (Wiederum spielen endlich viele Zusammenhangskomponenten hier auch keine Rolle.)

Satz 1.4.9. Sei G eine zusammenhängende Liegruppe. Es gilt $\Delta(g) = \det \mathrm{Ad}(g^{-1})$ für alle $g \in G$.

Beweis. Sei $\omega \in \Omega^n(G)$ links-invariant ($n = \dim G$). Das Funktional $f \mapsto \int_G f\omega$ definiert ein Haarmaß. Es gilt nach (1.9) und der Linksinvarianz

$$\Delta(g^{-1}) \int_G f\omega = \int_G (R_g f)\omega = \int_G (L_g R_g f)\omega = (*) \; .$$

Es ist $L_g R_g f = f \circ c_{g^{-1}}$, wobei $c_g(h) = ghg^{-1}$. Da $g \mapsto c_g$ stetig ist und G zusammenhängend, erhält c_g die Orientierung. Dann gilt

$$(*) = \int_G c^*_{g^{-1}}(f c^*_g \omega) = \int_G f c^*_g \omega$$

und die Behauptung folgt aus $c^*_g\omega = \det dc_g = \det \mathrm{Ad}(g)$. □

Definition 1.4.10. Um Probleme mit Topologien auf G zu umgehen, die nicht σ-kompakt sind oder keine abzählbare Basis besitzen, führen wir folgenden Äquivalenzbegriff für Radonmaße μ, ν auf einem lokal-kompakten Raum X ein: Die Maße μ und ν heißen *stark äquivalent*, falls es eine stetige Funktion $f : X \to]0,\infty[$ gibt, so dass $\int_X \phi \, d\nu = \int_X \phi f \, d\mu$ für alle $\phi \in C_c(X)$. Die Funktion f heißt Dichtefunktion.

Falls X σ-kompakt ist (bzw. μ σ-endlich), reicht nach dem Satz von Radon–Nikodym für die starke Äquivalenz, dass μ und ν die gleichen Nullmengen haben (d.h. *äquivalent* sind). Allgemeiner gilt folgendes.

Satz 1.4.11. Sei X lokal-kompakt und seien μ, ν stark äquivalente Radonmaße mit Dichtefunktion f. Dann gilt $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ für alle Borelmengen $E \subset X$.

Beweis. Definiere ein Borelmaß $\tilde{\nu}$ durch $\tilde{\nu}(E) = \int_E f\, d\mu$. Um zu die Behauptung zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $\tilde{\nu}$ von außen regulär ist und auf offenen Mengen mit ν übereinstimmt.

Für die äußere Regularität sei E eine Borelmenge mit $\tilde{\nu}(E) < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Definiere $V_j = f^{-1}(]2^{j-2}, 2^j[)$ für alle $j \in \mathbb{Z}$. Es gilt dann $X = \bigcup_j V_j$, also auch $E = \bigcup_j E_j$ mit $E_j = E \cap V_j$.

Weiter ist $\mu(E_j) < 2^{2-j} \int_{E_j} f\, d\mu = 2^{2-j}\tilde{(}E_j) < \infty$. Da μ von außen regulär ist, gibt es für alle j offene Mengen $E_j \subset U_j \subset V_j$ mit $\mu(U_j \setminus E_j) \leqslant \varepsilon 4^{-(1+|j|)}$. Dann gilt $\tilde{\nu}(U_j \setminus E_j) \leqslant 2^j \mu(U_j \setminus E_j) \leqslant \varepsilon 2^{-(2+|j|)}$ und folglich $\tilde{\nu}(E) \leqslant \varepsilon \sum_j 2^{-(2+|j|)} = \frac{3\varepsilon}{4}$. Dies zeigt, dass $\tilde{\nu}$ von außen regulär ist.

Sei nun U offen und $\Phi = \{\phi \in C_c(X) \mid 0 \leqslant \phi \leqslant 1\,,\ \operatorname{supp}\phi \subset U\}$. Dann gilt $\nu(U) = \sup_{\phi\in\Phi} \int \phi\, d\mu = \sup_{\phi\in\Phi} \int \phi f\, d\mu$. Da $f\Phi$ eine gerichtete Familie nach unten halbstetiger Funktionen ist, die außerhalb eines Kompaktums $\leqslant 0$ sind, folgt auch $\sup_{\phi\in\Phi} \int \phi f\, d\mu = \int_U f\, d\mu = \tilde{\nu}(U)$. □

Satz 1.4.12. Sei ϱ das durch $\varrho(E) = \lambda(E^{-1})$ definierte rechte Haarmaß. Dann sind λ und ϱ stark äquivalent und es gilt $d\varrho(x) = \Delta(x^{-1})d\lambda(x)$.

Beweis. Es gilt

$$\int R_y f(x)\Delta(x^{-1})\, d\lambda(x) = \Delta(y) \int f(xy)\Delta((xy)^{-1})\, d\lambda(x) = \int f(x)\Delta(x^{-1})\, d\lambda\,,$$

wobei im zweiten Schritt (1.9) angewandt wurde. Damit ist $\Delta(x^{-1})\, d\lambda(x)$ ein rechtes Haarmaß und folglich gleich $c\varrho$ für ein $c > 0$. Angenommen, $c \neq 1$. Dann gibt es eine symmetrische 1-Umgebung U, so dass $|\Delta(x^{-1}) - 1| \leqslant \frac{1}{2}|c-1|$. Es gilt $\lambda(U) = \varrho(U)$, also

$$|c-1|\lambda(U) = |c\varrho(U) - \lambda(U)| \leqslant \int_U |\Delta(x^{-1}) - 1|\, d\lambda(x) \leqslant \tfrac{1}{2}|c-1|\lambda(U)\,,$$

ein Widerspruch. □

Bemerkung 1.4.13. Die Formel $d\varrho(x) = \Delta(x^{-1})\, d\lambda(x)$ kann auch auf folgende Weise umgeschrieben werden:

$$d\lambda(x^{-1}) = \Delta(x^{-1})\, d\lambda(x) \quad \text{und} \quad d\varrho(x^{-1}) = \Delta(x)\, d\varrho(x)\,. \tag{1.10}$$

Dies erlaubt es, in Integralen x^{-1} durch x zu ersetzen.

1.4.14. Ist G nicht unimodular, so ist Δ unbeschränkt, also enthalten die Räume $\mathbf{L}^p(\lambda)$ und $\mathbf{L}^p(\varrho)$ für $1 \leqslant p < \infty$ nicht die gleichen Elemente. Sie sind jedoch isometrisch isomorph. In der Tat, definiert man

$$\check{f}(x) = f(x^{-1}) \quad \text{und} \quad M_p f(x) = \Delta(x)^{1/p} f(x)$$

für Funktionen f auf G, so induzieren $f \mapsto \check{f}$ und $f \mapsto M_p f$ isometrische Isomorphismen $\mathbf{L}^p(\lambda) \to \mathbf{L}^p(\varrho)$ für alle $1 \leqslant p < \infty$. Indem man sie verknüpft, erhält man folgenden interessanten isometrischen Automorphismus von $\mathbf{L}^p(\lambda)$:

$$M_p^{-1}\check{f}(x) = (M_p f)^\vee(x) = \Delta(x)^{-1/p} f(x^{-1}) \ .$$

1.5 Faltung

Im folgenden sei jede lokal-kompakte Gruppe G stets mit einem festen linken Haarmaß λ versehen. Wir schreiben $dx = d\lambda(x)$, $\int f = \int f\, d\lambda$, $\mathrm{vol}(E) = \lambda(E)$, $\mathbf{L}^p(G) = \mathbf{L}^p(\lambda)$.

1.5.1. Sei $\mathrm{M}(G) = C_0(G)'$ der Vektorraum der *beschränkten* komplexen Radonmaße auf G und seien $\mu, \nu \in \mathrm{M}(G)$. Definiere

$$I(\phi) = \langle m^*\phi, \mu \otimes \nu \rangle = \iint \phi(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) \quad \text{für alle} \ \ \phi \in C_b(G) \ .$$

Dann ist I ein stetiges lineares Funktional: $|I(\phi)| \leqslant \|\phi\|_\infty \|\mu\| \|\nu\|$. Folglich existiert genau ein beschränktes komplexes Maß $\mu * \nu \in \mathrm{M}(G)$ mit

$$\int \phi(xy)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = I(\phi) = \int \phi\, d(\mu * \nu) \quad \text{für alle} \ \ \phi \ . \tag{1.11}$$

Da $\|\mu * \nu\| \leqslant \|\mu\| \|\nu\|$, ist die so definierte Abbildung $* : \mathrm{M}(G) \times \mathrm{M}(G) \to \mathrm{M}(G)$ stetig und bilinear. Man nennt $*$ das *Faltungsprodukt*.
Das Faltungsprodukt ist assoziativ, denn

$$\int \phi\, d(\mu * (\nu * \omega)) = \iiint \phi(xyz)\, d\mu(x)\, d\nu(y)\, d\omega(z) = \int \phi\, d((\mu * \nu) * \omega) \ .$$

Somit ist $(\mathrm{M}(G), *)$ eine komplexe Banachalgebra mit Eins $\delta = \delta_1$.
Man hat eine Injektion $\delta : G \to \mathrm{M}(G) : g \mapsto \delta_g$ und $\delta_x * \delta_y = \delta_{xy}$, da

$$\int \phi\, d(\delta_x * \delta_y) = \int \phi(ab)\, d\delta_x(a)\, d\delta_y(b) = \phi(ab) \ .$$

Somit ist G abelsch, falls $\mathrm{M}(G)$ kommutativ ist. Die Umkehrung gilt auch, qua Definition von $*$.

Nun definiert man durch $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$ bzw.

$$\int \phi \, d\mu^* = \int \phi(x^{-1}) \, d\bar{\mu}(x) = \overline{\int \overline{\phi(x^{-1})} \, d\mu(x)}$$

eine Involution $*$ auf $\mathrm{M}(G)$. Offenbar gilt

$$\|\mu^*\| = \sup_{\|\phi\|_\infty \leqslant 1} |\textstyle\int \phi \, d\mu^*| = \sup_{\|\overline{\check{\phi}}\|_\infty \leqslant 1} |\textstyle\int \phi \, d\mu| = \|\mu\| \; .$$

Weiter ist

$$\int \phi \, d(\mu * \nu)^* = \overline{\iint \overline{f(y^{-1}x^{-1})} \, d\mu(x) \, d\nu(y)} = \int \phi \, d(\mu^* * \nu^*) \; ,$$

also ist $\mathrm{M}(G)$ mit dieser Involution eine involutive Banachalgebra.

1.5.2. In mancherlei Hinsicht ist $\mathrm{M}(G)$ zu groß, weshalb man die Teilmenge $\mathbf{L}^1(G) \to \mathrm{M}(G) : f \mapsto f(x) \, dx$ betrachtet.
Es ergibt sich für das Maß $\mu = (f \, dx) * (g \, dx)$:

$$\begin{aligned}\int \phi \, d\mu &= \iint \phi(xy) f(x) g(y) \, dx \, dy = \iint \phi(xy) f(x) g(y) \, dy \, dx \\ &= \iint \phi(y) f(x) g(x^{-1}y) \, dy \, dx = \int \phi(y) \Big(\int f(x) g(x^{-1}y) \, dx \Big) \, dy \; ,\end{aligned}$$

denn es gilt

$$\iint |f(x) g(x^{-1}y)| \, dy \, dx = \int |f(x)| \, dx \cdot \int |g(y)| \, dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty \; ,$$

so dass die Voraussetzungen des Satzes von Fubini–Tonelli gegeben sind. Insbesondere ist das Integral $(f * g)(y) = \int f(x) g(x^{-1}y) \, dx$ für fast jedes $y \in G$ absolut konvergent und definiert eine Funktion $f * g \in \mathbf{L}^1(G)$, für die nach obiger Rechnung $\mu = (f * g) \, dx$ gilt. Man nennt auch $f * g$ die *Faltung*. Es ist also $\mathbf{L}^1(G)$ eine (abgeschlossene) Unteralgebra von $\mathrm{M}(G)$. Da $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$, ist also $(\mathbf{L}^1(G), *)$ eine Banachalgebra.
Man kann die Faltung von Funktionen auch wie folgt ausrechnen:

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int f(y) g(y^{-1}x) \, dy = \int f(xy) g(y^{-1}) \, dy \\ &= \int f(xy^{-1}) g(y) \Delta(y^{-1}) \, dy = \int f(y^{-1}) g(yx) \Delta(y^{-1}) \, dy \; ,\end{aligned} \tag{1.12}$$

wegen der Gleichung (1.10) und der Rechtsinvarianz des Maßes $\Delta(y^{-1}) \, dy$. Als Eselsbrücke für diese Formeln beachte man, dass die Variablen in den vier Integralen in der Reihenfolge $yy^{-1}x$, $xy^{-1}y$, $xy^{-1}y$, $yy^{-1}x$ vorkommen. Das

Produkt jedes dieser Worte ist x.
Die Involution $*$ schränkt sich auch $\mathbf{L}^1(G)$ ein: Für $\mu = f(x)\,dx$ gilt

$$\int \phi\, d\mu^* = \overline{\int \overline{\phi(x^{-1})} f(x)\, dx} = \int \phi(x)\overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})\, dx\ ,$$

d.h. $\mu = f^*(x)\,dx$ mit

$$f^*(x) = \Delta(x^{-1})\overline{f(x^{-1})}\ . \tag{1.13}$$

Damit wird $\mathbf{L}^1(G)$ zu einer komplexen involutiven Banachalgebra, die $\mathbf{L}^1$*-Gruppenalgebra* genannt wird. Ist G eine endliche Gruppe, so ist dies die übliche Gruppenalgebra (über $\mathbb{C}$).
Es gilt $L_z f = \delta_z * f$, denn

$$\int \phi(x) L_z f(x)\, dx = \int \phi(zx) f(x)\, dx = \iint \phi(yx) f(x)\, dx\, d\delta_z(y)$$

Analog gilt $R_z f = \Delta(z^{-1}) f * \delta_{z^{-1}}$, denn

$$\begin{aligned} \int \phi(x) R_z f(x)\, dx &= \Delta(z^{-1}) \int \phi(xz^{-1}) f(x)\, dx \\ &= \Delta(z^{-1}) \iint \phi(xy) f(x)\, dx\, d\delta_{z^{-1}}(y) \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} L_z(f * g) &= \delta_z * f * g = (L_z f) * g\ , \\ R_z(f * g) &= \Delta(z^{-1}) \cdot f * g * \delta_{z^{-1}} = f * R_z g\ . \end{aligned}$$

Faltung mit L^1-Funktionen kann auch auf andere L^p-Räume fortgesetzt werden. Um dies rigoros und transparent zu machen, diskutieren wir kurz vektorwertige Integrale.

Definition 1.5.3. Sei (X, μ) ein Maßraum und V ein topologischer Vektorraum. Eine Abbildung $F : X \to V$ heißt *schwach integrierbar*, falls $\eta \circ F \in \mathbf{L}^1(\mu)$ für alle $\eta \in V^*$. Existiert dann ein $v \in V$ mit $\eta(v) = \int \eta \circ F\, d\mu$ für alle $\eta \in V^*$, so v eindeutig bestimmt. Man schreibt $\int F\, d\mu = v$ und nennt dies das *Integral* von F.
Sei W ein topologischer Vektorraum und $T : V \to W$ stetig und linear. Ist $F : X \to V$ schwach integrierbar und existiert das Integral $\int F\, d\mu$, so ist auch die Abbildung $T \circ F : X \to W$ vektorwertig integrierbar, das Integral $\int T \circ F\, d\mu$ existiert und es gilt $T(\int F\, d\mu) = \int T \circ F\, d\mu$.
Das folgende Integrabilitätskriterium ist nützlich.

Theorem 1.5.4. Sei X ein lokal-kompakter Raum mit Radonmaß μ, V ein Banachraum, $g \in \mathbf{L}^1(\mu)$ und $H : X \to V$ beschränkt und stetig. Dann existiert $\int gH\, d\mu$, das Integral gehört zum abgeschlossenen linearen Aufspann von $H(X)$ und

$$\left\|\int gH\,d\mu\right\|_V \leqslant \|g\|_1 \cdot \sup_{x\in X}\|H(x)\|_V \;.$$

Beweis. Dies ist [Fol95, Theorem (A3.3)]. Der Beweis ist nicht schwer. □

Satz 1.5.5. Sei $1 \leqslant p < \infty$ und $f \in \mathbf{L}^p(G)$. Dann sind $y \mapsto L_y f$ und $y \mapsto R_y f$ als Abbildungen $G \to \mathbf{L}^p(G)$ stetig.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall $R_y f$, der andere ist analog (und einfacher). Es reicht zu zeigen, dass $\|R_y f - f\|_p \to 1$ mit $y \to 1$. Sei zunächst $g \in C_c(X)$ und $K = (\operatorname{supp} g)V \cup V(\operatorname{supp} g)$ für eine kompakte symmetrische 1-Umgebung V. Es ist K kompakt und $\operatorname{supp} R_y g \subset K$ für alle $y \in V$. Damit gilt

$$\|R_y g - g\|_p \leqslant \operatorname{vol}(K)^{1/p}\|R_y g - g\|_\infty \to 0 \qquad (y \to 1)\;,$$

nach Satz 1.1.9.
Es gibt ein $C > 0$, so dass $\|R_y f\|_p = \Delta(y^{-1})^{1/p}\|f\|_p \leqslant C\|f\|_p$ für alle $y \in V$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $g \in C_c(X)$ mit $\|f - g\|_p \leqslant \varepsilon$. Es folgt

$$\|R_y f - f\|_p \leqslant \|R_y(f-g)\|_p + \|R_y g - g\|_p + \|g - f\|_p \leqslant (C+1)\varepsilon + \|R_y g - g\|_p \;.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 1.5.6. Seien $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in \mathbf{L}^1(G)$, $g \in \mathbf{L}^p(G)$.

(i). Die Integrale in (1.12) konvergieren für fast jedes x absolut, sind identisch und definieren eine Funktion $f * g \in \mathbf{L}^p(G)$ mit $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_1\|g\|_p$.

(ii). Ist G unimodular, so gelten die Aussagen in (i) auch für $g * f$.

(iii). In jedem Fall ist $g * f \in \mathbf{L}^p(G)$, wenn $\operatorname{ess\,supp} f$ kompakt ist.

(iv). Für $p = \infty$ ist $f * g$ (definiert durch (1.12)) stetig und beschränkt. Unter den Voraussetzungen von (ii) oder (iii) gilt dies auch für $g * f$.

Beweis. Sei $p < \infty$. Die vektorwertige Funktion $y \mapsto L_y g : G \to \mathbf{L}^p(G)$ ist nach Satz 1.5.5 stetig und da $\|L_y g\|_p = \|g\|$, ist sie auch beschränkt. Nach Theorem 1.5.4 existiert das Integral

$$\int f(y) L_y g\, dy \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^p(G)$$

und es gilt

$$\left\|\int f(y) L_y g\, dy\right\|_p \leqslant \|f\|_1\|g\|_p \;.$$

Es gilt $\mathbf{L}^p(G)^* = \mathbf{L}^q(G)$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Qua Definition gilt für alle $h \in \mathbf{L}^q(G)$

$$\int \Big(\int f(y) L_y g \, dy \Big)(x) h(x) \, dx = \iint f(y) g(y^{-1}x) h(x) \, dx \, dy \, .$$

Indem man Absolutbeträge nimmt, gilt

$$\begin{aligned} \iint |f(y) g(y^{-1}x) h(x)| \, dx \, dy &= \int \Big(\int |f(y) L_y g| \, dy \Big)(x) |h(x)| \, dx \\ &\leqslant \|f\|_1 \|g\|_p \|h\|_q < \infty \, , \end{aligned}$$

also folgt mit dem Satz von Fubini–Tonelli

$$\int \Big(\int f(y) L_y g \, dy \Big)(x) h(x) \, dx = \iint f(y) g(y^{-1}x) \, dy \, h(x) \, dx \, ,$$

wobei das innere Integral für fast jedes $x \in G$ absolut konvergiert und eine Funktion in $\mathbf{L}^p(G) = \mathbf{L}^q(G)^*$ definiert. Da $h \in \mathbf{L}^q(G)$ beliebig war, folgt also $f * g = \int f(y) L_y g \, dy \in \mathbf{L}^p(G)$. Analog argumentiert man mit den anderen Integralen, was (i) beweist.
Die Norm des Integranden im dritten Integral aus (1.12) mit vertauschten Rollen für f und g ist

$$\|R_{y^{-1}} g\|_p \Delta(y^{-1}) |f(y)| = \|g\|_p \Delta(y)^{1/p-1} |f(y)| \, .$$

Wenn G unimodular ist oder $\operatorname{ess\,supp} f$ kompakt ist, sind die Voraussetzungen von Theorem 1.5.4 auch erfüllt und man kann analog argumentieren. Dies beweist (ii) und (iii).
Sei nun $p = \infty$. Für $f \in C_c(G)$ folgt die Stetigkeit von $f * g$ und $g * f$ aus Satz 1.1.9. Es gilt $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$. Der allgemeine Fall folgt dann aus der Dichtheit von $C_c(G)$ in $\mathbf{L}^1(G)$ und der Vollständigkeit von $C_b(G)$. Für $g * f$ argumentiert man analog. □

Satz 1.5.7. Sei G unimodular und seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für alle $f \in \mathbf{L}^p(G)$, $g \in \mathbf{L}^q(G)$ gilt $f * g \in C_0(G)$ mit $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.

Beweis. Wir zeigen erst die Normungleichung. Es gilt

$$|f * g(x)| \leqslant \int |f(y) g(y^{-1}x)| \, dy \leqslant \|f\|_p \|(R_x g)^\vee\|_q = \|f\|_p \|g\|_q$$

wegen der Unimodularität. Nun reicht es offenbar, die Aussage für $f, g \in C_c(G)$ zu zeigen. Dann aber ist $f * g$ stetig nach Satz 1.5.6 (iv) und man sieht leicht, dass $\operatorname{supp}(f * g) \subset (\operatorname{supp} f)(\operatorname{supp} g)$, also kompakt ist. Dies zeigt die Behauptung. □

1.5.8. Ist G diskret, so gilt $\delta \in \mathbf{L}^1(G)$. Andernfalls hat $\mathbf{L}^1(G)$ keine Eins. Man kann allerdings ganz allgemein einen Ersatz hierfür konstruieren, eine sogenannte 'Fasteins' (oder 'approximative Eins'). Die Konstruktion ist aus dem $\mathbb{R}^n$ bekannt (Stichwort: 'Dirac-Folgen'), allerdings gibt es für beliebiges G einige Feinheiten zu beachten.

Satz 1.5.9. Sei $\mathcal{U}$ eine Umgebungsbasis der 1. Zu $U \in \mathcal{U}$ gebe es eine Funktion $\psi_U \geqslant 0$ mit $\operatorname{supp}\psi_U \subset U$, $\psi_U(x) = \psi_U(x^{-1})$ und $\int \psi_U = 1$.
Falls $f \in \mathbf{L}^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, oder $p = \infty$ und f rechts gleichmäßig stetig ist, gilt

$$\|f * \psi_U - f\|_\infty \to 0 \qquad (U \to \{1\})\ .$$

Falls $f \in \mathbf{L}^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, oder $p = \infty$ und f links gleichmäßig stetig ist, gilt

$$\|\psi_U * f - f\|_\infty \to 0 \qquad (U \to \{1\})\ .$$

Beweis. Es gilt punktweise überall

$$\begin{aligned} f * \psi_U(y) - f(y) &= \int f(yx)\psi(x^{-1})\,dx - f(y)\int \psi_U(x)\,dx \\ &= \int (R_x f(y) - f(y))\psi_U(x)\,dx\ . \end{aligned}$$

Da $x \mapsto R_x f - f : G \to \mathbf{L}^p(G)$ stetig ist und beschränkt auf $\operatorname{supp}\psi_U \subset U$, ist Theorem 1.5.4 mit $X = \operatorname{supp}\psi_U$ anwendbar. Damit existiert das Integral $\int (R_x f - f)\psi_U(x)\,dx$ in $\mathbf{L}^p(G)$. Folglich $f * \psi_U - f = \int (R_x f - f)\psi_U(x)\,dx$, mit

$$\|f * \psi_U - f\| \leqslant \sup\nolimits_{x\in U}\|R_x f - f\|_p\ .$$

Die erste Behauptung folgt also mit Satz 1.5.5 bzw. der rechten gleichmäßigen Stetigkeit. Die zweite Behauptung folgt ebenso, da man analog zeigt, dass $\|\psi_U * f - f\|_p \leqslant \sup_{x\in U}\|L_x f - f\|_p$. □

Definition 1.5.10. Jede Familie $(\psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ wie in Satz 1.5.9 bezeichnen wir als eine *Fasteins*. Eine Besonderheit von $\mathbf{L}^1(G)$ ist, dass die Fasteinsen *beschränkt* sind.
Eine erste Anwendung von Fasteinsen ist der folgende Satz.

Theorem 1.5.11. Sei $I \subset \mathbf{L}^1(G)$ ein abgeschlossener Unterraum. Genau dann ist I ein Linksideal (Rechtsideal), wenn I unter Linkstranslationen (Rechtstranslationen) invariant ist.

Beweis. Sei I ein Linksideal, $f \in I$ und $x \in G$. Sei (ψ_U) eine Fasteins. Dann gilt $L_x(\psi_U * f) = (L_x\psi_U) * f \in I$ für alle U und $L_x f = \lim_U L_x(\psi U * f)$ in $\mathbf{L}^1(G)$ nach Satz 1.5.9. Da I abgeschlossen ist, folgt $L_x f \in I$.

Sei umgekehrt I invariant unter Linkstranslationen, $f \in I$ und $g \in \mathbf{L}^1(G)$. Es gilt $g * f = \int g(y) L_y f \, dy$ in $\mathbf{L}^1(G)$ und nach Theorem 1.5.4 liegt dieses Integral im abgeschlossenen linearen Aufspann der Menge $L_G f$, insbesondere also in I.
Der Fall von Rechtstranslationen verläuft identisch. □

1.6 Homogene Räume

Definition 1.6.1. Ein (linker) *G-Raum* ist ein lokal-kompakter Hausdorffraum X mit einer stetigen Abbildung $G \times X \to X : (g, x) \mapsto gx$, so dass für alle $g, h \in G$ und $x \in X$ gilt: $1x = x$ und $(gh)x = g(hx)$. Analog definiert man einen rechten G-Raum. Ein G-Raum X heißt *transitiv*, falls $X = Gx$ für ein $x \in X$.

1.6.2. Ein Beispiel für einen transitiven G-Raum ist G/H, wobei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe ist. Ist allgemein S ein transitiver G-Raum, so wähle man $s_0 \in S$. Sei $H = G_{s_0} = \{g \in G | gs_0 = s_0\}$. Dies definiert eine Abbildung $\Phi : G/H \to S$ durch $\Phi(gH) = gs_0$. Offenbar ist Φ stetig und bijektiv, aber nicht immer ist Φ ein Homöomorphismus. (Z.B. sei $G = \mathbb{R}_d$ die additive Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ mit der diskreten Topologie und $S = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie. Die übliche Wirkung von G auf S gibt nicht Anlass zu einem Homöomorphismus.)

Satz 1.6.3. Falls G σ-kompakt ist, so ist Φ ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei $\phi : G \to S$ die Abbildung $\phi(g) = gs_0$. Sei $\emptyset \neq U \subset G$ offen und $x_0 \in U$. Es existiert eine kompakte symmetrische 1-Umgebung $V \subset G$ mit $x_0 VV \subset U$. Da G σ-kompakt ist, gibt es $y_n \in G$ mit $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} y_n V$ und $S = \bigcup_{n=0}^{\infty} y_n \phi(V)$. Die Teilmengen $y_n \phi(V)$ sind allesamt homöomorph zu dem Kompaktum $\phi(V)$. Nach dem Satz von Baire für lokal-kompakte Hausdorffräume existiert $x_1 \in V$ mit $\phi(x_1) \in \phi(V)^\circ$. Es folgt $x_0 \in x_0 x_1^{-1} \phi(V)^\circ = \phi(x_0 x_1^{-1} V)^\circ$. Da x_0 beliebig war, ist $\phi(U)$ offen. □

Definition 1.6.4. Sei ein transitiver G-Raum S, so dass Φ für eine Wahl von $s_0 \in S$ ein Homöomorphismus ist, heißt *homogen*. Im folgenden betrachten wir nur homogene G-Räume.

1.6.5. Sei G die $ax + b$-Gruppe und man betrachte die definierende Wirkung von G auf $\mathbb{R}$, gegeben durch $(a, b; x) \mapsto ax + b$. Dann ist $\mathbb{R}$ ein homogener G-Raum. Das einzige RadonmaßÊ(bis auf Vielfache), das unter den Translationen $x \mapsto x + b$ invariant ist, ist das Lebesguemaß dx. Dieses MaßÊist nicht invariant unter den Dilatationen $x \mapsto ax$ ($a > 0$). Daher hat $\mathbb{R}$ kein G-invariantes Maß.

1.6.6. Sei G/H ein homogener G-Raum. Wir stellen uns die Frage, wann G/H ein invariantes G-Maß trägt. Seien dazu dg, dh Haarmaße auf G, H und Δ_G, Δ_H die Modulfunktionen. Sei $q : G \to G/H$ die kanonische Projektion. Wir definieren

$P : C_c(G) \to C_c(G/H)$ durch

$$Pf(xH) = \int_H f(xh)\,dh \quad \text{für alle } \ f \in C_c(G)\ .$$

Dies ist wohldefiniert wegen der Invarianz des Haarmaßes dh. Weiter ist Pf stetig mit $\operatorname{supp} Pf \subset (\operatorname{supp} f)H$ und P ist linear. Es gilt

$$Pf((\phi \circ q) \cdot f) = \phi \cdot Pf \quad \text{für alle } \ \phi \in C(G/H)\,,\ f \in C_c(G)\ . \tag{1.14}$$

Wir zeigen nun, dass P surjektiv ist.

Lemma 1.6.7. Sei $K \subset G/H$ kompakt. Es gibt ein kompaktes $L \subset G$ mit $q(L) = K$.

Beweis. Sei $V \subset G$ eine offene, relativ kompakte 1-Umgebung. Da q offen ist, bilden die Mengen $q(xV)$, $x \in G$, eine offene Überdeckung von K. Es existieren daher Elemente $x_1, \dots, x_n \in G$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^n q(x_jV)$. Sei $L = q^{-1}(K) \cap \bigcup_{j=1}^n x_j\overline{V}$. Dann ist L kompakt und $q(L) = K \cap \bigcup_{j=1}^n q(x_j\overline{V}) = K$. □

Lemma 1.6.8. Sei $K \subset G/H$ kompakt. Es gibt ein $f \in C_c(G)$, $f \geqslant 0$, so dass $Pf = 1$ auf K.

Beweis. Sei $L \subset G/H$ eine kompakte K-Umgebung und $M \subset G$ kompakt mit $q(M) = L$ (gemäßÊLemma 1.6.7). Sei $g \in C_c(G)$, $g \geqslant 0$, $g > 0$ auf K und $\phi \in C_c(G/H)$ mit $1_K \leqslant \phi \leqslant 1_L$. Es gilt $Pg > 0$ auf $MH = L$, also ist

$$f = (Pg \circ q)^{-1}(\phi \circ q)g \in C_c(G)$$

wohldefiniert. Es gilt $Pf = (Pg)^{-1}\phi Pg = \phi$ nach (1.14), also $Pf = 1$ auf K. Dies ist die Behauptung. □

Satz 1.6.9. Sei $\varphi \in C_c(G/H)$. Es gilt $Pf = \varphi$ und $q(\operatorname{supp} f) = \operatorname{supp} \varphi$ für ein $f \in C_c(G)$. Falls $\varphi \geqslant 0$, so kann man $f \geqslant 0$ wählen.

Beweis. Nach Lemma 1.6.8 gibt es ein $g \in C_c(G)$ mit $g \geqslant 0$ und $Pg = 1$ auf $\operatorname{supp} \varphi$. Sei $f = (\varphi \circ q) \cdot g$. Dann gilt $Pf = \varphi Pg = \varphi$ und die Behauptung folgt leicht. □

Das folgende Theorem ist von fundamentaler Bedeutung.

Theorem 1.6.10. Sei G eine lokal-kompakte Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Genau dann gibt es ein G-invariantes Radonmaß μ auf G/H, wenn $\Delta_G|_H = \Delta_H$. In diesem Fall ist μ eindeutig bis auf Vielfache. Für eine geeignete Wahl der Konstanten gilt

$$\int_G f = \int_{G/H} Pf\,d\mu = \int_{G/H} \int_H f(x\xi)\,d\xi\,d\mu(xH) \quad \text{für alle } \ f \in C_c(G)\ . \tag{1.15}$$

Beweis. Sei μ ein G-invariantes Radonmaß. Dann ist $f \mapsto \int Pf\,d\mu$ ein Haarmaß auf G. Nach geeigneter Wahl der Konstanten gilt $\int_G f = \int Pf\,d\mu$. Da P surjektiv ist (Satz 1.6.9), ist μ dadurch eindeutig bestimmt und somit eindeutig bis auf Vielfache.
Sei $z \in H$. Es gilt $P(R_z f) = \Delta_H(z^{-1})Pf$ und somit

$$\Delta_G(z^{-1}) \int_G f = \int_G R_z f = \int P(R_z f)\,d\mu = \Delta_H(z^{-1}) \int_G f\,,$$

so dass $\Delta_G|_H = \Delta_H$.
Umgekehrt gelte $\Delta_G|_H = \Delta_H$. Dann gilt

$$Pf(gH) = \int_H f(xh^{-1})\Delta_H(h^{-1})\,dh = \int_H f(xh^{-1})\Delta_G(h^{-1})\,dh\,.$$

Sei $Pf = 0$. Es gibt nach Lemma 1.6.8 ein $\varphi \in C_c(G)$ mit $P\varphi = 1$ auf $q(\operatorname{supp} f)$. Daher folgt

$$\begin{aligned}\int_G f = \int (P\varphi \circ q) f &= \int_H \int_G \varphi(gh) f(g)\,dg\,dh \\ &= \int_H \int_G \varphi(g) f(gh^{-1})\Delta_G(h^{-1})\,dg\,dh = \int_G \varphi Pf = 0\,.\end{aligned}$$

Somit ist durch $Pf \mapsto \int_G f$ ein positives G-invariantes Funktional auf $C_c(G/H)$ wohldefiniert. (Positivität folgt aus Satz 1.6.9.) □

Korollar 1.6.11. Sei $N \subset G$ ein abgeschlossener Normalteiler. Dann gilt für die Modulfunktionen $\Delta_G|_N = \Delta_N$. Insbesondere ist $\ker \Delta_G$ eine unimodulare Untergruppe von G.

Beweis. Der Quotient G/N besitzt ein Haarmaß und dieses ist G-invariant, also folgt $\Delta_G|_N = \Delta_N$. Ist $N = \ker \Delta_G$, so folgt $\Delta_N = \Delta_G|N = 1$. □

2 Grundlagen der unitären Darstellungstheorie

2.1 Unitäre Darstellungen

Definition 2.1.1. Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum. Der Vektorraum $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ der linearen Endomorphismen von $\mathcal{H}$ sei mit der *starken Operatortheorie* versehen: Dies ist die lokal-konvexe Topologie, die von den Halbnormen $T \mapsto \|T\xi\|$ für alle $\xi \in \mathcal{H}$ erzeugt wird. Sei $U(\mathcal{H})$ die unitäre Gruppe von $\mathcal{H}$. Eine *unitäre G-Darstellung* auf $\mathcal{H}$ ist ein Paar $(\pi, \mathcal{H})$, wobei $\pi : G \to U(\mathcal{H})$ ein stetiger Homomorphismus ist.
Die *schwache Operatortopologie* wird von den Halbnormen $T \mapsto |(\xi|T\eta)|$ für alle $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ erzeugt. Auf $U(\mathcal{H})$ stimmt sie mit der starken Operatortopologie überein, denn sie ist auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ schwächer als die starke Operatortopologie und

$$\|(u-v)\xi\|^2 = 2\|\xi\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(u\xi|v\xi) = 2\,\mathrm{Re}(u\xi|(u-v)\xi) \leqslant 2|(u\xi|(u-v)\xi)|$$

für alle $u, v \in U(\mathcal{H})$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.
Sind $(\pi_j, \mathcal{H}_j)$, $j = 1, 2$, unitäre G-Darstellungen, so heißt ein stetiger linearer Operator $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ *G-äquivariant*, falls

$$T\pi_1(g) = \pi_2(g)T \quad \text{für alle} \quad g \in G \; .$$

Wir schreiben $C(\pi_1, \pi_2)$ oder $C(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ für den Vektorraum aller solcher Abbildungen. Die Darstellungen $(\pi_j, \mathcal{H}_j)$, $j = 1, 2$, heißen *unitär äquivalent*, falls $C(\pi_1, \pi_2)$ eine surjektive Isometrie enthält.
Sei $C(\pi) = C(\pi, \pi)$. Man nennt dies auch den *Kommutator* oder *Zentralisator* von π. Offenbar ist $C(\pi)$ eine Unteralgebra mit 1 von $\mathrm{End}(\mathcal{H})$, die in der schwachen Operatortopologie abgeschlossen ist. Weiter gilt für alle $T \in C(\pi)$

$$T^*\pi(g) = (\pi(g^{-1})T)^* = (T\pi(g^{-1}))^* = \pi(g)T^* \; ,$$

also ist T auch unter Adjungierten abgeschlossen. Eine solche Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ nennt man eine *von Neumann-Algebra*.

2.1.2. Sei X ein lokal-kompakter Hausdorffraum, versehen mit einer stetigen G-Wirkung. Sei μ ein Radonmaß, dass *stark quasiinvariant* ist. D.h., es gebe eine stetige Funktion $\phi : G \times X \to]0, \infty[$, so dass $d\mu(gx) = \phi(g, x)\, d\mu(x)$ für alle $g \in G$. Dann muss

$$\phi(gh, x) = \phi(g, hx)\phi(h, x) \quad \text{für alle} \quad g, h \in G \; , \; x \in X \tag{2.1}$$

gelten. Definiere für alle $g \in G$ einen unitären Operator $\pi_\mu(g) \in U(\mathbf{L}^2(\mu))$ durch

$$[\pi_\mu(g)f](x) = \phi(g, g^{-1}x)^{-1/2} f(g^{-1}x) \quad \text{für alle } \ g \in G\,,\ x \in X\,,\ f \in \mathbf{L}^2(\mu)\ .$$

Die Unitarität folgt aus

$$\begin{aligned}\int \phi(g, g^{-1}x)^{-1} |f(g^{-1}x)|^2 \, d\mu(x) &= \int \phi(g, x)^{-1} |f(x)|^2 \, d\mu(gx) \\ &= \int |f(x)|^2 \, d\mu(x)\ .\end{aligned}$$

Man hat $\pi_\mu(gh) = \pi_\mu(g)\pi_\mu(h)$ aus (2.1). Wie im Beweis von Satz 1.5.5 folgt die Stetigkeit von $\pi : G \to U(\mathbf{L}^2(\mu))$, so dass π eine unitäre Darstellung von G auf $\mathbf{L}^2(\mu)$ ist.
Betrachtet man als Spezialfall die Wirkung von G auf G durch Linkstranslationen, so erhält man eine unitäre Darstellung π_λ von G auf $\mathbf{L}^2(G)$, die man *linksreguläre Darstellung* nennt. (In diesem Fall ist dg sogar invariant.)
Betrachtet man die Wirkung $G \times G \to G : (g, x) \mapsto xg^{-1}$, so ist ϱ sogar invariant und man erhält eine unitäre Darstellung auf $\mathbf{L}^2(\varrho)$. Diese Darstellung ist vermöge $f \mapsto \Delta^{1/2} f$ unitär äquivalent zu der auf $\mathbf{L}^2(G)$ durch folgende Formel gegebenen Darstellung:

$$[\pi_\varrho(g)f](h) = \Delta(g)^{1/2} f(hg) \quad \text{für alle } \ g, h \in G\,,\ f \in \mathbf{L}^2(G)\ .$$

Dies bezeichnet man als *rechtsreguläre Darstellung*. Diese ist auch zur linksregulären Darstellung durch $f \mapsto \Delta^{1/2}\check{f}$ unitär äquivalent.

Definition 2.1.3. Sei $(\pi, \mathcal{H})$ eine unitäre G-Darstellung. Es bezeichne $\mathcal{H}'$ das stetige *lineare* Dual von $\mathcal{H}$. Auf $\mathcal{H}' \cong \overline{\mathcal{H}}$ definiert man die *kontragrediente* unitäre G-Darstellung $\overline{\pi}$ durch

$$(\overline{\pi}(g)\alpha)(\xi) = \alpha(\pi(g^{-1})\xi) \quad \text{für alle } \ \alpha \in \mathcal{H}'\,,\ \xi \in \mathcal{H}\,,\ g \in G\ .$$

Die kontragrediente Darstellung $(\overline{\pi}, \mathcal{H}')$ ist genau dann zu $(\pi, \mathcal{H})$ unitär äquivalent, wenn $(\pi, \mathcal{H})$ die Komplexifizierung einer orthogonalen Darstellung ist.
Ein abgeschlossener Untervektorraum $U \subset \mathcal{H}$ heiß *invarianter Unterraum*, falls $\pi(G)U \subset U$. Ist $U \neq 0$, so definiert man $\pi_U(g) = \pi(g)|_U$ und erhält so eine unitäre Darstellung, die man *Unterdarstellung* von $(\pi, \mathcal{H})$ nennt. Hat π einen nicht-trivialen invarianten Unterraum, so heißt $(\pi, \mathcal{H})$ *reduzibel*, andernfalls *irreduzibel*.
Sind $(\pi_i, \mathcal{H}_i)$, $i \in I$, unitäre Darstellungen, so heißt die direkte Hilbertraumsumme $\mathcal{H} = \hat{\bigoplus}_{i \in I} \mathcal{H}_i$, versehen mit den Operatoren $\pi(x) = \hat{\bigoplus}_{i \in I} \pi_i(x)$, die *direkte Summe* der $(\pi_i, \mathcal{H}_i)$.

Satz 2.1.4. Sei $(\pi, \mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung. Ist $U \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener invarianter Unterraum, so gilt dies auch für $U^\perp$. Somit gilt $\pi = \pi_U \oplus \pi_{U^\perp}$.

Beweis. Es gilt für alle $u \in U$, $v \in V$ und $g \in G$

$$(u|\pi(g)v) = (\pi(g^{-1})u|v) = 0 \;,$$

also $\pi(g)U^\perp \subset U^\perp$. □

Bemerkung 2.1.5. Die obige Aussage ist ohne die Voraussetzung der Unitarität offenbar in der Regel falsch. Sei etwa $\pi(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^2)$. Dies ist eine Darstellung von $(\mathbb{R}, +)$, aber $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{C} \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist der einzige nicht-triviale invariante Unterraum.

Definition 2.1.6. Sei $(\pi, \mathcal{H})$ eine unitäre Darstellung und $\xi \in \mathcal{H}$. Der abgeschlossene Aufspann U_ξ von $\pi(G)\xi$ heißt *zyklischer Unterraum* von ξ. Die Darstellung $(\pi, \mathcal{H})$ heißt *zyklisch*, falls $\mathcal{H} = U_\xi$ für ein ξ. In diesem Fall heißt ξ ein *zyklischer Vektor*.

Satz 2.1.7. Jede unitäre Darstellung ist die direkte Summe zyklischer Darstellungen.

Beweis. Man zeigt mit dem Zornschen Lemma die Existenz einer maximalen orthogonalen Familie $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ von zyklischen Unterräumen $U_\alpha \neq 0$.
Ist nun $\xi \in \mathcal{H}$, $\xi \perp U_\alpha$ für alle $\alpha \in A$, so folgt auch $U_\xi \perp U_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Dann aber ist $(U_\xi, U_\alpha)_{\alpha\in A}$ ebenso eine Familie. Aufgrund der Maximalität ist $U_\xi = 0$ oder $U_\xi = U_\alpha$ für ein $\alpha \in A$. Da letztere Alternative ausgeschlossen ist, folgt $\xi = 0$. Somit ist $\mathcal{H} = \hat{\bigoplus}_\alpha U_\alpha$, denn der von den U_α aufgespannte Unterraum ist in $\mathcal{H}$ dicht. □

Das folgende Theorem bezeichnet man als *Schur'sches Lemma.*

Theorem 2.1.8. Seien π, π_j, $j = 1, 2$, unitäre Darstellungen.

(i). Genau dann ist π irreduzibel, wenn $C(\pi) = \mathbb{C} \cdot 1$.

(ii). Seien π_j, $j = 1, 2$, irreduzibel. Es gilt $\dim C(\pi_1, \pi_2) \leqslant 1$ und diese Zahl ist genau dann > 0, wenn π_1 und π_2 unitär äquivalent sind.

Lemma 2.1.9. Sei $U \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum mit Orthogonalprojektion p. Genau dann ist U invariant, wenn $p \in C(\pi)$.

Beweis von Theorem 2.1.8. (i). Ist π reduzibel, so enthält $C(\pi)$ gemäß Lemma 2.1.9 nicht-triviale Projektionen. Umgekehrt sei $T \in C(\pi)$, $T \notin \mathbb{C} \cdot 1$. Dann ist T die Summe zweier selbstadjungierter Elemente von $C(\pi)$, die nicht beide in $\mathbb{C} \cdot 1$ liegen. O.B.d.A. ist T also selbstadjungiert. Jeder Operator $\pi(g)$, $g \in G$, kommutiert mit T, also auch mit jeder Spektralprojektion von T (Spektralsatz für s.a. Operatoren). Daher liegen diese in $C(\pi)$. Somit hat T nicht-triviale invariante Unterräume, wieder nach Lemma 2.1.9.

(ii). Sei $T \in C(\pi_1, \pi_2)$. Dann gilt $T^*T \in C(\pi_1)$ und $TT^* \in C(\pi_2)$, also gibt es nach (i) Konstanten $c_1, c_2 \geqslant 0$ mit $T^*T = c_1$ und $TT^* = c_2$. Da $\|T^*T\| = \|TT^*\|$, folgt $c := c_1 = c_2$. Somit ist $T = 0$, oder $c^{-1/2}T$ ist unitär. Ist also $C(\pi_1, \pi_2) \neq 0$, so ist jedes Element dieses Raums ein skalares Vielfaches eines unitären Operators. Insbesondere ist jedes G-äquivariante $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ entweder $= 0$ oder invertierbar.
Seien $T_1, T_2 \neq 0$ G-äquivariant. Dann ist $T_2^{-1}T_1 \in C(\pi)$, so dass $T_1 = cT_2$ für eine Konstante c. □

Korollar 2.1.10. Sei G abelsch. Jede irreduzible unitäre Darstellung von G ist 1-dimensional.

Beweis. Es gilt $\pi(G) \subset C(\pi) = \mathbb{C} \cdot 1$. Da $\mathbb{C} \cdot 1$ jeden Unterraum von $\mathcal{H}$ invariant lässt, folgt die Behauptung. □

Man betrachtet irreduzible unitäre Darstellungen als die Grundbausteine der harmonischen Analyse. In der Tat werden am Ende dieses Abschnitts zeigen, dass sie die Punkte von G trennen: Es gibt also viele irreduzible unitäre Darstellungen.
Klassisch sind dann folgende Grundprobleme gegeben:

(i). Die Bestimmung aller irreduziblen unitären Darstellungen von G, bis auf Äquivalenz.

(ii). Eine allgemeine Konstruktion, mit Hilfe derer man beliebige unitäre Darstellungen aus irreduziblen zurück erhält.

(iii). Die explizite Rekonstruktion spezifischer Darstellungen.

Die Behandlung von Problem (i) hängt stark von der zu betrachtenden Klasse von Gruppen ab. Die Technik der induzierten Darstellungen (‘Mackey-Maschine’) reicht für manche Gruppen aus (z.B. zusammenhängende und einfach zusammenhängende nilpotente Liegruppen).
Für kompakte Gruppen reichen für (ii) direkte Hilbertsummen aus. Im allgemeinen kann dies nicht der Fall sein, wie das Beispiel der regulären Darstellung von $\mathbb{R}$ zeigt. In diesem Fall liefert die Fouriertransformation eine Zerlegung als *direktes Integral* von Charakteren. Diese Theorie werden wir auf abelsche lokalkompakte Gruppen verallgemeinern. Sie lässt sich auf allgemeinere Gruppen ausdehnen, wobei nur sogenannte Typ I-Darstellungen eindeutige Zerlegungen besitzen. Es gibt Gruppen (z.B. die Mautner-Gruppe, die eine fünfdimensionale zusammenhängende Liegruppe ist), deren linksreguläre Darstellung nicht vom Typ I ist. Für diese Gruppen ist der Zugang über irreduzible Darstellungen nicht so nützlich. Wir werden diese Theorie aus Zeitgründen in dieser Vorlesung nicht studieren.

Problem (iii) untersucht man meist für die linksreguläre Darstellung. Wir werden dieses Problem für abelsche und kompakte Gruppen behandeln.

2.2 Darstellungen von G und $\mathbf{L}^1(G)$

2.2.1. Sei $(\pi, \mathcal{H})$ eine unitäre G-Darstellung und $f \in \mathbf{L}^1(G)$. Analog zu Satz 1.5.6 definiert das vektorwertige Integral

$$\pi(f) = \int f(x)\pi(x)\,dx \quad \text{in} \quad \mathcal{L}(\mathcal{H}) \;, \tag{2.2}$$

wobei $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit der starken Operatortopologie versehen sei, einen beschränkten Operator auf $\mathcal{H}$ mit $\|\pi(f)\| \leqslant \|f\|_1$. Es gilt insbesondere

$$(u|\pi(f)v) = \int f(x)(u|\pi(x)v)\,dx \quad \text{für alle } \; u, v \in \mathcal{H} \;. \tag{2.3}$$

Definition 2.2.2. Sei A eine involutive Banachalgebra. Eine $*$*-Darstellung* von A ist ein stetiger Homomorphismus von involutiven Algebren $\pi : A \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, wobei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum sei. Eine $*$-Darstellung π heißt *nicht-ausgeartet*, falls $\pi(A)v = 0$ impliziert, dass $v = 0$.

Theorem 2.2.3. Sei $(\pi, \mathcal{H})$ eine unitäre G-Darstellung. Dann definiert $f \mapsto \pi(f)$ eine nicht-ausgeartete $*$-Darstellung von $\mathbf{L}^1(G)$, die *integrierte Darstellung* von π. Es gilt

$$\pi(x)\pi(f) = \pi(L_x f) \quad \text{und} \quad \pi(f)\pi(x) = \Delta(x^{-1})\pi(R_{x^{-1}}f) \;.$$

Beweis. Es ist klar, dass π linear ist, und wir haben damit auch schon gezeigt, dass π stetig ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\pi(f)\pi(g) &= \iint f(x)g(y)\pi(xy)\,dxdy \\
&= \iint f(xy{-}1)g(y)\,dy\,\pi(x)\,dx = \pi(f * g) \;, \\
\pi(f^*) &= \int \overline{f(x^-1)}\Delta(x^{-1})\pi(x)\,dx = \int (f(x)\pi(x))^*\,dx \;, \\
\pi(x)\pi(f) &= \int f(y)\pi(xy)\,dy = \int f(x^{-1}y)\pi(y)\,dy = \pi(L_x f) \;, \\
\pi(f)\pi(x) &= \int f(y)\pi(yx)\,dy \\
&= \Delta(x^{-1})\int f(yx^{-1})\pi(y)\,dy = \Delta(x^{-1})\pi(R_{x^{-1}}f) \;.
\end{aligned}$$

Daher ist $f \mapsto \pi(f)$ eine $*$-Darstellung von $\mathbf{L}^1(G)$ und die zwei Gleichungen gelten.

Sei $u \in \mathcal{H} \setminus 0$, V eine kompakte 1-Umgebung mit $\sup_{x\in V} \|\pi(x)u - u\| < \|u\|$. Sei $f = \mathrm{vol}(V)^{-1} 1_V \in \mathbf{L}^1(G)$. Dann gilt

$$\|\pi(f)u - u\| \leqslant \mathrm{vol}(V)^{-1} \int \|\pi(x)u - u\|\, dx < \|u\|$$

nach der Hölderungleichung. Es folgt $\|\pi(f)u\| \geqslant \|u\| - \|\pi(f)u - u\| > 0$. □

Theorem 2.2.4. Sei π eine nicht-ausgeartete $*$-Darstellung von $\mathbf{L}^1(G)$ auf $\mathcal{H}$. Dann ist π die integrierte Darstellung einer eindeutig bestimmten unitären G-Darstellung auf $\mathcal{H}$.

Beweis. Sei $(\psi_U)_{U\in\mathcal{U}}$ eine Fasteins. Ist $f \in \mathbf{L}^1(G)$, so gilt $(L_x\psi_U) * f \to L_x f$ in $\mathbf{L}^1(G)$ und $\pi(L_x\psi_U)\pi(f) \to \pi(L_x f)$ in der Normtopologie.
Sei D der lineare Aufspann der $\pi(f)u$ mit $f \in \mathbf{L}^1(G)$ und $u \in \mathcal{H}$. Ist $u \perp D$, so gilt für alle $f \in \mathbf{L}^1(G)$ und $v \in \mathcal{H}$:

$$0 = (u|\pi(f^*)v) = (\pi(f)u|v)\ , \quad \text{also} \quad \pi(\mathbf{L}^1(G))u = 0\ .$$

Da π nicht-ausgeartet ist, ist $u = 0$ und D somit *dicht*.
Sei $x \in G$. Definiere $\varrho(x)v = \lim_{U\in\mathcal{U}} \pi(L_x\psi_U)v$ für alle $v \in D$. Ist nämlich ein $v = \pi(f)u$ gegeben, so existiert der Grenzwert nach obiger Vorüberlegung; der allgemeine Fall folgt durch die Grenzwertsätze. Damit ist $\varrho(x) \in \mathrm{End}(D)$. Da weiterhin $\|\pi(L_x\psi_U)\| \leqslant \|L_x\psi_U\|_1 = 1$, ist $\varrho(x)$ beschränkt und setzt sich in eindeutiger Weise auf $\mathcal{H}$ fort. Es gilt $\|\varrho(x)\| \leqslant 1$ und $\varrho(x)\pi(f) = \pi(L_x f)$.
Insbesondere gilt $\varrho(x)\varrho(y)\pi(f) = \varrho(x)\pi(L_y f) = \pi(L_{xy} f) = \varrho(xy)\pi(f)$. Da D dicht ist, folgt $\varrho(x)\varrho(y) = \varrho(xy)$. Analog gilt

$$\begin{aligned}(\pi(f)u|\varrho(x)^*\pi(g)v) &= (\pi(L_x f)u|\pi(g)v) = (u|\pi((L_x f)^* * g)v) \\ &= (\pi(f)u|\pi(L_{x^{-1}}g)v) = (\pi(f)u|\varrho(x^{-1})\pi(g)v)\ ,\end{aligned}$$

da $\delta_x^* = \delta_{x^{-1}}$ und folglich

$$(L_x f)^* * g = (\delta_x * f)^* * g = f^* * \delta_{x^{-1}} * g = f^* * (L_x g)\ . \tag{2.4}$$

Somit gilt $\varrho(x)^* = \varrho(x^{-1})$. Da $\varrho(1) = 1$, ist $\varrho(x)$ unitär.
Man sieht leicht, dass $x \mapsto \varrho(x) : G \to \mathrm{End}(D)$ in der starken Operatortopologie stetig ist. Da $\varrho(G)$ beschränkt ist, folgt, dass ϱ stetig und somit eine unitäre Darstellung von G ist.
Sei nun $f \in \mathbf{L}^1(G)$. Für alle $g \in \mathbf{L}^1(G)$ gilt

$$\varrho(f)\pi(g) = \int f(x)\varrho(x)\pi(g)\, dx = \int f(x)\pi(L_x g)\, dx = \pi(f*g) = \pi(f)\pi(g)\ .$$

Da D dicht ist, folgt $\varrho(f) = \pi(f)$.

Sei nun σ eine weitere unitäre G-Darstellung auf $\mathcal{H}$, so dass $\sigma(f) = \pi(f)$ für alle $f \in \mathbf{L}^1(G)$. Qua Definition (2.3) gilt

$$\int f(x)(u|\varrho(x)v)\,dx = \int f(x)(u|\sigma(x)v)\,dx \quad \text{für alle } f \in \mathbf{L}^1(G)\,,\, u,v \in \mathcal{H}\ .$$

Es folgt $\varrho(x) = \sigma(x)$ für alle $x \in G$. □

2.2.5. Ist G diskret, so ist $\pi(\mathbf{L}^1(G))$ der lineare Aufspann von $\pi(G)$. Im allgemeinen sind diese beiden Teilmengen von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf den ersten Blick sehr verschieden. Dieser erste Eindruck täuscht.

Theorem 2.2.6. Sei π eine unitäre G-Darstellung.

(i). Die Menge $\pi(\mathbf{L}^1(G))$ und der Aufspann von $\pi(G)$ haben den gleichen Abschluss in der schwachen bzw. starken Operatortopologie. Insbesondere erzeugen sie die gleichen von Neumann-Algebren.

(ii). Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Genau dann gilt $T \in C(\pi)$, wenn $T\pi(f) = \pi(f)T$ für alle $f \in \mathbf{L}^1(G)$ gilt.

(iii). Sei $U \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum. Genau dann ist U G-invariant, wenn $\pi(\mathbf{L}^1(G))U \subset U$.

Beweis. (i). Es reicht, die Gleichheit der Abschlüsse in der starken Operatortopologie zu zeigen, da die schwache Operatortopologie schwächer ist. Zunächst sieht man, dass $\pi(x)$ der starke Limes von $\pi(L_x\psi_U)$ für eine Fasteins ψ_U ist. Damit ist $\pi(G)$ im starken Abschluss von $\pi(\mathbf{L}^1(G))$ enthälten.
Sei umgekehrt $g \in C_c(G)$. Da $x \mapsto g(x)\pi(x)$ gleichmäßig stetig ist, gibt es für alle $\varepsilon > 0$ und alle $u_1,\dots,u_n$ eine endliche disjunkte Überdeckung $\mathcal{U} = (U_\ell)$ von $\operatorname{supp} g$ mit relativ kompakten lokal abgeschlossenen Teilmengen, so dass

$$\|g(x)\pi(x)u_k - g(y)\pi(y)u_k\| \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } x,y \in U_\ell \in \mathcal{U}\,,\, \ell = 1,\dots,n\ .$$

Dann folgt für beliebige Wahlen $x_j \in U_j$ und $\Sigma_{\mathcal{U}} = \sum_\ell g(x_j)\pi(x_j)\operatorname{vol}(U_j)$

$$\begin{aligned}\|\Sigma_{\mathcal{U}}u_k - \pi(g)u_k\| &\leqslant \textstyle\sum_\ell \displaystyle\int_{U_\ell} \|g(x_\ell)\pi(x_\ell)u_k - g(x)\pi(x)u_k\|\,dx\\ &\leqslant \varepsilon \cdot \operatorname{vol}(\operatorname{supp} g)\ .\end{aligned}$$

Damit enthält jede Umgebung von $\pi(g)$ in der starken Operatortopologie 'Riemann-Summen' $\Sigma_{\mathcal{U}} \in \langle\pi(G)\rangle$. Es ist aber klar, dass $\pi(C_c(G))$ in $\pi(\mathbf{L}^1(G))$ dicht liegt, also folgt die Behauptung.
(ii). Dies folgt sofort aus (i).
(iii). Folgt aus (ii) oder analog zu Theorem 1.5.11. □

2.3 Funktionen positiven Typs

Definition 2.3.1. Sei $\phi \in \mathbf{L}^\infty(G)$. Dabei sei $\mathbf{L}^\infty(G)$ die Menge aller Klassen bzgl. lokal f.ü. Gleichheit lokal wesentlich beschränkter messbarer Funktionen $G \to \mathbb{C}$. Dann heißt ϕ *positiven Typs*, falls

$$\int (f^* * f)\phi \geqslant 0 \quad \text{für alle} \;\; f \in \mathbf{L}^1(G)\ .$$

Äquivalent ist die Bedingung

$$\iint f(x)\overline{f(y)}\phi(y^{-1}x)\, dy dx \geqslant 0 \quad \text{für alle} \;\; f \in \mathbf{L}^1(G)\ . \tag{2.5}$$

Es sei $\mathcal{P} = \mathcal{P}(G)$ die Menge der Funktionen positiven Typs. Offenbar ist dies ein schwach abgeschlossener konvexer Kegel in $\mathbf{L}^\infty(G)$. Wir werden später sehen, dass jedes $\phi \in \mathbf{L}^\infty(G)$ durch eine stetige Funktion dargestellt wird.
Aus (2.5) folgt, dass $\phi \in \mathcal{P}$ impliziert, dass $\bar{\phi} \in \mathcal{P}$. Wir werden nun zeigen, dass es eine Bijektion zwischen $\mathcal{P} \setminus 0$ und den Äquivalenzklassen zyklischer unitärer Darstellungen von G gibt.

Satz 2.3.2. Sei $(\pi, \mathcal{H})$ eine unitäre G-Darstellung und $u \in \mathcal{H}$. Dann definiert $\phi(x) = (u|\pi(x)u)$ eine Funktion $\phi \in \mathcal{P}$.

Beweis. Die Funktion ϕ ist stetig und es gilt

$$\int (f^* * f)(x)(u|\pi(x)u)\, dx = (u|\pi(f^* * f)u) = \|\pi(f)u\|^2 \geqslant 0\ .$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Korollar 2.3.3. Sei $f \in \mathbf{L}^2(G)$ und $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Dann gilt $f * \tilde{f} \in \mathcal{P}$.

Beweis. In der linksregulären Darstellung $\pi = \pi_\lambda$ gilt

$$(f|\pi(x)f) = \int \overline{f(y)} f(x^{-1}y)\, dy = \int \overline{f(y)\tilde{f}(y^{-1}x)}\, dy = \overline{(f * \tilde{f})(x)}\ .$$

Dies zeigt die Behauptung. □

2.3.4. Sei nun $\phi \in \mathcal{P} \setminus 0$. Wir definieren nun eine Darstellung, so dass ϕ wie in Satz 2.3.2 als Koeffizientenfunktion dargestellt wird. Zunächst wird durch

$$(f|g)_\phi = \int (f^* * g)\phi = \iint \overline{f(x)} g(y)\phi(x^{-1}y)\, dx dy$$

eine positive semidefinite Hermitesche Form auf $\mathbf{L}^1(G)$ definiert, für die nach der Hölderungleichung gilt

$$\left|(f|g)_\phi\right| \leqslant \|\phi\|_\infty \|f\|_1 \|g\|_1\ . \tag{2.6}$$

Sei $\mathcal{N} = \{f \in \mathbf{L}^1(G) | (f|f)_\phi = 0\}$. Nach der Cauchy–Schwarz-Ungleichung

$$\big|(f|g)_\phi\big| \leqslant (f|f)_\phi (g|g)_\phi$$

gilt $f \in \mathcal{N}$ genau dann, wenn $(f|g)_\phi = 0$ für alle $g \in \mathbf{L}^1(G)$. Damit induziert $(\cdot|\cdot)_\phi$ ein Skalarprodukt auf $\mathbf{L}^1(G)/\mathcal{N}$. Sei $\mathcal{H}_\phi$ die Vervollständigung dieses Prähilbertraums. Das Skalarprodukt von $\mathcal{H}_\phi$ wird auch mit $(\cdot|\cdot)_\phi$ bezeichnet und die induzierte Norm mit $\|\cdot\|_\phi$. Die kanonische Abbildung $\mathbf{L}^1(G) \to \mathcal{H}_\phi$ erfüllt nach (2.6) die Ungleichung

$$\|\tilde{f}\|_\phi \leqslant \|\phi\|_\infty^{1/2} \|f\|_1 \ . \tag{2.7}$$

Es gilt für alle $x \in G$, $f, g \in \mathbf{L}^1(G)$, nach (2.4)

$$(L_x f \mid g)_\phi = \int ((L_x f)^* * g)\phi = \int (f^* * L_{x^{-1}} g)\phi = (f \mid L_{x^{-1}} g)_\phi \ .$$

Damit ist $L_x(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$ und durch

$$\pi_\phi(x)\tilde{f} = (L_x f)^\sim \quad \text{für alle } \ f \in \mathbf{L}^1(G)\,,\, x \in G \tag{2.8}$$

ist ein unitärer Operator $\pi_\phi(x) \in U(\mathcal{H}_\phi)$ wohldefiniert. Nach Gleichung (2.7) und Satz 1.5.5 ist $x \mapsto \pi_\phi(x) : G \to U(\mathcal{H}_\phi)$ stetig in der starken Operatortopologie. Offenbar ist so eine unitäre G-Darstellung $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi)$ definiert.

Definition 2.3.5. Die Darstellung $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi)$ heißt *GNS-Darstellung* von ϕ (nach Gelfand, Naimark und Segal). Man spricht von der *GNS-Konstruktion*.

Theorem 2.3.6. Sei $\phi \in \mathcal{P} \setminus 0$. Es gibt genau einen zyklischer Vektor $\xi_\phi \in \mathcal{H}_\phi$ mit $\pi_\phi(f)\xi_\phi = \tilde{f}$ für alle $f \in \mathbf{L}^1(G)$. Es gilt $\phi(x) = (\xi_\phi|\pi_\phi(x)\xi_\phi)$ für lokal fast alle $x \in G$.

Beweis. Sei (ψ_U) eine Fasteins. Für $f \in \mathbf{L}^1(G)$ gilt $\psi_U^* * f = (f^* * \psi_U)^* \to f$, also

$$(\tilde{\psi}_U|\tilde{f})_\phi = \int (\psi_U^* * f)\phi \to \int f\phi$$

und da $\|\psi_U\|_1 = 1$, gilt $\|\tilde{\psi}_U\|_\phi \leqslant \|\phi\|_\infty^{1/2}$. Da das Bild von $\mathbf{L}^1(G)$ in $\mathcal{H}_\phi$ dicht ist, folgt, dass $(\tilde{\psi}_U)$ in $\mathcal{H}_\phi$ schwach gegen ein ξ_ϕ mit $(\xi_\phi|\tilde{f}) = \int f\phi$ konvergiert. Insbesondere gilt mit (2.8)

$$\begin{aligned}(\pi_\phi(f)\xi_\phi|\tilde{g})_\phi = (\xi_\phi|\pi_\phi(f^*)\tilde{g})_\phi &= \int f^*(x)(\xi_\phi|\pi_\phi(x)\tilde{g})\,dx \\ &= \iint f^*(x)g(x^{-1}y)\phi(y)\,dy dx = \int (f^* * g)\phi = (\tilde{f}|\tilde{g})_\phi \ .\end{aligned}$$

Damit ist $\pi_\phi(f)\xi_\phi = \tilde{f}$. Insbesondere gilt für alle $f \in \mathbf{L}^1(G)$

$$\int f(x)(\xi_\phi|\pi_\phi(x)\xi_\phi)\,dx = (\xi_\phi \mid \pi_\phi(f)\xi_\phi)_\phi = (\xi_\phi|\tilde{f})_\phi = \int f\phi \,.$$

Somit folgt für lokal fast alle $x \in X$, dass $\phi(x) = (\xi_\phi|\pi_\phi(x)\xi_\phi)$.
Sei nun $\eta \in \mathcal{H}_\phi$ mit $\eta \perp U_{\xi_\phi}$. Dann folgt $0 = (\eta|\pi_\phi(f)\xi_\phi)_\phi = (\eta|\tilde{f})_\phi$. Da das Bild von $\mathbf{L}^1(G)$ dicht liegt, ist $\eta = 0$. Es folgt, dass ξ_ϕ ein zyklischer Vektor ist.
Sei η ein weiterer Vektor mit $\pi_\phi(f)\eta = \tilde{f}$ für alle $g \in \mathbf{L}^1(G)$. Dann folgt

$$\eta \leftarrow \pi_\phi(\psi_U)\eta = \tilde{\psi}_U = \pi_\phi(\psi_U)\xi_\phi \to \xi_\phi \,,$$

also $\eta = \xi_\phi$. □

Korollar 2.3.7. Jedes $\phi \in \mathcal{P}$ ist lokal fast überall gleich einer beschränkten stetigen Funktion. Im folgenden betrachten wir $\mathcal{P} \subset C_b(G)$.

Korollar 2.3.8. Sei $\phi \in \mathcal{P}$. Dann gilt $\|\phi\|_\infty = \phi(1)$ und $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$.

Beweis. Es gibt eine unitäre G-Darstellung $(\pi, \mathcal{H})$ und einen Vektor $u \in \mathcal{H}$ mit $\phi = (u|\pi u)$. Insbesondere gilt

$$|\phi(x)| = |(u|\pi(x)u)| \leqslant \|u\|^2 = \phi(1)$$

und

$$\phi(x^{-1}) = (u|\pi(x^{-1})u) = (\pi(x)u|u) = \overline{(u|\pi(x)u)} = \overline{\phi(x)} \,.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Satz 2.3.9. Seien $(\pi_j, \mathcal{H}_j)$ unitäre G-Darstellungen mit zyklischen Vektoren u_j, $j = 1, 2$. Falls $(u_1|\pi_1 u_1) = (u_2|\pi_2 u_2)$, so existiert ein unitäres $T \in C(\pi_1, \pi_2)$ mit $Tu_1 = u_2$.

Beweis. Für alle $x, y \in G$ gilt

$$\begin{aligned}(\pi_1(x)u_1|\pi_1(y)u_1) &= (u_1|\pi_1(x^{-1}y)u_2)\\ &= (u_2|\pi_2(x^{-1}y)u_2) = (\pi_2(x)u_2|\pi_2(y)u_2) \,.\end{aligned}$$

Ist $\sum_j \alpha_j \pi_1(x_j)u_1 = 0$, so folgt $\sum_j \alpha_j \pi_2(x_j)u_2 \perp \pi_2(G)u_2$. Da u_2 zyklisch ist, ist also $\sum_j \alpha_j \pi_2(x_j)u_2 = 0$.
Durch die Vorschrift $T(\pi_1(x)u_1) = \pi_2(x)u_2$ für alle $x \in G$ ist also ein linearer Operator $\langle \pi_1(G)u_1 \rangle \to \mathcal{H}_2$ wohldefiniert und man sieht sofort, dass er eine G-äquivariante Isometrie ist. Somit setzt sich T zu einer Isometrie in $C(\pi_1, \pi_2)$ fort. Da das Bild von T den Vektor u_2 enthält, ist T unitär. □

Korollar 2.3.10. Jede unitäre G-Darstellung π mit zyklischem Vektor u ist unitär äquivalent zu π_ϕ, wobei $\phi = (u|\pi u)$.

Definition 2.3.11. Seien beschränkte konvexe Teilmengen von $\mathcal{P}$ definiert durch

$$\mathcal{P}_0 = \{\phi | \|\phi\|_\infty = 1\} = \{\phi|\phi(1) = 1\}\ ,\ \mathcal{P}_1 = \{\phi | \|\phi\|_\infty \leqslant 1\} = \{\phi|\phi(1) \leqslant 1\}\ .$$

Wir bezeichnen die durch $\sigma(\mathbf{L}^\infty, \mathbf{L}^1)$ induzierte Topologie als *schwach*-Topologie*. Offenbar ist $\mathcal{P}_1$ schwach*-abgeschlossen, also schwach*-kompakt nach dem Satz von Banach–Alaoğlu. Nach dem Satz von Krein–Milman ist $\mathcal{P}_1$ die abgeschlossene konvexe Hülle seiner Extrempunkte.
Die Menge $\mathcal{P}_0$ ist in der Regel nicht schwach*-kompakt (es sei denn, G ist diskret). Dennoch betrachten wir beide Mengen von *Extrempunkten*

$$\mathcal{E}_j = \{\phi \in \overline{\mathcal{P}}_j | \forall \phi_1, \phi_2 \in \overline{\mathcal{P}}_j, 0 < t < 1 \colon \phi = t\phi_1 + (1 - t\phi_2) \Rightarrow \phi_1 = \phi_2 = \phi\}\ ,$$

deren darstellungstheoretische Bedeutung in folgendem Satz geklärt wird.

Theorem 2.3.12. Sei $\phi \in \mathcal{P}_1$. Genau dann ist $\phi \in \mathcal{E}_1$, wenn π_ϕ irreduzibel ist.

Beweis. Sei π_ϕ reduzibel, also $\mathcal{H}_\phi = U \oplus U^\perp$ für einen nicht trivialen invarianten Unterraum U. Da ξ_ϕ zyklisch ist, gilt $\xi_\phi \notin U \cup U^\perp$. Es gibt also Vektoren $u_1 \in U$, $u_2 \in U^\perp$, $u_j \neq 0$, mit $\xi_\phi = u_1 + u_2$. Seien $v_j = \|u_j\|^{-1} u_j$ und $\phi_j = (v_j|\pi_\phi v_j)$. Da $\pi_\phi(G) u_j \perp u_i$ für $i \neq j$, folgt

$$\phi = (\xi_\phi|\pi_\phi\xi_\phi) = (u_1|\pi_\phi u_1) + (u_2|\pi_\phi u_2) = \|u_1\|^2\phi_1 + \|u_2\|^2\phi_2\ ,$$

so dass $\phi \notin \mathcal{E}_1$.
Andererseits nehme man an, dass π_ϕ irreduzibel sei und $\phi - \psi \in \mathcal{P}$ für ein $\psi \in \mathcal{P}$. Für alle $f, g \in \mathbf{L}^1(G)$ gilt dann

$$\|f\|_\psi^2 \leqslant \|f\|_\psi^2 + \|f\|_{\phi-\psi}^2 = \|f\|_\phi^2$$

und folglich

$$|(f|g)_\psi| \leqslant \|f\|_\psi \|g\|_\psi \leqslant \|f\|_\phi \|g\|_\phi\ .$$

Somit existiert ein positiv semidefiniter selbstadjungierter Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\phi)$ mit $(\tilde{f}|T\tilde{g})_\phi = (f|g)_\psi$ für alle $f, g \in \mathbf{L}^1(G)$. Für alle $x \in G$ folgt

$$(\tilde{f}|\pi_\phi(x^{-1})T\pi_\phi(x)\tilde{g})_\phi = (L_x f|L_x g)_\psi = (f|g)_\psi = (\tilde{f}|T\tilde{g})_\phi\ ,$$

d.h. $T \in C(\pi)$ und nach dem Schur'schen Lemma existiert ein $c \geqslant 0$ mit $T = c$. Es folgt $\psi = c\phi$, $\phi - \psi = (1 - c)\phi$. Daher ist $\phi \in \mathcal{E}_1$. □

Lemma 2.3.13. Es gilt $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 \cup 0$.

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{P}$ mit $-\phi \in \mathcal{P}$. Dann gilt $0 \geqslant -\phi(1) \geqslant 0$, also $\phi(1) = 0$ und $\phi = 0$. Damit ist $0 \in \mathcal{E}_0$.

Sind andererseits $\phi, \psi \in \mathcal{P}$ mit $\phi(1) + \psi(1) = 1$, so gilt $\phi(1) = \psi(1) = 1$. Es folgt $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_0$.
Schließlich sei $\phi \in \mathcal{P}_0 \setminus (\mathcal{P}_1 \cup 0)$. Dann gilt $0 < t = \phi(1) < 1$ und mit $\psi = \phi(1)^{-1}\phi$ folgt $t\phi = \psi$. Dann ist ψ kein Extrempunkt. □

Der folgende Satz ist etwas überraschend, da $\mathcal{P}_1$ im allgemeinen nicht schwach* kompakt ist.

Theorem 2.3.14. Die konvexe Hülle von $\mathcal{E}_1$ ist schwach* dicht in $\mathcal{P}_1$.

Beweis. Sei $\phi \in \mathcal{E}_1$. Da $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{E}_0) = \mathcal{P}_0$, gibt es nach Lemma 2.3.13 $\phi_\alpha = \sum_j c_{j\alpha}\psi_{j\alpha}$, $\psi_{j\alpha} \in \mathcal{E}_1$, $c_{j\alpha} \geqslant 0$, $0 < \phi_\alpha(1) = \sum_j c_j \leqslant 1$, mit $\phi = \lim_\alpha \phi_\alpha$ in der schwach*-Topologie.
Es gilt $1 = \lim_\alpha \phi_\alpha(1)$, da $\{f \in \mathbf{L}^\infty(G) \,|\, \|f\|_\infty > a\}$ für alle $a < 1$ schwach*-offen ist. Es folgt $\phi = \lim_\alpha \phi_\alpha(1)^{-1}\phi_\alpha$ (schwach*) und da

$$\phi_\alpha(1)^{-1} \sum_j c_{j\alpha} = 1 \ ,$$

gilt $\phi_\alpha(1)^{-1}\phi_\alpha \in \mathrm{co}(\mathcal{E}_1)$. □

2.3.15. Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass die irreduziblen unitären G-Darstellungen die Punkte von G trennen. Nach dem Obigen reicht es, die Punkte mit Elementen von $\mathcal{E}_1$ zu trennen und Theorem 2.3.14 legt nahe, dass es reicht, mit Elementen von $\mathcal{P}_1$ zu trennen. Um nun Punktetrennung zu beweisen, muss man Funktionen aus $C_c(G)$ mit Funktionen aus $\mathcal{P}$ approximieren. Die letzte technische Hürde besteht nun darin, die schwach*-Topologie auf $\mathcal{P}_1$ besser zu verstehen.
Dazu sei E ein Banachraum. Die *Topologie der kompakten Konvergenz* auf E^* ist durch die Halbnormen

$$\mu \mapsto \sup|\mu(K)| \quad \text{für alle} \ \ K \subset E \text{ kompakt}$$

definiert. Analog ist die *Topologie der kompakten Konvergenz auf G* auf $C_b(G)$ definiert durch die Halbnormen

$$f \mapsto \sup|f(K)| \quad \text{für alle} \ \ K \subset G \text{ kompakt.}$$

Lemma 2.3.16. Sei E^* ein dualer Banachraum. Die Topologie der kompakten Konvergenz und die schwach*-Topologie stimmen auf $\|\cdot\|_{E^*}$-beschränkten Mengen überein.

Beweis. Sicher ist die Topologie der kompakten Konvergenz stärker.
Sei umgekehrt $0 \neq B \subset E^*$, $C = \sup\|B\|_{E^*} < \infty$. Seien $\mu \in B$, $\varepsilon > 0$, $K \subset E$ kompakt und $\delta = \frac{\varepsilon}{3C}$. Es gibt $e_1, \ldots, e_n \in K$ mit $K \subset \bigcup_{j=1}^n B_\delta(e_j)$. Sei $\nu \in B$ mit

$|\mu(e_j) - \nu(e_j)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Dann folgt für alle $e \in K$

$$|\mu(e) - \nu(e)| \leqslant |\mu(e - e_j)| + |\mu(e_j) - \nu(e_j)| + |\nu(e_j - e)| < \frac{\varepsilon}{3} + 2C\delta = \varepsilon\ .$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Lemma 2.3.17. Seien $\phi \in \mathcal{P}$ und $f \in \mathbf{L}^1(G)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem Kompaktum $K \subset G$ existiert eine schwach*-Umgebung $\Psi \subset \mathcal{P}$ von ϕ, so dass

$$\sup_{x \in K, \psi \in \Psi} |(f * \phi)(x) - (f * \psi)(x)| \leqslant \varepsilon\ .$$

Beweis. Es gilt $f * \phi(x) = \int f(xy)\phi(y^{-1})\, dy = \int (L_{x^{-1}} f)\overline{\phi}$ nach Korollar 2.3.8. Weiter ist $L_{K^{-1}} f \subset \mathbf{L}^1(G)$ kompakt. Es gibt also eine Umgebung in der Topologie der kompakten Konvergenz mit der gewünschten Eigenschaften. Die Behauptung folgt aus Lemma 2.3.16. □

Lemma 2.3.18. Sei $\phi \in \mathcal{P}_1$. Dann gilt $|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leqslant 2 - 2\operatorname{Re}\phi(xy^{-1})$.

Beweis. Sei $\phi = (u|\pi u)$. Dann gilt $\|u\|^2 = \phi(1) = 1$, $\phi(x^{-1}) = \overline{\phi(x)}$. Es folgt

$$\begin{aligned} |\phi(x) - \phi(y)|^2 &= |\phi(x^{-1}) - \phi(y^{-1})| \leqslant \|(\pi(x^{-1}) - \pi(y^{-1}))u\|^2 \\ &= 2 - 2\operatorname{Re}(\pi(x^{-1})u|\pi(y^{-1})u) = 2 - 2\operatorname{Re}\phi(xy^{-1})\ . \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Theorem 2.3.19. Auf $\mathcal{P}_1$ stimmen die schwach*-Topologie und die Topologie der kompakten Konvergenz auf G überein.

Bemerkung 2.3.20. Die Aussage ist für $\mathcal{P}_0$ im allgemeinen falsch! Es gilt etwa $\phi_\xi(x) = e^{ix\xi} \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ und diese Funktionen konvergieren schwach* gegen die Konstante $0 \in \mathcal{P}_0 \setminus \mathcal{P}_1$. Sie haben in der Topologie der kompakten Konvergenz auf $\mathbb{R}$ keinen Grenzwert.

Beweis von Theorem 2.3.19. Sei zunächst $f \in \mathbf{L}^1(G) \setminus 0$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein Kompaktum $K \subset G$ mit $\int_{G\setminus K} |f| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Seien $\phi, \psi \in \mathcal{P}_1$, $\sup|(\phi - \psi)(K)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\|f\|_1}$. Es gilt $\phi(1) + \psi(1) = 2$, also $|\phi - \psi| \leqslant 2$. Somit

$$\left| \int f(\phi - \psi) \right| \leqslant 2\int_{G\setminus K} |f| + \|f\|_1 \cdot \sup|(\phi - \psi)(K)| \leqslant \varepsilon\ .$$

Damit ist die kompakte Konvergenz auf $\mathcal{P}_1$ stärker.

Umgekehrt seien $\phi \in \mathcal{P}_1$, $\varepsilon > 0$ und $K \subset G$ kompakt. Gesucht ist eine schwach*-Umgebung Ψ von ϕ mit $\sup_{x \in K, \psi \in \Psi} |\phi(x) - \psi(x)| \leqslant \varepsilon$.

Zu $\delta > 0$ gibt eine kompakte 1-Umgebung mit $\sup_{x \in V} |\phi(x) - 1| < \delta$. Sei

$$\Psi_1 = \{\psi \in \mathcal{P}_1 \mid \left|\textstyle\int_V (\phi - \psi)\right| \leqslant \delta\} \quad \text{mit} \quad f = \operatorname{vol}(V)^{-1} 1_V\ .$$

Da $f \in \mathbf{L}^1(G)$, ist dies eine schwach*-Umgebung von ϕ in $\mathcal{P}_1$. Für alle $\psi \in \Psi$ gilt offenbar $|\int_V (\psi - 1)| \leqslant 2\delta \operatorname{vol}(V)$. Außerdem für alle $x \in G$

$$\begin{aligned} |f * \psi(x) - \psi(x)| &= \operatorname{vol}(V)^{-1} \left| \int_V (\psi(y^{-1}x - \psi(x))\, dy \right| \\ &\leqslant \operatorname{vol}(V)^{-1} \int_V (2 - 2\operatorname{Re}\phi(y))^{1/2}\, dy \\ &\leqslant \sqrt{2\operatorname{vol}(V)^{-1}} \left[\int_V (1 - \operatorname{Re}\phi(y))\, dy \right]^{1/2} \leqslant 2\sqrt{\delta} \end{aligned}$$

nach Lemma 2.3.18 und der Cauchy–Schwarz-Ungleichung.
Nach Lemma 2.3.17 existiert eine schwach*-Umgebung Ψ_2 von ϕ in $\mathcal{P}_1$, so dass $\sup_{x \in K, \psi \in \Psi_2} |f * (\phi - \psi)(x)| \leqslant \delta$. Sei nun $\Psi = \Psi_1 \cap \Psi_2$. Dann gilt

$$\sup_{x \in K, \psi \in \Psi} |\phi(x) - \psi(x)| \leqslant 4\sqrt{\delta} + \delta\ .$$

Für hinreichend kleines $\delta > 0$ folgt die Behauptung. □

Mit dem folgenden Dichtheitsresultat folgt unser Hauptsatz.

Satz 2.3.21. Es gilt $C_c(G) * C_c(G) \subset \langle C_c(G) \cap \mathcal{P} \rangle$ und letzterer Raum ist dicht in $C_c(G)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und in $\mathbf{L}^p(G)$ bzgl. $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Beweis. Sei $U = \langle C_c(G) \cap \mathcal{P} \rangle$. Nach Korollar 2.3.3 gilt dann $f * \tilde{f} \in U$ für alle $f \in C_c(G)$, wobei $\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Die Polarisierungsformel

$$f * \tilde{g} = \sum_{\varepsilon^4 = 1} (f + \varepsilon g) * (f + \varepsilon g)^{\sim}$$

zeigt $C_c(G) * C_c(G) \subset U$. Ist $(\psi_U)_{U \in \mathcal{U}}$ eine Fasteins in $C_c(G)$, so ist die Menge $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} C_c(G) * \psi_U$ dicht in $C_c(G)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und in $\mathbf{L}^p(G)$ bzgl. $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, nach Satz 1.5.9. □

Das folgende Theorem heißt *Satz von Gelfand–Raikov*.

Theorem 2.3.22. Seien $x, y \in G$, $x \neq y$. Es gibt eine irreduzible unitäre G-Darstellung π mit $\pi(x) \neq \pi(y)$.

Beweis. Es gibt ein $f \in C_c(G)$ mit $\varepsilon = |f(x) - f(y)| > 0$. Nach Satz 2.3.21 kann man o.B.d.A. annehmen, dass $f \in \langle C_c(G) \cap \mathcal{P} \rangle$. Da $\{x, y\}$ kompakt ist, gibt es nach Theorem 2.3.19 und Theorem 2.3.14 $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{E}_1$ und $c_j \in \mathbb{C}$, so dass für $g = \sum_j c_j \phi_j$ gilt $\sup_{z = x,y} |g(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann folgt $g(x) \neq g(y)$.
Es gibt also ein j, so dass für $\phi = \phi_j$ gilt $\phi(x) = \phi(y)$. Nach Theorem 2.3.12 ist $\pi = \pi_\phi$ irreduzibel. Nach Theorem 2.3.6 gilt mit $u = \xi_\phi$, dass $\phi = (u|\pi u)$. Es folgt $\pi(x) \neq \pi(y)$. □

3 Analysis auf lokal-kompakten Abelschen Gruppen

Im folgenden sei G stets eine lokal-kompakte Abelsche Gruppe.

3.1 Die duale Gruppe

Definition 3.1.1. Nach Korollar 2.1.10 ist jede irreduzible unitäre G-Darstellung eindimensional. Daher betrachten wir die Menge aller *Charaktere*

$$\widehat{G} = \{\xi : G \to \mathbb{T} \mid \xi \text{ stetig}, \xi(xy) = \xi(x)\xi(y) \ (\forall x, y \in G)\} .$$

Ist $\xi \in \widehat{G}$ und π die unitäre G-Darstellung auf $\mathbb{C}$, gegeben durch $\pi(x) = \xi(x)$, so gilt $\xi = (1|\pi 1)$. Nach Theorem 2.3.12 gilt $\widehat{G} = \mathcal{E}_1$. Dies versieht $\widehat{G}$ mit einer Topologie.

Wir schreiben

$$\langle x, \xi\rangle = \xi(x) \quad \text{für alle } \ x \in G\,, \, \xi \in \widehat{G} \,.$$

Offenbar ist $\widehat{G}$ eine Abelsche topologische Gruppe unter punktweisen Verknüpfungen (nach Theorem 2.3.19) und

$$\langle x, \xi^{-1}\rangle = \langle x^{-1}, \xi\rangle = \overline{\langle x, \xi\rangle} \,.$$

Man nennt $\widehat{G}$ die *duale Gruppe* von G.

Theorem 3.1.2. Die Teilmenge $\widehat{G} \cup 0$ von $\mathbf{L}^\infty(G) = \mathbf{L}^1(G)'$ ist genau die Menge aller stetigen Algebrahomomorphismen $\mathbf{L}^1(G) \to \mathbb{C}$. Insbesondere ist $\widehat{G} \cup 0$ kompakt und $\widehat{G}$ lokal kompakt.

Beweis. Zunächst hat man eine Einbettung $\widehat{G} \cup 0 = \mathcal{E}_1 \cup 0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathbf{L}^\infty(G)$. Als Funktional auf $\mathbf{L}^1(G)$ ist $\xi \in \widehat{G}$ gegeben durch

$$f \mapsto \int f\xi = \int f(x)\langle x, \xi\rangle \, dx \,.$$

Dies ist die integrierte Darstellung von ξ und daher ein $*$-Homomorphismus.

Ist $\Phi : \mathbf{L}^1(G) \to \mathbb{C}$ ein stetiger Algebrahomomorphismus, so gilt $\Phi(f) = \int f\phi$ für ein $\phi \in \mathbf{L}^\infty(G)$. Sei $f \in \mathbf{L}^1(G)$ mit $\Phi(f) \neq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Phi(f)\int g\phi &= \Phi(f * g) = \int \phi(f * g)\\ &= \iint \phi(x) f(xy^{-1}) g(y)\, dy dx = \int \Phi(R_{y^{-1}}f) g(y)\, dy \,.\end{aligned}$$

Folglich gilt $\phi(y) = \Phi(f)^{-1}\Phi(R_{y^{-1}}f)$ für lokal fast alle $y \in G$. Auf diese Weise kann man einen stetigen Repräsentanten für ϕ wählen und

$$\phi(xy)\Phi(f) = \Phi(R_{y^{-1}x^{-1}}f) = \Phi(R_{y^{-1}}R_{x^{-1}}f) = \phi(y)\phi(x)\Phi(f) ,$$

also $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. Es folgt $\phi(x) \neq 0$ und $\phi(x^n) = \phi(x)^n$ für alle $x \in G$, $n \in \mathbb{N}$. Da ϕ beschränkt ist, folgt $\phi(x) \in \mathbb{T}$. (Wäre $|\phi(x)| < 1$ für ein x, so wäre $|\phi(x^{-1})| > 1$.)
Damit ist die behauptete Gleichheit gezeigt und es folgt, dass $\hat{G} \cup 0$ schwach* abgeschlossen in der Einheitskugel von $\mathbf{L}^\infty(G)$ ist (weil durch bilineare Gleichungen gegeben), also schwach* kompakt. Da 0 abgeschlossen ist, ist $\widehat{G}$ als lokal abgeschlossene Teilmenge lokal kompakt. □

Satz 3.1.3. Sei G kompakt. Dann gilt $\widehat{G} \subset \mathbf{L}^\infty(G) \subset \mathbf{L}^p(G)$ für alle $p \geqslant 1$. Ist das Haarmaß von G so normalisiert, dass $\mathrm{vol}(G) = 1$, so ist $\widehat{G}$ eine orthonormale Teilmenge von $\mathbf{L}^2(G)$.

Beweis. Sei $\xi \in \widehat{G}$. Es gilt $|\xi|^2 = 1$, also $\|\xi\|_2 = 1$. Ist nun $\eta \in \widehat{G}$ mit $\eta \neq \xi$, so ist $\langle x, \xi^{-1}\eta\rangle \neq 1$ für ein $x \in G$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int \overline{\xi}\eta &= \int \langle y, \xi^{-1}\eta\rangle\, dy = \langle x, \xi^{-1}\eta\rangle \int \langle x^{-1}y, \xi^{-1}\eta\rangle\, dy \\ &= \langle x, \xi^{-1}\eta\rangle \int \langle y, \xi^{-1}\eta\rangle\, dy = \langle x, \xi^{-1}\eta\rangle \int \overline{\xi}\eta ,\end{aligned}$$

also $\int \overline{\xi}\eta = 0$. □

Satz 3.1.4. Falls G diskret ist, ist $\widehat{G}$ kompakt. Falls G kompakt ist, ist $\widehat{G}$ diskret.

Beweis. Falls G diskret, gilt $\delta \in \mathbf{L}^1(G)$. Es ist ein Algebrahomomorphismus $\Phi : \mathbf{L}^1(G) \to \mathbb{C}$ genau dann $\neq 0$, wenn $\Phi(\delta) = 1$. Daher ist die Menge der von Null verschiedenen Algebrahomomorphismen $\mathbf{L}^1(G) \to \mathbb{C}$ eine schwach* abgeschlossene Teilmenge der Einheitskugel von $\mathbf{L}^\infty(G)$. Somit ist $\widehat{G}$ kompakt.
Ist nun G kompakt, so gilt $1 \in \mathbf{L}^1(G)$ und $\mu : f \mapsto \int f$ ist eine schwach* stetige Linearform auf $\mathbf{L}^\infty(G)$. Nach Satz 3.1.3 ist $\mu(1) = 1$ und $\mu(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \widehat{G}$, $\xi \neq 1$. Es folgt, dass $1 \in \widehat{G}$ isoliert ist; also ist $\widehat{G}$ diskret. □

Im folgenden bestimmen wir $\widehat{G}$ in einigen Beispielen.

Satz 3.1.5.

(i). Es gilt $\widehat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ vermöge der Paarung $\langle x, \xi\rangle = e^{2\pi i x\xi}$.

(ii). Es gilt $\widehat{\mathbb{T}} \cong \mathbb{Z}$ vermöge der Paarung $\langle \alpha, n\rangle = \alpha^n$.

(iii). Es gilt $\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}$ vermöge der Paarung $\langle n, \alpha\rangle = \alpha^n$.

(iv). Es gilt $\widehat{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ vermöge der Paarung $\langle m, n\rangle = e^{2\pi i mn/k}$.

Beweis. (i). Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{R}}$. Es gilt $\phi(0) = 1$, also gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $c = \int_0^\varepsilon \phi(t)\,dt > 0$. Es folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$c\phi(x) = \int_0^\varepsilon \phi(t+x)\,dt = \int_x^{x+\varepsilon} \phi(t)\,dt \ .$$

Daher ist ϕ differenzierbar mit

$$\phi'(x) = c^{-1}(\phi(x+\varepsilon) - \phi(x)) = c^{-1}(\phi(\varepsilon) - 1)\phi(x) \ .$$

Mit $C = c^{-1}(\phi(\varepsilon) - 1)$ folgt $\phi(x) = e^{Cx}$. Da $|\phi| = 1$, folgt $C = 2\pi i\xi$ für ein $\xi \in \mathbb{R}$. Die Umkehrung ist klar. Dass der Isomorphismus $\widehat{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus ist, folgt aus Theorem 2.3.19.
(ii). Da $x \mapsto e^{2\pi ix}$ einen Isomorphismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{T}$ induziert, sind die Charaktere von $\mathbb{T}$ gerade diejenigen von $\mathbb{R}$, die auf $\mathbb{Z}$ trivial sind. Die Behauptung folgt nun aus Teil (i), da $\widehat{\mathbb{T}}$ nach Satz 3.1.4 diskret ist.
(iii). Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{Z}}$, so gilt $\alpha = \phi(1) \in \mathbb{T}$ und $\phi(n) = \alpha^n$. Damit hat man einen stetigen Gruppenisomorphismus $\widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{T}$. Da der Definitionsbereich nach Satz 3.1.4 kompakt ist, ist er ein Homöomorphismus.
(iv). Zunächst ist $\widehat{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ diskret und kompakt, also endlich. Weiter sind die Charaktere von $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ durch die auf $k\mathbb{Z}$ trivialen Charaktere von $\mathbb{Z}$ gegeben. Für $\phi \in \widehat{\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ gilt daher $\phi(\dot{n}) = \alpha^n$ für eine k-te Einheitswurzel α. □

Man erhält mehr Beispiele durch die Bildung direkter Produkte.

Satz 3.1.6. Seien G_j, $j = 1, \dots, n$, lokal-kompakte Abelsche Gruppen. Dann gilt $(\prod_{j=1}^n G_j)^\wedge = \prod_{j=1}^n \widehat{G}_j$.

Beweis. Sei $\xi = (\xi_j) \in \prod_j \widehat{G}_j$. Dies definiert einen Charakter von $\prod_{j=1}^n G_j$ durch

$$\langle (x_j), \xi\rangle = \prod\nolimits_j \langle x_j, \xi_j\rangle \quad \text{für alle} \ \ (x_j) \in \prod\nolimits_j G_j \ .$$

Ist andererseits $\xi \in (\prod_{j=1}^n G_j)^\wedge$, so ist ξ dieser Form mit

$$\langle x, \xi_j\rangle = \langle (1, \dots, 1, x, 1, \dots, 1), \xi\rangle \quad \text{für alle} \ \ x \in G_j \ .$$

Da die Produkttopologie die Topologie der punktweisen Konvergenz ist, ist dieser Isomorphismus ein Homöomorphismus. □

Korollar 3.1.7. Es gilt $\widehat{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n$, $\widehat{\mathbb{T}^n} \cong \mathbb{Z}^n$, $\widehat{\mathbb{Z}^n} \cong \mathbb{T}^n$ und $\widehat{G} \cong G$ für jede endliche Abelsche Gruppe G.

Beweis. Jede endliche Abelsche Gruppe ist das direkte Produkt endlicher zyklischer Gruppen $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. □

Satz 3.1.8. Seien $(G_\alpha)_{\alpha\in A}$ kompakte Abelsche Gruppen und $G = \prod_{\alpha\in A} G_\alpha$. Es gilt $\widehat{G} = \bigoplus_{\alpha\in A} \widehat{G}_\alpha$.

Beweis. Wie für endliche Produkte definiert jedes $(\xi_\alpha) \in \bigoplus_\alpha \widehat{G}_\alpha$ einen Charakter $\xi \in \widehat{G}$. Sei umgekehrt $\xi \in \widehat{G}$ und $\xi_\alpha = \xi|G_\alpha$. Sei V eine 1-Umgebung von G, so dass $|\xi - 1| < 1$ auf V. Es gibt 1-Umgebungen V_α in G_α, wobei $V_\alpha = G_\alpha$ für fast alle α, so dass $\prod_\alpha V_\alpha \subset V$. Sei α mit $V_\alpha = G_\alpha$. Dann ist $\xi_\alpha(G_\alpha)$ eine Untergruppe von $\mathbb{T}$, die in $\{\alpha||\alpha - 1| < 1\}$ enhalten ist. Damit gilt $\xi_\alpha = 1$.
Man hat somit einen Gruppenisomorphismus $\widehat{G} \to \bigoplus_{\alpha\in A} \widehat{G}_\alpha$. Nun ist $\widehat{G}$ diskret, also ist die Abbildung stetig. Die Einbettungen $\widehat{G}_\alpha \to \widehat{G}$ sind stetig, da die $\widehat{G}_\alpha$ diskret sind. Nach der Definition der Topologie auf der direkten Summe hat man einen Homöomorphismus. □

3.1.9. Sei $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\omega$. Es gilt $\widehat{G} = \bigoplus^\omega \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Sei $\xi_n \in \widehat{G}$ definiert durch $\langle (a_k), \xi_n\rangle = (-1)^{a_n}$ für alle $(a_k)_{k\geqslant 1} \in \{0,1\}^\omega$. Die nicht-trivialen Charaktere von G sind endliche Produkte der ξ_n.
Identifiziert man G mit $[0,1]$ via $(a_n) \mapsto \sum_n a_n 2^{-n}$, so wird ξ_n mit der *Rademacher-Funktion* r_n identifiziert, die auf den Intervallen

$$[0, 2^{-n}[, [2^{-n}, 2\cdot 2^{-n}[, \dots, [1-2^{-n}, 1[\tag{3.1}$$

abwechselnd die Werte $+1, -1$ annimmt.
Ist $n \in \mathbb{N}$, so sei $b_k \cdots b_1$ die Binärdarstellung von n. Setze $w_n = r_1^{b_1} \cdots r_k^{b_k}$. Dies ist die n-te *Walsh-Funktion.* Aus Satz 3.1.3 folgt, dass (w_k) ein Orthonormalsystem in $\mathbf{L}^2(0,1)$ ist. Man sieht leicht ein, dass w_k auf den Intervallen in (3.1) konstant ist, wenn $k < 2^n$. Während ξ_n auf diesen Intervallen konstant ist, nimmt ξ_{n+1} auf jedem der Intervalle die Werte $+1$ und -1 an.
Daraus folgt leicht, dass der Aufspann der w_k mit $k < 2^n$ genau die Menge der auf den Intervallen in (3.1) konstanten Treppenfunktionen ist. Daher ist (w_k) sogar eine Orthonormalbasis.

3.1.10. Sei nun $G_a = (\mathbb{Q}_p, +)$, $p \in \mathbb{P}$. Jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ ist der Form $\sum_{j=N}^\infty c_j p^j$ mit $0 \leqslant c_j < p$ und $N \in \mathbb{Z}$. Weiter gilt $x \in \mathbb{Z}_p$ genau dann, wenn $N = 0$ gewählt werden kann. Definiere $e^{2\pi i x} = e^{2\pi i \sum_{j=N}^{-1} c_j p^j}$ und $\langle x, \xi_1\rangle = e^{2\pi i x}$. Dies macht Sinn, da $e^{2\pi i c_j p^j} = 1$ für alle $j \geqslant 0$.
Falls $0 \leqslant a, b < p$ und $j < 0$, so gilt $a + b = c + np$ für ein $0 \leqslant c < p$ und $n = 0, 1$. Es folgt

$$e^{2\pi i a p^j} e^{2\pi i b p^j} = e^{2\pi i (a+b) p^j} = e^{2\pi i (c p^j + n p^{1+j})} .$$

Falls $j = -1$, so ist dies gleich $e^{2\pi i c p^j}$. Dies zeigt, dass ξ_1 ein Homomorphismus mit $\ker \xi_1 = \mathbb{Z}_p$ ist. Es folgt, dass ξ_1 auf den Nebenklassen von $\mathbb{Z}_p$ kostant ist. Da diese eine offene Überdeckung von $\mathbb{Q}_p$ bilden, ist ξ_1 stetig, also ein Charakter.

Nun definiert man durch *Multiplikation* in $\mathbb{Q}_p$

$$\langle x, \xi_y \rangle = \langle xy, \xi_1 \rangle \quad \text{für alle } \; x, y \in \mathbb{Q}_p \; .$$

Dann ist ξ_y ebenfalls ein Charakter und $\ker \xi_y = |y|_p^{-1}\mathbb{Z}_p = B_{|y|_p^{-1}}(0)$ für $y \neq 0$. Wir zeigen nun, dass alle Charaktere von G_a dieser Form sind.

Lemma 3.1.11. Sei $\xi \in \widehat{G}_a = \widehat{\mathbb{Q}}_p$. Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $B_{p^k}(0) \subset \ker \xi$.

Beweis. Es gilt $\xi(0) = 1$ und ξ ist stetig. Daher $\xi(B_{p^k}(0)) \subset \{z \in \mathbb{T} | |z-1| < 1\}$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Untergruppe $\xi(B_{p^k}(0))$ trivial. □

Jedes $\xi \in \widehat{G}_a$ ist durch die Werte $\langle p^j, \xi \rangle$ mit $j \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt. Sei $\xi \neq 1$. Nach dem Lemma gibt ein k mit $\langle p^j, \xi \rangle = 1$ für alle $j \geqslant k$, aber $\langle p^{k-1}, \xi \rangle \neq 1$. Wir untersuchen den Fall $k = 0$.

Lemma 3.1.12. Sei $\xi \in \widehat{G}_a = \widehat{\mathbb{Q}}_p$ mit $\langle 1, \xi \rangle = 1 \neq \langle p^{-1}, \xi \rangle$. Dann gibt es Zahlen $c_j \in \{0, \ldots, p-1\}$, $j \geqslant 0$, $c_0 \neq 0$, so dass $\langle p^{-k}, \xi \rangle = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^k c_{k-j} p^{-j})$ für alle $k \geqslant 1$.

Beweis. Sei $\omega_k = \langle p^{-k}, \xi \rangle$ für alle $k \geqslant 1$. Dann gilt $\omega_{k+1}^p = \langle p \cdot p^{-(k+1)}, \xi \rangle = \omega_k$. Insbesondere ist ω_1 eine p-te Einheitswurzel und es gibt ein $0 \leqslant c_0 < p$ mit $\omega_1 = e^{2\pi i c_0/p}$. Nach Voraussetzung ist $c_0 \neq 0$.
Sei nun $\omega_k = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^k c_{k-j} p^{-j})$ für gewisse c_j. Dann ist ω_{k+1} eine p-te Wurzel von ω_k, so dass es ein $0 \leqslant c_k < p$ gibt mit

$$\omega_{k+1} = \exp(2\pi i (c_k p^{-1} + \textstyle\sum_{j=1}^k c_{k-j} p^{-(j+1)})) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^{k+1} c_{k+1-j} p^{-j}) \; .$$

Per Induktion folgt die Behauptung. □

Lemma 3.1.13. Sei $\xi \in \widehat{G}_a = \widehat{\mathbb{Q}}_p$ mit $\langle 1, \xi \rangle = 1 \neq \langle p^{-1}, \xi \rangle$. Dann gibt es ein $y \in \mathbb{Q}_p$ mit $|y| = 1$ und $\xi = \xi_y$.

Beweis. Wir wählen (c_j) wie oben und setzen $y = \sum_{j=0}^\infty c_j p^j \in \mathbb{Z}_p$. Da $c_0 \neq 0$, gilt sogar $|y| = 1$. Es gilt $p^{-k} y = \sum_{j=-k}^\infty c_{k+j} p^j$ und $\sum_{j=1}^k c_{k-j} p^{-j} = \sum_{j=-k}^{-1} c_{k+j} p^j$, also für alle $k \geqslant 1$

$$\langle p^{-k}, \xi \rangle = e^{2\pi i p^{-k} y} = \langle p^{-k} y, \xi_1 \rangle = \langle p^{-k}, \xi_y \rangle \; .$$

Da $\mathbb{Z}_p \subset \ker \xi \cap \ker \xi_y$, folgt $\xi = \xi_y$. □

Theorem 3.1.14. Sei $G_a = (\mathbb{Q}_p, +)$. Dann gilt $\widehat{G}_a \cong G_a$.

Beweis. Die Abbildung $\phi : y \mapsto \xi_y : G_a \to \widehat{G}_a$ ist sicher ein Homomorphismus. Ist $\xi_y = 1$, so gilt $p^{-j} y \in \ker \xi_1 = \mathbb{Z}_p$ für alle $j \geqslant 0$. Es folgt $y = 0$, also ist ϕ injektiv.
Sei nun $\xi \in \widehat{G}_a$. Da $\xi_0 = 1$, kann man $\xi \neq 1$ annehmen. Es gibt nach Lemma 3.1.11 ein kleinstes $k \in \mathbb{Z}$ mit $\langle p^k, \xi \rangle = 1$. Definiere $\eta \in \widehat{G}_a$ durch $\langle x, \eta \rangle =$

$\langle xp^k, \xi\rangle$. Nach Lemma 3.1.13 gibt es ein $z \in \mathbb{Q}_p$, $|z| = 1$ mit $\eta = \xi_z$. Es folgt $\xi = \xi_y$ mit $y = p^{-k}z$. Dies zeigt, dass ϕ ein Gruppenisomorphismus ist.
Für $j \geqslant 1$ sei $U_j = \{z \in \mathbb{T} | |z-1| < 1\}$ und für $k \in \mathbb{Z}$ setze

$$V_{jk} = \{\xi \in \widehat{G}_a \mid \xi(B_{p^k}(0)) \subset U_j\} \ .$$

Nach Theorem 2.3.19 ist (V_{jk}) eine Umgebungsbasis der 1 in $\widehat{G}_a$. Da U_j keine nicht-triviale Untergruppe enthält und $\xi(B_{p^k}(0))$ eine Untergruppe von $\mathbb{T}$ ist, gilt $V_{jk} = V_k = \{\xi \mid B_{p^k}(0) \subset \ker \xi\}$. Es gilt $\phi^{-1}(V_k) = B_{p^{-k}}(0)$, da $\ker \xi_y = B_{|y|^{-1}}(0)$. Somit ist ϕ stetig. Da G_a eine Basis von offenen kompakten Teilmengen hat, ist ϕ ein Homöomorphismus. □

3.2 Die Fourier-Transformation

Definition 3.2.1. Für alle $\xi \in \widehat{G}$ und $f \in \mathbf{L}^1(G)$ definieren wir

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \xi^{-1}(f) = \overline{\xi}(f) = \int_G \overline{\langle x, \xi\rangle} f(x)\, dx \ .$$

Dadurch ist eine Abbildung $\mathcal{F} : \mathbf{L}^1(G) \to C(\widehat{G})$ definiert, die wir die *Fouriertransformation* nennen.

Satz 3.2.2. Die Fouriertransformation ist ein normabnehmender $*$-Homomorphismus $\mathbf{L}^1(G) \to C_0(\widehat{G})$ mit dichtem Bild. Es gilt für alle $y \in G$ und $\eta \in \widehat{G}$

$$(L_y f)^\wedge(\xi) = \overline{\langle y, \xi\rangle}\hat{f}(\xi) \quad \text{und} \quad (\eta f)^\wedge(\xi) = L_\eta \hat{f}(\xi) \ . \tag{3.2}$$

Beweis. Dass $\mathcal{F}$ normabnehmend ist, folgt aus 2.2.1. Mit Theorem 2.2.3 gilt

$$\mathcal{F}(f * g^*)(\xi) = \overline{\xi}(f * g^*) = \overline{\xi}(f)\overline{\xi}(g)^* = \mathcal{F}(f)(\xi)\overline{\mathcal{F}(g)(\xi)} \ ,$$

also ist $\mathcal{F}$ ein $*$-Homomorphismus. Für $f \in \mathbf{L}^1(G)$ definiert $\mathcal{F}f$ sogar ein Element von $C(\widehat{G} \cup 0)$ (durch $\mathcal{F}f(0) = 0$). Da $\widehat{G} \cup 0$ schwach*-kompakt ist, ist $C_0(\widehat{G})$ identisch mit der Menge der stetigen Funktionen auf $\widehat{G} \cup 0$, die in 0 verschwinden. Damit nimmt $\mathcal{F}$ Werte in $C_0(\widehat{G})$ an.
Das Bild von $\mathcal{F}$ ist eine involutive Unteralgebra von $C(\widehat{G})$. Nach Theorem 3.1.2 ist offensichtlich, dass das Bild die Punkte trennt. Nach dem Satz von Stone–Weierstraß folgt die Dichtheit des Bildes von $\mathcal{F}$.
Schließlich rechnet man

$$(L_y f)^\wedge(\xi) = \int \overline{\langle x, \xi\rangle} f(y^{-1}x)\, dx = \int \overline{\langle xy, \xi\rangle} f(x)\, dx = \overline{\langle y, \xi\rangle}\hat{f}(\xi) \ ,$$

sowie

$$(\eta f)^\wedge(\xi) = \int \overline{\langle x,\xi\rangle\langle x,\eta^{-1}\rangle} f(x)\,dx = L_\eta \hat{f}(\xi)\;.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

3.2.3. Man erinnere sich an den Raum $\mathrm{M}(\widehat{G})$ der beschränkten komplexen Radonmaße auf $\widehat{G}$. Für $\mu \in \mathrm{M}(\widehat{G})$ definiert man $\phi_\mu \in C_b(G)$ durch

$$\phi_\mu(x) = \int x\,d\mu = \int \langle x,\xi\rangle\,d\mu(\xi)\;.$$

Satz 3.2.4. Die lineare Abbildung $\mu \mapsto \phi_\mu : \mathrm{M}(\widehat{G}) \to C_b(G)$ ist normabnehmend und injektiv.

Beweis. Dass die Abbildung normabnehmend ist, folgt aus der Hölderungleichung. Sei $\phi_\mu = 0$. Dann gilt

$$\int \hat{f}(\xi^{-1})\,d\mu(\xi) = \iint f(x)\langle x,\xi\rangle\,d\mu(\xi)dx = 0\;.$$

Da $\mathcal{F}$ dichtes Bild hat, folgt $\mu^{-1} = 0$ und somit $\mu = 0$. □

3.2.5. Ist μ positiv, so ist ϕ_μ positiven Typs. In der Tat,

$$\begin{aligned}\int (f^* * f)\phi_\mu &= \iint (f^* * f)(x)\langle x,\xi\rangle\,dx\,d\mu(\xi)\\ &= \int \mathcal{F}(f^* * f)(\xi^{-1})\,d\mu(\xi) = \int \left|\hat{f}(\xi^{-1})\right|^2 d\mu(\xi) \geqslant 0\;.\end{aligned}$$

Die Umkehrung ist nach dem folgenden Theorem, dem *Satz von Bochner*, auch richtig.

Theorem 3.2.6. Sei $\phi \in \mathcal{P}$. Dann existiert genau ein positives beschränktes Maß $\mu = \mu_\phi \in \mathrm{M}(\widehat{G})$ mit $\phi = \phi_\mu$.

Beweis. Sei M_0 die Menge aller positiven $\mu \in \mathrm{M}(\widehat{G})$ mit $\|\mu\| \leqslant 1$. Es reicht zu zeigen, dass $\Phi : \mu \mapsto \phi_\mu : M_0 \to \mathcal{P}_0$ surjektiv ist. Die Gleichung $\int f\phi_\mu = \int \hat{f}^\vee\,d\mu$ zeigt, dass Φ schwach*-stetig ist. Da M_0 schwach*-kompakt ist, hat Φ kompaktes konvexes Bild. Da $\Phi(\delta_\xi) = \xi$, enthält das Bild $\widehat{G} \cup 0 = \mathcal{E}_0$. Nach dem Satz von Krein–Milman ist Φ surjektiv. □

Definition 3.2.7. Sei $\mathcal{B} = \{\phi_\mu | \mu \in \mathrm{M}(\widehat{G})\}$. Nach Theorem 3.2.6 ist $\mathcal{B}$ der lineare Aufspann von $\mathcal{P}$, also nach Theorem 2.3.6 die Menge aller Koeffizientenfunktionen von G. Man nennt $\mathcal{B}$ die *Fourier–Stietjes-Algebra*. (Da $\mu \mapsto \phi_\mu$, wie man leicht sieht, ein $*$-Homomorphismus ist, ist $\mathcal{B}$ eine involutive Unteralgebra von $C_b(G)$.) Für $1 \leqslant p < \infty$ setzen wir auch $\mathcal{B}^p = \mathcal{B} \cap \mathbf{L}^p(G)$. Zu $\phi \in \mathcal{B}$ sei $\mu = \mu_\phi \in \mathrm{M}(\widehat{G})$ eindeutig bestimmt durch $\phi = \phi_\mu$.

Lemma 3.2.8. Sei $K \subset \widehat{G}$ kompakt. Es gibt ein $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P}$ mit $\hat{f} \geqslant 0$ und $\hat{f} > 0$ auf K.

Beweis. Sei $h \in C_c(G)$ mit $1 = \int h = \widehat{h}(1)$ und setze $g = h^* * h \in \mathcal{P}$. Es gilt $\widehat{g} = |\widehat{h}|^2 \geqslant 0$ und $\widehat{g}(1) > 0$. Daher existieren eine 1-Umgebung $V \subset \widehat{G}$ und $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \widehat{G}$ mit $\widehat{g} > 0$ auf V und $K \subset \bigcup_{j=1}^n \xi_j V$. Sei $f = \sum_{j=1}^n \xi_j g$. Dann gilt $\widehat{f} = \sum_{j=1}^n L_{\xi_j}\widehat{g}$, so dass $\widehat{f} \geqslant 0$ und $\widehat{f} > 0$ auf K. Es ist leicht einzusehen, dass $f \in \mathcal{P}$ gilt. □

Lemma 3.2.9. Seien $f, g \in \mathcal{B}^1$. Dann gilt $\hat{f}\, d\mu_g = \hat{g}\, d\mu_f$.

Beweis. Sei $h \in \mathbf{L}^1(G)$. Dann gilt

$$\int \hat{h}\, d\mu_f = \iint \langle x^{-1}, \xi\rangle h(x)\, dx\, d\mu_f = \int h(x) f(x^{-1})\, dx = (h * f)(1)\ .$$

Es folgt $\int \hat{h}\hat{g}\, d\mu_f = ((h * g) * f)(1) = ((h * f) * g)(1) = \int \hat{h}\hat{f}\, \mu_g$. Da $\mathcal{F}$ dichtes Bild in $C_0(\widehat{G})$ hat, folgt die Behauptung. □

Das folgende Theorem ist die erste Version des Fourier-Inversionssatzes, die wir beweisen.

Theorem 3.2.10. Für eine geeignete Normalisierung des Haarmaßes auf $\widehat{G}$ gilt für alle $f \in \mathcal{B}^1$, dass $\widehat{f} \in \mathbf{L}^1(\widehat{G})$ ist und

$$f(x) = \int \langle x, \xi\rangle \widehat{f}(\xi)\, d\xi \quad \text{für alle} \;\; x \in G\ .$$

Beweis. Wir definieren ein positives lineares Funktional auf $C_c(\widehat{G})$, das die gesuchte Gleichung löst, und zeigen, dass es ein Haarmaß auf $\widehat{G}$ definiert.

Zu $\psi \in C_c(\widehat{G})$ gibt es gemäß Lemma 3.2.8 eine Funktion $f \in C_c(G) \cap \mathcal{P} \subset \mathcal{B}^1$, so dass $\hat{f} \geqslant 0$ und $\hat{f} > 0$ auf $\operatorname{supp}\psi$. Man setzt

$$I(\psi) = \int \psi(\hat{f})^{-1}\, d\mu_f\ .$$

Nach Lemma 3.2.9 hängt dieser Wert nicht von der Wahl von f ab. Folglich ist I linear. Da $\hat{f} \geqslant 0$ und μ_f positiv ist, ist I positiv. Wieder nach Lemma 3.2.9 gilt $I(\hat{g}\psi) = \int \psi\, d\mu_g$ für alle $g \in \mathcal{B}^1$. Aus Satz 3.2.4 folgt, dass $I \neq 0$ ist.

Bleibt zu zeigen, dass I invariant ist. Es gilt

$$\int \langle x, \xi\rangle\, d\mu_f(\eta\xi) = \overline{\langle x, \eta\rangle} \int \langle x, \xi\rangle\, d\mu_f(\xi) = (\overline{\eta} f)(x) = \int \langle x, \xi\rangle\, d\mu_{\overline{\eta} f}(\xi)\ ,$$

also $d\mu_f(\eta\xi) = d\mu_{\overline{\eta} f}(\xi)$. Sei f derart, dass $\hat{f} > 0$ auf $\operatorname{supp} L_\eta\psi = \eta \operatorname{supp}\psi$. Dann gilt $\widehat{\overline{\eta} f} = L_{\eta^{-1}}\hat{f} > 0$ auf $\operatorname{supp}\psi$ und

$$\begin{aligned} I(L_\eta\psi) &= \int \psi(\eta^{-1}\xi)(\hat{f}(\xi))^{-1}\, d\mu_f(\xi) = \int \psi(\xi)(\hat{f}(\eta\xi))^{-1}\, d\mu_f(\eta\xi) \\ &= \int \psi(\xi)\big(\widehat{\overline{\eta} f}(\xi)\big)^{-1}\, d\mu_{\overline{\eta} f}(\xi) = I(\psi)\ . \end{aligned}$$

Damit ist I ein nicht-triviales, invariantes positives lineares Funktional und es gibt ein Haarmaß $d\xi$ auf $\widehat{G}$ mit $I(\psi) = \int \psi(\xi)\, d\xi$. Für alle $f \in \mathcal{B}^1$ gilt $\int \psi \hat{f}\, d\xi = I(\hat{f}\psi) = \int \psi\, d\mu_f$, also folgt $\hat{f}(\xi)\, d\xi = d\mu_f(\xi)$. Damit ist $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\widehat{G})$ und es folgt $\int \langle x, \xi\rangle \hat{f}(\xi)\, d\xi = f(x)$ für alle $x \in G$ (aus der Definition von μ_f). □

Definition 3.2.11. Das durch die Wahl von dx und die Normalisierung in Theorem 3.2.10 festgelegte Maß $d\xi$ heißt *duales Maß* von dx. Wir werden auf $\widehat{G}$ zu gewähltem Haarmaß dx auf G immer nur $d\xi$ betrachten.

Korollar 3.2.12. Für alle $f \in \mathbf{L}^1(G) \cap \mathcal{P}$ gilt $\hat{f} \geqslant 0$.

Beweis. Das Maß $\hat{f}(\xi)\, d\xi = d\mu_f(\xi)$ ist nach Theorem 3.2.6 positiv. □

3.2.13. Wir identifizieren $\widehat{\mathbb{R}}$ mit $\mathbb{R}$ vermöge $\langle x, \xi\rangle = e^{2\pi i x\xi}$. Dann ist das Lebesguemaß von $\mathbb{R}$ selbst-dual. In der Tat gilt offenbar $d\xi = c\, dx$ für ein $c > 0$. Da entsprechend normierte Gaußfunktionen ihre eigene Fouriertransformierte sind ($\hat{g} = g$, wobei $g(x) = e^{-\pi x^2}$), folgt $c = 1$.

3.2.14. Wir identifizieren $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ mit $\mathbb{Q}_p$ via $\langle x, y\rangle = \xi_y(x) = e^{2\pi xy}$. Normiert man dx durch $\mathrm{vol}(\mathbb{Z}_p) = 1$, so ist dx selbst-dual. Nach Satz 3.1.3 ist für die charakteristische Funktion $f = 1_{\mathbb{Z}_p}$ gerade $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{Z}_p} \overline{\xi}_y$ gleich 1 für $\xi_y(\mathbb{Z}_p) = 1$ und gleich 0 sonst. Es gilt $\xi_y(\mathbb{Z}_p) = 1$ genau dann, wenn $y \in \mathbb{Z}_p$. Damit ist $\hat{f} = f$. Da dx zu seinem dualen Maß proportional ist, ist dx sein eigenes duales Maß.

Satz 3.2.15. Sei G kompakt, $\mathrm{vol}(G) = 1$. Das duale Maß ist das Zählmaß (d.h. Punkte haben Masse 1). Sei G diskret mit dem Zählmaß als Haarmaß. Dann gilt $\mathrm{vol}(\widehat{G}) = 1$.

Beweis. Sei G kompakt und $g = 1$. Es gibt ein $c > 0$, so dass $d\xi = c d\#(\xi)$, wobei # das Zählmaß ist. Es folgt $g(x) = c\sum_{\xi\in\widehat{G}} \langle x, \xi\rangle \hat{g}(\xi)$, nach Theorem 3.2.10. Nach Satz 3.1.3 gilt $\hat{g} = 1_{\{1\}}$, also $g(x) = \langle x, 1\rangle = \sum_{\xi\in\widehat{G}} \langle x, \xi\rangle \hat{g}(\xi)$. Dann ist $c = 1$.
Sei nun G diskret und $g = 1_{\{1\}}$. Es gilt $\int \langle x, \xi\rangle\, d\xi = 0$ für alle $x \neq 1$ und für $x = 1$ ist das Integral gleich $\mathrm{vol}(\widehat{G})$, nach Satz 3.1.3. Andererseits ist $g(x) = \delta_{x1}$ und $g(x) = \int \langle x, \xi\rangle d\xi$ nach Theorem 3.2.10. □

3.2.16. Für die Gruppen $\mathbb{T}$ und $\mathbb{Z}$ sind die natürlichen Haarmaße $d\theta_{[0,1]}$ und das Zählmaß. Der Fourierinversionsatz liefert

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi i n\theta} f(\theta)\, d\theta \quad \text{und} \quad f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n} \hat{f}(n)$$

für alle $f \in \mathcal{B}^1(\mathbb{T})$.

3.2.17. Sei $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. Man wählt auf G das Zählmaß #. Das duale Maß ist $k^{-1}\#$. Es gilt

$$\hat{f}(m) = \sum_{n=0}^{k-1} e^{-2\pi i mn/k} f(n) \quad \text{und} \quad f(n) = \frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1} e^{2\pi i mn/k} \hat{f}(m)\ .$$

Das folgende Theorem ist das *Plancherel-Theorem* für lokal kompakte Abelsche Gruppen.

Theorem 3.2.18. Die Fouriertransformation auf $\mathbf{L}^1(G) \cap \mathbf{L}^2(G)$ setzt sich in eindeutiger Weise zu einem unitären Isomorphismus $\mathbf{L}^2(G) \to \mathbf{L}^2(\widehat{G})$ fort.

Beweis. Sei $f \in \mathbf{L}^1(G) \cap \mathbf{L}^2(G)$. Dann gilt $f * f^* = f * \tilde{f} \in \mathbf{L}^1(G) \cap \mathcal{P} \subset \mathcal{B}^1$, da G unimodular ist, und wegen Korollar 2.3.3. Weiter $\widehat{f * f^*} = |\hat{f}|^2$, also folgt mit Theorem 3.2.10

$$\int |f(x)|^2 \, dx = (f * f^*)(1) = \int \widehat{f * f^*}(\xi) \, d\xi = \int |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \, .$$

Daher dehnt sich $\mathcal{F}$ in eindeutiger Weise zu einer Isometrie $\mathbf{L}^2(G) \to \mathbf{L}^2(\widehat{G})$ aus. Sei $\psi \in \mathbf{L}^2(\widehat{G})$ orthogonal zu $\mathcal{F}(\mathbf{L}^1(G) \cap \mathbf{L}^2(G))$ und $f \in \mathbf{L}^1(G) \cap \mathbf{L}^2(G)$. Dann gilt $\psi\overline{\hat{f}} \in \mathbf{L}^1(\widehat{G})$, also $\mu = \psi(\xi)\overline{\hat{f}(\xi)} \, d\xi \in \mathrm{M}(\widehat{G})$. Weiter

$$\phi_\mu(x) = \int \langle x, \xi \rangle \psi(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} \, d\xi = \int \overline{\widehat{L_x f}} \psi = 0$$

für alle $x \in G$. Es folgt $\mu = 0$ aus Satz 3.2.4, also $\psi\overline{\hat{f}} = 0$ f.ü. Aus Lemma 3.2.8 folgt $f = 0$ f.ü. □

Korollar 3.2.19. Sei G kompakt mit $\mathrm{vol}(G) = 1$. Dann ist $\widehat{G}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbf{L}^2(G)$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.1.3 und der Injektivität in Theorem 3.2.18. □

3.3 Der Dualitätssatz von Pontrjagin

3.3.1. Man definiert zu $x \in G$ einen Charakter $\Phi(x)$ von $\widehat{G}$ durch

$$\langle \xi, \Phi(x) \rangle = \langle x, \xi \rangle \quad \text{für alle } \; \xi \in \widehat{G} \, .$$

Dann ist $\Phi : G \to G^{\wedge\wedge}$ ein Gruppenhomomomorphismus. Wir werden zeigen, dass Φ ein Isomorphismus topologischer Gruppen sein wird.

Lemma 3.3.2. Zu $\varphi, \psi \in C_c(\widehat{G})$ gibt es $h \in \mathcal{B}^1(G)$ mit $\varphi * \psi = h$. Insbesondere ist $\mathcal{F}(\mathcal{B}^1)$ dicht in $\mathbf{L}^p(G)$ für alle $1 \leqslant p < \infty$.

Beweis. Seien $f = \phi_\varphi$, $g = \phi_\psi$, $h = \phi_{\varphi * \psi}$. Dann gilt $f, g, h \in \mathcal{B}$. Für alle $k \in \mathbf{L}^1(G) \cap \mathbf{L}^2(G)$ gilt nach Theorem 3.2.18

$$\left| \int \bar{k} f \right| = \left| \iint \langle x, \xi \rangle \overline{k(x)} \varphi(x) \, dx \, d\xi \right| = \left| \bar{\hat{k}} \phi \right| \leqslant \|\hat{k}\|_2 \|\varphi\|_2 = \|k\|_2 \|\varphi\|_2 \, ,$$

also $f \in \mathbf{L}^2(G)$. Analog $g \in \mathbf{L}^2(G)$. Man sieht leicht, dass $h = fg$ gilt, also ist $h \in \mathbf{L}^1(G)$ und somit $h \in \mathcal{B}^1$. Es folgt $h(x) = \int \langle x, \xi \rangle \hat{h}(\xi) \, d\xi = \phi_{\hat{h}}(x)$ aus Theorem 3.2.10, also $\phi * \psi = \hat{h}$ nach Satz 3.2.4. □

Lemma 3.3.3. Sei G eine lokal-kompakte Gruppe und H eine Untergruppe. Ist H lokal-kompakt in der Relativtopologie, so ist H abgeschlossen.

Beweis. Es ist H lokal abgeschlossen, also gibt eine 1-Umgebung $U \subset G$, so dass $U \cap H$ in U abgeschlossen ist. Sei $x \in \overline{H}$. Es existiert eine symmetrische offene 1-Umgebung $V \subset G$ mit $VV \subset U$. Es ist $x^{-1} \in \overline{H}$, da letzteres eine Untergruppe ist. Daher existiert $y \in Vx^{-1} \cap H$.
Sicher ist $x \in xV$, also ist $yx \in VV \cap H\overline{H} \subset U \cap \overline{H} = U \cap H$. Dann folgt $x = y^{-1}(yx) \in H$. □

Das folgende Theorem ist der *Dualitätssatz von Pontrjagin*.

Theorem 3.3.4. Die Abbildung $\Phi : G \to G^{\wedge\wedge}$ ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen.

Beweis. Zunächst ist Φ injektiv nach Theorem 2.3.22. Sei $x \in G$ und $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset G$ ein Netz. Man betrachte folgende Aussagen.

(i). $x_\alpha \to x$ in G.

(ii). $f(x_\alpha) \to f(x)$ für alle $f \in \mathcal{B}^1$.

(iii). $\int \langle x_\alpha, \xi \rangle \hat{f}(\xi)\, d\xi \to \int \langle x, \xi \rangle \hat{f}(\xi)\, d\xi$ für alle $f \in \mathcal{B}^1$.

(iv). $\Phi(x_\alpha) \to \Phi(x)$ in $\hat{\hat{G}}$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Dies ist offensichtlich.
(ii) $\Rightarrow$ (i). Sei $x_\alpha \not\to x$. Dann existiert eine Umgebung U von x, sowie eine Menge $B \subset A$, so dass für alle α ein $\beta \in B$ mit $\beta > \alpha$ und $x_\beta \notin U$ existiert. Nach Satz 2.3.21 gibt es ein $f \in \mathcal{B}^1$ mit $\operatorname{supp} f \subset U$ und $f(x) \neq 0$.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Dies gilt nach Theorem 3.2.10.
(iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Die Topologie von $G^{\wedge\wedge}$ ist die schwach*-Topologie von $\mathbf{L}^\infty(\hat{G})$; $\mathcal{F}(\mathcal{B}^1)$ ist dicht in $\mathbf{L}^1(\hat{G})$ nach Lemma 3.3.2; das Bild von Φ ist norm-beschränkt.
Nach dieser Überlegung ist Φ ein Homöomorphismus auf sein Bild, welches folglich eine lokal-kompakte Untergruppe von G ist. Nach Lemma 3.3.3 ist $\Phi(G)$ abgeschlossen. Angenommen, es gäbe $x \in G^{\wedge\wedge} \setminus \Phi(G)$. Sei $V \subset G^{\wedge\wedge}$ eine kompakte symmetrische 1-Umgebung mit $xVV \cap \Phi(G) = \emptyset$. Seien $0 \leqslant \varphi, \psi \in C_c(G^{\wedge\wedge}) \setminus 0$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset xV$ und $\operatorname{supp} \psi \subset V$. Dann ist $\varphi * \psi \neq 0$, $\operatorname{supp}(\varphi * \psi) \cap \Phi(G) = \emptyset$. Nach Lemma 3.3.2 ist $\varphi * \psi = \hat{h}$ für ein $h \in \mathcal{B}^1(\hat{G})$. Es gilt

$$0 = \hat{h}(\Phi(y^{-1})) = \int \langle \xi, \Phi(y) \rangle h(\xi)\, d\xi = \int \langle y, \xi \rangle h(\xi)\, d\xi = \phi_h(y)$$

für alle $y \in G$. Nach Satz 3.2.4 folgt $h = 0$, ein Widerspruch. □

3.3.5. Im folgenden identifizieren wir G und $G^{\wedge\wedge}$. Der Pontrjagin'sche Dualitätssatz hat folgende wichtige Korollare.

Theorem 3.3.6. Sei $f \in \mathbf{L}^1(G)$ und $\hat{f} \in \mathbf{L}^1(\hat{G})$. Dann gilt

$$f(x) = f^{\wedge\wedge}(x^{-1}) = \int \langle x, \xi \rangle \hat{f}(\xi)\, d\xi \quad \text{für fast alle} \quad x \in G \,.$$

Ist f stetig, so gilt die Gleichung überall.

Beweis. Aus der Definition

$$\hat{f}(\xi) = \int \langle x^{-1}, \xi \rangle f(x)\, dx = \int \langle x, \xi \rangle f(x^{-1})\, dx \,,$$

also ist $\hat{f} \in \mathcal{B}^1(\hat{G})$ und $d\mu_{\hat{f}}(x) = f(x^{-1})\, dx$. Aus Theorem 3.2.10 folgt damit $f(x^{-1}) = f^{\wedge\wedge}(x)$ für fast alle x. Da $f^{\wedge\wedge}$ stetig ist, folgt die Behauptung. □

Theorem 3.3.7. Seien $f, g \in \mathbf{L}^1(G)$ mit $\hat{f} = \hat{g}$. Dann gilt $f = g$ fast überall.

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.2.4, angewandt auf $\hat{G}$. □

Satz 3.3.8. Ist $\hat{G}$ kompakt, so ist G diskret. Ist $\hat{G}$ diskret, so ist G kompakt.

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.1.4, angewandt auf $\hat{G}$. □

Satz 3.3.9. Für alle $f, g \in \mathbf{L}^2(G)$ gilt $(fg)^\wedge = \hat{f} * \hat{g}$ (fast überall).

Beweis. Zunächst nehme man an, dass $f(x) = \hat{\varphi}(x^{-1})$ und $g(x) = \hat{\psi}(x^{-1})$ mit $\varphi, \psi \in \mathbf{L}^2(\hat{G}) \cap \mathcal{B}^1(\hat{G})$. Wir wissen bereits $(\varphi * \psi)^\wedge(x^{-1}) = f(x)g(x)$. Aus Theorem 3.2.10 zeigt, dass $\varphi = \hat{f}$ und $\psi = \hat{g}$. Da $\phi * \psi \in \mathbf{L}^1(\hat{G})$ und $fg \in \mathbf{L}^1(G)$, folgt aus Theorem 3.3.6, dass $\varphi * \psi = (fg)^\wedge$ und $(\varphi * \psi)^{\wedge\wedge}(\xi^{-1}) = (\varphi * \psi)(\xi)$ für fast alle ξ. Damit $(fg)^\wedge = \hat{f} * \hat{g}$.

Da $\|\hat{f} * \hat{g}\|_\infty \leqslant \|\hat{f}\|_2 \|\hat{g}\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$ und $\|(fg)^\wedge\|_\infty \leqslant \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2$, folgt die Behauptung. □

3.3.10. Mithilfe des Dualitätssatzes von Pontrjagin kann man auch Quotienten lokal-kompakter Abelscher Gruppen überzeugend behandeln. Für eine abgeschlossene Untergruppe H von G betrachtet man dazu

$$H^\perp = \{\xi \in \hat{G} \mid \langle x, \xi \rangle = 1 \text{ für alle } x \in H\} \,.$$

Satz 3.3.11. Für alle abgeschlossenen Untergruppen $H \subset G$ gilt $H^{\perp\perp} = H$.

Beweis. Dies folgt leicht mit Theorem 2.3.22 durch Betrachtung von G/H. □

Theorem 3.3.12. Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Seien Abbildungen $\Phi : (G/H)^\wedge \to H^\perp$ und $\Psi : \hat{G}/H^\perp \to \hat{H}$ definiert durch

$$\Phi(\eta) = \eta \circ q \quad \text{und} \quad \Psi(\xi H^\perp) = \xi|_H \,,$$

wobei $q : G \to G/H$ die kanonische Projektion sei. Dann sind Φ und Ψ Isomorphismen topologischer Gruppen.

Beweis. Nach dem Homomorphiesatz ist Φ ein Gruppenisomorphismus. Die Topologie auf $(G/H)^\wedge$ ist die der kompakten Konvergenz auf G/H; die Topologie auf $H^\perp$ ist die der kompakten Konvergenz auf G. Ist $K \subset G$ kompakt, so ist $q(K) \subset G/H$ kompakt. Umgekehrt gibt nach Lemma 1.6.7 zu kompaktem $L \subset G/H$ ein kompaktes $K \subset G$ mit $q(K) = L$. Daher ist Φ ein Homöomorphismus.
Nimmt man $\widehat{G}$ anstelle von G und $H^\perp$ anstelle von H, so erhält man einen Isomorphismus topologischer Gruppen $(\widehat{G}/H^\perp)^\wedge \to H^{\perp\perp} = H$. Einem $x \in H$ entspricht dabei der Charakter η von $\widehat{G}/H^\perp$, gegeben durch

$$\langle \xi H^\perp, \eta \rangle = \langle x, \xi \rangle \quad \text{für alle } \ \xi \in \widehat{G}\ .$$

Die duale Abbildung $\widehat{G}/H^\perp = (\widehat{G}/H^\perp)^{\wedge\wedge} \to \widehat{H}$ ordnet $\xi H^\perp$ also $\xi|_H$ zu und ist somit gerade Ψ. Wegen der Pontrjagin-Dualität und der Aussage für Φ folgt, dass Ψ ein Isomorphismus ist. □

Die Surjektivität von Ψ im Theorem liefert eine Version des Satzes von Hahn–Banach für lokal-kompakte Abelsche Gruppen.

Korollar 3.3.13. Ist $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe, so hat jeder Charakter von H eine Fortsetzung zu einem Charakter von G.

3.3.14. Man betrachte die Paarung $\langle x, y \rangle = e^{2\pi i xy}$ auf $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$, die den Isomorphismus $\mathbb{Q}_p \to \widehat{\mathbb{Q}}_p$ (additive Gruppe) induziert. Offenbar gilt $\mathbb{Z}_p^\perp = \mathbb{Z}_p$, also $\widehat{\mathbb{Z}}_p \cong \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$. Da $\ker \xi_1 = \mathbb{Z}_p$, ist $\widehat{\mathbb{Z}}_p \cong \xi_1(\mathbb{Q}_p)$, wobei die letztere Gruppe mit der diskreten Topologie zu versehen ist. Wir bezeichnen diese Gruppe mit U_p. Man sieht leicht, dass U_p die Vereinigung aller Gruppen p^k-ter Einheitswurzeln mit $k \geqslant 1$ ist.

3.3.15. Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Da H und G unimodular sind, trägt G/H ein G-invariantes Maß μ nach Theorem 1.6.10. Insbesondere ist μ ein Haarmaß auf G/H. Es gilt nach (1.15) für eine geeignete Normierung der Maße

$$\int_G f(x)\,dx = \int_{G/H} \int_H f(xy)\,dy\,d(xH) \quad \text{für alle } \ f \in C_c(G/H)\ .$$

Der folgende Satz ist eine abstrakte Version der Poisson-Summationsformel und kann benutzt werden, um wie in der Einleitung die klassische Poisson-Summationsformel herzuleiten (hier nimmt man $G = \mathbb{R}$ und $H = \mathbb{Z}$).

Theorem 3.3.16. Sei $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe und $f \in C_c(G)$. Definiere $F \in C_c(G/H)$ durch $F(xH) = \int_H f(xy)\,dy$. Dann gilt $\widehat{F} = \widehat{f}|_{H^\perp}$ (wobei $H^\perp \cong (G/H)^\wedge$). Gilt $\widehat{f}|H^\perp \in \mathbf{L}^1(H^\perp)$, so gilt für eine geeignete Normierung der

Maße (unabhängig von f):

$$\int_H f(xy)\,dy = \int_{H^\perp} \langle x,\xi\rangle \hat{f}(\xi)\,d\xi\ .$$

Beweis. Für alle $\xi \in H^\perp$, $x \in G$, $y \in H$ gilt $\langle xy,\xi\rangle = \langle x,\xi\rangle$. Daher

$$\hat{F}(\xi) = \int_{G/H}\int_H \overline{\langle xy,\xi\rangle} f(xy)\,dy\,d(xH) = \int_G \overline{\langle x,\xi\rangle} f(x) = \hat{f}(\xi)\ .$$

Falls $\hat{f}|_{H^\perp}$, kann man Theorem 3.3.6 anwenden. Es folgt die Behauptung. □

4 Die Selberg'sche Spurformel

Sei G eine lokal-kompakte Gruppe mit abzählbaren Umbegungsbasen und $\Gamma \subset G$ eine diskrete cokompakte Untergruppe, so dass $\Gamma\backslash G$ ein G invariantes MaßÊträgt. In diesem Fall ist $\mathbf{L}^2(\Gamma\backslash G)$ eine unitäre G-Darstellung, die als direkte Summe mit endlichen Multiplizitäten von irreduziblen G-Darstellungen zerfällt. Die Selbergsche Spurformel drückt die gewichtete Charaktersumme dieser Darstellungen durch Integrale über die G-Bahnen $\mathcal{O}_\gamma$ durch die Elemente (genauer: Konjugationsklassen) von Γ aus. Man kann sie als Verallgemeinerung der Poissonschen Summationsformel in einen nicht-kommutativen Rahmen auffassen.

4.1 Cokompakte Untergruppen und Gitter

Definition 4.1.1. Eine abgeschlossene Untergruppe $\Gamma \subset G$ heißt *cokompakt*, falls $\Gamma\backslash G$ kompakt ist. Falls $\Gamma\backslash G$ ein *beschränktes* G-invariantes Maß trägt, so heißt Γ *cofinit*.

4.1.2. $\mathbb{Z}$ ist cokompakt in $\mathbb{R}$. Ist K kompakt und $\alpha : K \to G$ ein stetiger Homomorphismus, so ist G cokompakt in $K \ltimes_\alpha G$. Die Untergruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ is cofinit, aber nicht cokompakt. Es gibt cokompakte diskrete Untergruppen von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.

Satz 4.1.3. Falls es eine cokompakte *unimodulare* Untergruppe $H \subset G$ gibt, so ist G unimodular und H cofinit.

Beweis. Der Beweis ist dem von Theorem 1.6.10 ähnlich. Definiere

$$Pf(Hg) = \int_H f(hg)\,dh = \int_H f(h^{-1}g)\,dh \quad \text{für alle } f \in C_c(G)\ .$$

Sei $Pf = 0$. Es gibt $\varphi \in C_c(G)$ mit $P\varphi = 1$ auf $q(\operatorname{supp} f)$ (vgl. Lemma 1.6.8). Dann folgt

$$\begin{aligned}\int_G f &= \int_G (P\varphi \circ q) f = \int_H \int_G \varphi(hg) f(g)\,dg\,dh \\ &= \int_H \int_G \varphi(g) f(h^{-1}g)\,dg\,dh = \int_G \varphi P f = 0\ .\end{aligned}$$

Somit definiert $Pf \mapsto \int_G f$ ein positives lineares Funktional auf $C_c(H\backslash G)$. Sei μ das entsprechende Maß. Dann gilt mit $f = P\varphi$: $R_g f = P R_g \varphi$, also

$$\int R_g f\,d\mu = \int_G R_g\varphi = \Delta_G(g^{-1}) \int_G \varphi = \Delta_G(g^{-1}) \int f\,d\mu\ .$$

Da $1 \in C_c(H\backslash G)$ und $R_g 1 = 1$ für alle $g \in G$, folgt $\Delta_G = 1$. Somit ist μ ein (endliches) G-rechts invariantes Maß auf $H\backslash G$ und H ist cofinit. □

Definition 4.1.4. Sei $\Gamma \subset G$ diskret. Dann ist Γ abgeschlossen. Falls Γ cofinit ist, heißt Γ ein *Gitter*. Falls Γ cokompakt ist, heißt Γ ein *uniformes Gitter*. Nach Satz 4.1.3 und weil diskrete Gruppen unimodular sind (das ZählmaßÊist invariant), ist jedes uniforme Gitter ein Gitter.

Theorem 4.1.5. Falls ein Gitter $\Gamma \subset G$ existiert, so ist G unimodular.

Lemma 4.1.6. Sei G eine lokal-kompakte Gruppe. Genau dann ist $\mathrm{vol}(G) < \infty$, wenn G kompakt ist.

Beweis. Sei $\mathrm{vol}(G) < \infty$ und V eine kompakte 1-Umgebung. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n\,\mathrm{vol}(V) \leqslant \mathrm{vol}(G) < (n+1)\,\mathrm{vol}(V)$. Die Zahl n hat die Eigenschaft, dass für alle $m > n$ und $x_1, \ldots, x_m$ Indizes $1 \leqslant i \neq j \leqslant m$ existieren mit $Vx_i \cap Vx_j \neq \emptyset$ (sonst wäre $\mathrm{vol}(\bigcup_{j=1}^m Vx_j) = m\,\mathrm{vol}(V) > \mathrm{vol}(G)$). Sei k minimal mit dieser Eigenschaft.
Seien $x_1, \ldots, x_k \in G$, so dass $x_iV \cap x_jV = \emptyset$ für $i \neq j$, und setze $K = \bigcup_{j=1}^k x_jV$. Ist $x \in G$, so ist $K \cap xK \neq \emptyset$ wegen der Bedingung an k. Daher ist $x \in K^{-1}K$ und $G = K^{-1}K$ kompakt. □

Beweis von Theorem 4.1.5. Nach der Voraussetzung und Theorem 1.6.10 gilt $\Delta_G|_\Gamma = \Delta_\Gamma = 1$, also $N = \ker \Delta_G$. Da N unimodular ist nach Korollar 1.6.11, existiert ein N-invariantes Maß auf $\Gamma\backslash N$. Es folgt

$$\int_{N\backslash G} \int_{\Gamma\backslash N} 1 = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash G) < \infty \ ,$$

also aus dem Satz von Fubini, dass $\mathrm{vol}(N\backslash G) < \infty$. Da G/N eine lokal-kompakte Gruppe ist, ist G/N kompakt nach Lemma 4.1.6. Aus Satz 4.1.3 folgt, dass G unimodular ist. □

4.2 Diskretes Spektrum

4.2.1. Sei G lokal-kompakt und $H \subset G$ eine unimodulare cokompakte Untergruppe. Dann ist auf $\mathbf{L}^2(\Gamma\backslash G)$ eine unitäre Darstellung gegeben durch

$$R_g f(\Gamma x) = f(\Gamma x g) \quad \text{für alle } \ f \in \mathbf{L}^2(\Gamma\backslash G)\,,\ g, x \in G\ .$$

Im Fall $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ zerfällt $\mathbf{L}^2(\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R})$ als die direkte Summe der Charaktere $e^{2\pi i n\theta}$, wie aus der Plancherelformel für lokal-kompakte Abelsche Gruppen oder dem Satz von Peter–Weyl folgt. Dies ist auch die klassische Theorie der Fourierreihen. Man sucht nun eine Verallgemeinerung dieses Resultats für $\Gamma\backslash G$.
Für eine irreduzible unitäre G-Darstellung $(\mathcal{H}, \pi)$ und $n \geqslant 1$ schreiben wir $n\pi$ für die n-fache direkte Summe von π mit sich selbst.

Theorem 4.2.2. Sei $H \subset G$ eine unimodulare cokompakte Untergruppe und $\widehat{G}$ die Menge der Äquivalenzklassen unitärer G-Darstellungen. Dann ist $\mathbf{L}^2(H\backslash G)$ die direkte Summe von G-Darstellungen

$$\mathbf{L}^2(H\backslash G) \cong \bigoplus\nolimits_{\pi\in\widehat{G}} N_H(\pi)\pi \ ,$$

wobei $N_H(\pi)$ endlich ist.

4.2.3. Der Beweis des Theorem erfordert etwas Vorbereitung. Zunächst definieren wir für $f \in C_c(G)$ und kompakte 1-Umgebungen $U \subset G$

$$f_U(y) = \sup\nolimits_{x,z\in U}|f(xyz)| \ .$$

Lemma 4.2.4. Die Funktion f_U ist stetig.

Beweis. Bekanntermaßen ist f_U nach unten halbstetig und es reicht zu zeigen, dass $f_U^{-1}([0,a[)$ offen ist für alle $a \geqslant 0$. Sei $y \in G$ mit $f_U(y) < a$. Dann ist $|f(UyU)| < a$ und da UyU kompakt ist, existiert eine offene Umgebung W von UyU mit $|f(W)| < a$. Es folgt, dass eine y-Umgebung V gibt mit $UVU \subset W$. Dann ist $f_U(V) < a$. □

Definition 4.2.5. Eine Funktion $f \in C(G)$ heißt *gleichgradig integrierbar*, falls $f_U \in \mathbf{L}^1(G)$ für eine kompakte 1-Umgebung U. Die Menge der solchen Funktionen bezeichnen wir mit $C_u(G)$. Es gilt $C_u(G) \subset \mathbf{L}^1(G)$.
Nach obigem Lemma ist jedes $f \in C_c(G)$ gleichgradig integrierbar. Man kann zeigen, dass jede Schwartzraumfunktion auf $\mathbb{R}^n$ gleichgradig integrierbar ist. Die Menge $C_u(G)$ ist eine Art Ersatz für den Schwartzraum.
Das folgende Lemma wird im Beweis von Theorem 4.2.2 nicht benötigt, ist aber an sich interessant.

Lemma 4.2.6. Es gilt $C_u(G) \subset C_0(G) \cap \mathbf{L}^2(G)$. Sei weiter G unimodular. Dann ist $C_u(G)$ ist eine Algebra unter Faltung.

Beweis. Sei $f \in C_u(G)$ und $U \subset G$ mit $f_U \in \mathbf{L}^1(G)$. Wäre $f \notin C_0(G)$, so gäbe es $\varepsilon > 0$ und eine Folge $x_k \in G$ mit $x_iU \cap x_jU = \varnothing$ für alle $i \neq j$ und $|f|(x_n) \geqslant \varepsilon$. Es folgt $f_U(x_nU) \geqslant \varepsilon$ und folglich $\int f_U \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_nU} f_U = \infty$, ein Widerspruch!
Weiter gilt: alle gleichzeitig integrierbaren und beschränkten Funktionen liegen in $\mathbf{L}^2(G)$. Da fdirur $f,g \in C_u(G)$ aufgrund der Unimodularität gilt

$$(f * g)(xyz) = \int_G f(xw)g(w^{-1}yz)\,dw \ ,$$

folgt leicht $(f * g)_U \leqslant f_U * g_U$. Daher folgt die Behauptung. □

Lemma 4.2.7. Seien $f \in C_u(G)$ und $\varphi \in \mathbf{L}^2(H \setminus G)$, wobei H cokompakt sei.

Dann gilt

$$[R(f)\varphi](Hx) = \int_{H\backslash G} k(Hx,Hy)\varphi(Hy)\,dHy\ ,$$

wobei $k(Hx,Hy) = \int_H f(x^{-1}hy)\,dh$ stetig ist.

Beweis. Sei $Pf(Hg) = \int_H f(hg)\,dg$ und $\psi \in C_c(G)$ mit $P\psi = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(R(f)\varphi)(Hx) &= \int_G f(y)\varphi(Hxy)\,dy = \int_G f(x^{-1}y)\varphi(Hy)\,dy\\ &= \int_H\int_G \psi(h^{-1}y)f(x^{-1}y)\varphi(Hy)\,dy\,dh\\ &= \int_H\int_G \psi(y)f(x^{-1}hy)\varphi(Hy)\,dy\,dh\\ &= \int_G \psi(y)k(Hx,Hy)\varphi(Hy)\,dy = \int_{H\backslash G} k(Hx,Hy)\,dHy\ .\end{aligned}$$

Es gilt $k(Hx',Hy') \leqslant \int |f_U(x^{-1}hy)|\,dh$ für alle $(x',y') \in xU^{-1}\times Uy$. Dies zeigt die Behauptung. □

Lemma 4.2.8. Sei $A = A^* \subset C_c(G)$ ein Unterraum, der eine Fasteins im Sinne von Definition 1.5.10 enthält und $(\mathcal{H},\pi)$ eine unitäre G-Darstellung, so dass $\pi(A)$ aus kompakten Operatoren besteht. Dann zerfällt π als die direkte Summe irreduzibler G-Darstellungen mit endlichen Multiplizitäten.

Beweis. Man argumentiert wie im Beweis von Satz 2.1.7 mit dem Zorn'schen Lemma (hier wird $A = A^*$ benutzt). Der entscheidende Punkt ist zu zeigen, dass jeder invariante Unterraum von $\mathcal{H}$ einen irreduziblen Unterraum enthält. O.B.d.A. reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{H}$ einen irreduziblen Unterraum enthält.
Für jedes selbst-adjungierte $a \in A$ kann man die von Null verschiedenen Eigenwerte $(\lambda_i(a))$ von $\pi(a)$ so ordnen, dass $\lim_i \lambda_i(a) = 0$. Dann gibt es Zerlegung in $\pi(a)$-invariante Unterräume

$$\mathcal{H} = \ker a \oplus \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_{a,i}\ ,\quad \text{wobei}\quad \mathcal{H}_{a,i} = \ker(\pi(a) - \lambda_i(a))\ .$$

Dabei sind die $\mathcal{H}_{a,i}$ *endlich-dimensional.*
Sei $U \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen und invariant. Wir behaupten, dass, falls $U \neq 0$, es $a = a^* \in A$ und $i \in \mathbb{N}$ mit $U \cap \mathcal{H}_{a,i} \neq 0$ gibt. Sei $U \cap \mathcal{H}_{a,i} = 0$ für alle $a = a^* \in A$ und $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt $U \subset \ker \pi(\psi_U)$ für eine (selbst-adjungierte) Fasteins $(\psi_U) \subset A$. Es folgt für alle $u \in U$, dass $u = \lim_U \pi(\psi_U)u = 0$, also ist $U = 0$. Dies zeigt die Behauptung.
Man wähle $a = a^* \in A$ und $i \in \mathbb{N}$. Die Menge

$$\{W \mid W = \mathcal{H}_{a,i} \cap U \neq 0\,,\, U \subset \mathcal{H} \text{ abges. invarianter Unterraum}\}$$

enthält ein Element minimaler Dimension. Sei W ein solches und

$$V = \bigcap \{U \mid U \text{ abges. invar. Unterraum, } U \cap \mathcal{H}_{a,i} = W\} \ .$$

Es gilt $V \cap \mathcal{H}_{a,i} = W$. Ist $Z \subsetneq V$ nun ein abgeschlossener und invarianter Unterraum, so gilt $\dim Z \cap \mathcal{H}_{a,i} < \dim W$, da sonst $V = Z$ wäre. Dann ist wegen der Minimalität $Z = 0$; daher ist V irreduzibel.
Sei nun $(V_j)_{j\in J}$ eine Familie orthogonaler invarianter Unterräume, die unitär äquivalente G-Darstellungen sind. Sei $j_0 \in J$ beliebig und seien $a = a^* \in A$ und $i \in \mathbb{N}$ mit $V_{j_0} \cap \mathcal{H}_{a,i} \neq 0$. Da a die gleichen Eigenwerte in allen Darstellungen hat, folgt $V_j \cap \mathcal{H}_{a,i} \neq 0$ für alle $j \in J$. Somit ist $\#J \leqslant \dim \mathcal{H}_{a,i} < \infty$. Dies zeigt die Endlichkeit der Multiplizitäten. □

Beweis von Theorem 4.2.2. Aus Lemma 4.2.7 folgt, dass für alle $f \in C_u(G)$ der Operator $R(f)$ ein Integralkernoperator mit Kern $k \in C(H\backslash G \times H\backslash G) \subset \mathbf{L}^2$ ist, also Hilbert–Schmidt und insbesondere kompakt. Da G unimodular ist, ist $C_u(G)$ ein selbst-adjungierter Unterraum von $\mathbf{L}^1(G)$. Da $C_c(G) \subset C_u(G)$, enthält letzteres eine Fasteins. Aus Lemma 4.2.8 folgt die Behauptung. □

4.3 Die Spurformel

Definition 4.3.1. Sei (X, μ) ein lokal-kompakter Hausdorffraum mit Radonmaß. Eine Kernfunktion $k \in \mathbf{L}^2 \cap C(X \times X)$ heißt *zulässig*, falls es $g \in \mathbf{L}^2 \cap C(X)$ mit $|k(x,y)| \leqslant g(x)g(y)$ für alle $x, y \in X$ gibt.
Ein linearer Endomorphismus $S \in \operatorname{End}(\mathbf{L}^2(X))$ heißt *zulässig*, falls einen zulässigen Kern k gibt mit $S\varphi(x) = \int k(x,y)\varphi(y)\, d\mu(y)$ für alle $\varphi \in \mathbf{L}^2(X)$.

Lemma 4.3.2. Sei X lokal-kompakter Hausdorffraum mit abzählbaren Umgebungsbasen und μ ein Radonmaß. Sei T ein Operator mit Kern $k \in \mathbf{L}^2 \cap C(X \times X)$. Gilt $T = SS^*$, wobei S zuässiger Operator ist, ist T von Spurklasse und es gilt $\operatorname{tr} T = \int_X k(x,x)\, d\mu(x)$.

Beweis. Der Operator S ist Hilbert–Schmidt, also ist T von Spurklasse mit Spur $\operatorname{tr} T = \|S\|_{\mathcal{L}^2}$. Sei l ein zulässiger Kern für S. Dann gilt

$$SS^*\varphi(x) = \int j(x,y)\varphi(y)\, d\mu(y) \quad \text{mit} \quad j(x,y) = \int l(x,z)\overline{l(z,y)}\, d\mu(z) \ .$$

Wegen der Existenz abzählbarer Umgebungsbasen reicht es, die Stetigkeit von j mit Folgen zu testen. Aus der Zulässigkeit von l und dem Lebesgue'schen Konvergenzsatz folgt, dass j stetig ist.
Nun zeigt man leicht, dass $k = j$ ist. Somit ist $k(x,x) = j(x,x)$ integrierbar und

$$\int_X k(x,x)\, d\mu(x) = \iint |l(x,y)|^2\, dx\, dy = \|S\|_{\mathcal{L}^2} = \operatorname{tr} T \ .$$

Dies zeigt die Behauptung. □

4.3.3. Sei $C_u^2(G) = C_u(G) * C_u(G) \subset C_u(G)$ (Lemma 4.2.6).
Sei Γ ein uniformes Gitter in G und $\Gamma\backslash\Gamma$ die Menge der Konjugationsklassen. Zu $\gamma \in \Gamma$ betrachtet man die Konjugationsklassen $[\gamma] = [\delta^{-1}\gamma\delta]$ und die Isotropiegruppen G_γ und $\Gamma_\gamma = \Gamma \cap G_\gamma$. Es gilt $\Gamma_\gamma\backslash\Gamma = [\gamma]$.
Wir zeigen weiter unten, dass G_γ unimodular ist, also trägt $G_\gamma\backslash$ ein G-invariantes Maß. Für $f \in C_u(G)$ definiert man das *Bahnintegral*

$$\mathcal{O}_\gamma(f) = \int_{G_\gamma\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\, d(\Gamma_\gamma x)\ .$$

Da Γ_γ cofinit in G_γ ist (siehe unten), ist der Ausdruck $\mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\mathcal{O}_\gamma(f)$ wohldefiniert; er ist unabhängig von der Wahl des Haarmaßes auf G_γ.
Schließlich sei $\widehat{G}_\Gamma$ die Teilmenge der $[\pi] \in \widehat{G}$, für die $N_\Gamma(\pi) > 0$. Das folgende Theorem ist die *Selberg'sche Spurformel.*

Theorem 4.3.4. Die Gruppe G habe abzählbare Umgebungsbasen und $\Gamma \subset G$ sei ein uniformes Gitter. Dann gilt für alle $f \in C_u^2(G)$

$$\sum_{[\pi]\in\widehat{G}_\Gamma} N_\Gamma(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi(f) = \sum_{[\gamma]\in\Gamma\backslash\Gamma} \mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\mathcal{O}_\gamma(f)\ .$$

Beweis. Es reicht, die Formel für $f = g * h^*$ zu zeigen. Durch Polarisierung reicht es sogar, sie für $f = h * h^*$ mit $h \in C_u(G)$ zu zeigen. Der Operator $R(f) = R(h)R(h)^*$ ist positiv Hermitesch; nach Lemma 4.2.7 sind $R(f)$, $R(h)$ Integralkernoperatoren mit stetigen Kernfunktionen

$$f_\Gamma(\Gamma x, \Gamma y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x^{-1}\gamma y) \quad \text{und} \quad h_\Gamma(\Gamma x, \Gamma y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} h(x^{-1}\gamma y)\ .$$

Nach Lemma 4.3.2 ist $R(f)$ von Spurklasse mit $\mathrm{tr}\,R(f) = \int_{\Gamma\backslash G} f_\Gamma(x,x)\,dx$. Andererseits gilt nach Theorem 4.2.2, dass $\mathrm{tr}\,R(f) = \sum_{\pi\in\widehat{G}_\Gamma} N_\Gamma(\pi)\,\mathrm{tr}\,\pi(f)$.
Da Γ ein uniformes Gitter ist, ist G unimodular. Insbesondere trägt $\Gamma_\gamma\backslash\Gamma$ ein invariantes Maß. Sei $g \in C_c(G)$ mit $\sum_{\gamma\in\Gamma} g(\gamma x) = 1$ für alle $x \in G$. Man rechnet

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,R(f) &= \int_G g(x) f_\Gamma(\Gamma x, \Gamma x)\,dx = \sum_{\gamma\in\Gamma} \int g(x) f(x^{-1}\gamma x)\,dx \\
&= \sum_{[\gamma]\in\Gamma\backslash\Gamma} \sum_{\Gamma_\gamma\sigma\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} \int_G g(x) f((\sigma x)^{-1}\gamma(\sigma x))\,dx \\
&= \sum_{[\gamma]\in\Gamma\backslash\Gamma} \int_G \sum_{\Gamma_\gamma\sigma\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} g(\sigma^{-1}x) f(x^{-1}\gamma x)\,dx \\
&= \sum_{[\gamma]\in\Gamma\backslash\Gamma} \int_{\Gamma_\gamma\backslash G} \sum_{\Gamma_\gamma\sigma\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} \sum_{\tau\in\Gamma_\gamma} g(\sigma^{-1}\tau x) f(x^{-1}\gamma x)\,d(\Gamma_\gamma x)
\end{aligned}$$

Da $\sum_{\Gamma_\gamma\sigma\in\Gamma_\gamma\backslash\Gamma}\sum_{\tau\in\Gamma_\gamma} g(\sigma^{-1}\tau x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} g(\gamma x) = 1$, folgt

$$= \sum_{[\gamma]\in\Gamma\backslash\Gamma} \int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\, d(\Gamma_\gamma x)$$

Nach Lemma 4.3.6 ist G_γ unimodular und Γ_γ in G_γ cofinit, also folgt

$$\begin{aligned} &= \sum_{[\gamma]\in\Gamma\backslash\Gamma} \int_{\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma} \int_{G_\gamma\backslash G} f((\sigma x)^{-1}\gamma(\sigma x))\, d(G_\gamma\sigma)\, d(\Gamma_\gamma x) \\ &= \sum_{[\gamma]\in\Gamma\backslash\Gamma} \operatorname{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)\mathcal{O}_\gamma(f)\ . \end{aligned}$$

Dies ist die Behauptung. □

Bemerkung 4.3.5. Im obigen Beweis wird für alle $f \in C_c(G/J)$ die Formel

$$\int_{G/H}\int_{H/J} f(ghJ)\, d\dot{h}\, d\dot{g} = \int_{G/J} f(gJ)\, d\dot{g}$$

benutzt. Dies folgt sofort aus

$$\int_{G/H}\int_{H/J}\int_J f(ghj)\, dj\, d\dot{h}\, d\dot{g} = \int_G f(g)\, dg = \int_{G/J}\int_J f(gj)\, dj\, d\dot{g}$$

für alle $f \in C_c(G)$ und der Surjektivität der Abbildungen $f \mapsto \int_J f(\cdot j)\, dj : C_c(G) \to C_c(G/J)$ sowie $f \mapsto f|_H : C_c(G) \mapsto C_c(H)$ (letzteres folgt aus dem Satz von Tietze).

Lemma 4.3.6. Sei $\gamma \in \Gamma$. Dann ist G_γ unimodular und Γ_γ cofinit in G_γ.

Beweis. Nach der Rechnung im obigen Beweis ist $\int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f(x^{-1}\gamma x)\, d\dot{x} < \infty$ für alle $f \geqslant 0$, $f \in C_u^2(G)$. Daher kann man ein Radonmaß μ auf $\Gamma_\gamma\backslash G$ definieren durch

$$\int_{G_\gamma\backslash G} f\, d\mu = \int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f(p(y))\, d\dot{y} \quad \text{für alle } f \in C_c(\Gamma_\gamma\backslash G)\ ,$$

wobei $p : \Gamma_\gamma\backslash G \to G_\gamma$ die kanonische Projektion ist. Offenbar ist μ invariant. Wir zeigen, dass μ beschränkt ist (daraus folgt insbesondere, dass μ wirklich ein Radonmaß ist).

Sei $0 \leqslant f \in C_c(G_\gamma\backslash G)$. Es gibt ein $f' \in C_c(G)$ mit $f'(x^{-1}\gamma x) = f(G_\gamma x)$ für alle $x \in G$ (Tietze). Weiter gibt es $f'' \in C_0^2(G)$ mit $f' \leqslant f''$ (etwa $f'' = \psi * f'$ mit geeignetem ψ). Es folgt

$$\int f\, d\mu = \int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f(p(x))\, d\dot{x} = \int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f'(x^{-1}\gamma x)\, d\dot{x} \leqslant \int_{\Gamma_\gamma\backslash G} f''(x^{-1}\gamma x)\, d\dot{x} < \infty\ .$$

Somit besitzt $G_\gamma\backslash G$ ein G-invariantes Maß. Da G unimodular ist, ist G_γ unimodular. Es hat $\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma$ ein G_γ-invariantes Maß.

Sei $f \in C_c(G_\gamma\backslash G)$, $f \geqslant 0$. Es gilt

$$\int_{G_\gamma\backslash G}\int_{\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma}(f\circ p)(\gamma x)\,d\dot{\gamma}\,d\dot{x} = \int_{\Gamma_\gamma\backslash G}(f\circ p)(x)\,d\dot{x}$$
$$= \int_{G_\gamma\backslash G} f(\dot{x})\,d\dot{x} \leqslant \|f\|_\infty \cdot \mathrm{vol}(G_\gamma\backslash G) < \infty\,.$$

Es folgt, dass $\int_{\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma}(f\circ p)(\gamma x)\,d\dot{\gamma} < \infty$ für fast alle $\dot{x} \in G_\gamma\backslash G$. Da $f\circ p$ G_γ-invariant ist, ist dieses Integral gleich $f(\dot{x})\cdot\mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma)$. Also ist $\mathrm{vol}(\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma) < \infty$, wie behauptet. □

Bemerkung 4.3.7. Ist G eine Liegruppe, so gilt die Spurformel für jede Funktion $f \in C_c^\infty(G)$. Denn man zeigt leicht, dass es für jedes $m \geqslant 0$ eine Darstellung $f = \sum_{j=1}^n g_j * h_j$ für gewisse $g_j \in C_c^\infty(G)$ und $h_j \in C_c^m(G)$ gibt. In der Tat: Die Diracdistribution δ ist die endliche Summe von Ableitungen (im Distributionssinne) von C^m-Funktionen mit kleinem Träger bei 1 und die Aussage folgt sofort.
Dieses Argument geht auf Cartier [Car76, Lemme 1.1] zurück. Genauer kann man $g_j, h_j \in C_c^\infty(G)$ nehmen, aber das ist wesentlich schwerer zu zeigen.

4.3.8. Anwendungen der Spurformel gibt es viele. Die klassische Version der Spurformel ist für $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ und Γ ein sogenanntes *hyperbolisches Gitter*. Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geqslant 2$ ist ein Quotient $\Gamma\backslash G/K$ ($K = \mathrm{SO}(2)$) für ein hyperbolisches Gitter Γ.
In diesem Fall nimmt die Spurformel eine sehr konkrete Form an. Sie erlaubt es, die Nullstellen der *Selberg-Zetafunktion* Z zu verstehen, die mit Hilfe des Gitters Γ definiert wird und als Analogon der Riemannschen Zetafunktion betrachtet wird. Die Nullstellen von Z lassen sich explizit bestimmen. Ihre Multiplizitäten sind genau die Multiplizitäten gewisser Hauptreihendarstellungen von G, die in der Selbergschen Spurformel vorkommen. Sie lassen sich auch über das Geschlecht gewisser assozierter Riemannscher Flächen ausdrücken. Diese Theorie hat viele schöne Resultate, so z.B. ein Primgeodätensatz (analog zum Primzahlsatz), der die Asymptotik der Zahl aller Primgeodäten auf der Fläche $\Gamma\backslash G/K$ mit vorgeschriebener maximaler Länge abschätzt. Für Details zu diesem Thema verweisen wir auf Kapitel 11 in [DE09].

5 Darstellungen kompakter Gruppen

Im folgenden sei G stets eine *kompakte* Gruppe.

5.1 Satz von Peter–Weyl

5.1.1. Sei $(\pi, \mathcal{H})$ eine unitäre G-Darstellung. Wir definieren

$$\phi^\pi_{u,v}(x) = (u|\pi(x)v) \quad \text{und} \quad \phi^\pi_u = \phi^\pi_{u,u} \ .$$

Sei $\mathcal{E}_\pi \subset C(G)$ der lineare Aufspann aller $\phi^\pi_{u,v}$ mit $u, v \in \mathcal{H}$. Dies ist auch der lineare Aufspann aller ϕ^π_u mit $u \in \mathcal{H}$. Es gilt $\mathcal{E}_\pi \subset \mathbf{L}^p(G)$ für alle $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Offenbar ist $\mathcal{E}_\pi \subset \mathbf{L}^2(G)$ ein G-invarianter Unterraum. (Wir sehen weiter unten, dass $\mathcal{E}_\pi$ abgeschlossen ist, wenn π irreduzibel ist.)

Definition 5.1.2. Sei $(\pi, \mathcal{H})$ eine unitäre G-Darstellung und $\varrho \in \hat{G}$ (die Menge der Äquivalenzklassen unitärer G-Darstellungen). Die *ϱ-isotypische Komponente* von π ist der abgeschlossene lineare Aufspann $\mathcal{H}_\varrho$ aller zu ϱ äquivalenten Unterdarstellungen von π.

Satz 5.1.3. Sei $(\mathcal{H}, \pi)$ eine unitäre G-Darstellung und seien $[\pi], [\varrho] \in \hat{G}$. Es ist $\mathcal{H}_\pi \perp \mathcal{H}_\varrho$ für $[\pi] \neq [\varrho]$ und jede irreduzible Unterdarstellung von $\mathcal{H}_\pi$ ist äquivalent zu π.

Beweis. Sei $U \subset \mathcal{H}_\pi$, $V \subset \mathcal{H}_\varrho$ eine irreduzible Unterdarstellungen, die zu π bzw. ϱ äquivalent seien. Sei p die orthogonale Projektion auf U. Aus dem Schurschen Lemma folgt $p|_V = 0$, also $\mathcal{H}_\pi \perp \mathcal{H}_\varrho$.
Sei $U \subset \mathcal{H}_\pi$ eine beliebige irreduzible Unterdarstellung und $[\varrho]$ ihre Äquivalenzklasse. Wäre $[\varrho] \neq [\pi]$, so würde $U \subset \mathcal{H}_\varrho \perp \mathcal{H}_\pi$ folgen, was absurd ist. Es folgt die Behauptung. □

Lemma 5.1.4. Sei $[\pi] \in \hat{G}$. Der Darstellungsraum von π hat Dimension $d_\pi < \infty$.

Beweis. Sei $\|u\| = 1$. Definiere T durch $Tv = \int_G (\pi(x)u|v) \cdot \pi(x)u \, dx$. Dann ist $(u|Tu) = \int |(u|\pi(x)u)|^2 \, dx > 0$ (aus Stetigkeitgründen). Offenbar ist $T \in C(\pi)$, also $T = c \cdot 1$ für ein $c > 0$, aus dem Schur'schen Lemma. Ein Argument mit Riemannsummen wie im Beweis von Theorem 2.2.6 zeigt, dass T der Normlimes von Operatoren endlichen Ranges ist, also kompakt. Es folgt, dass π endlicher Dimension ist. □

Satz 5.1.5. Seien $[\pi], [\varrho] \in \hat{G}$. Es gilt

$$(\phi^\pi_{u,v} \mid \phi^\varrho_{w,z})_{\mathbf{L}^2} = d_\pi^{-1} \cdot \delta_{[\pi],[\varrho]} \cdot (w|u)(v|z) \ .$$

Insbesondere ist $\sqrt{d_\pi}\phi^\pi_{u_i,u_j}$, $i,j = 1,\dots,d_\pi$, eine Orthonormalbasis von $\mathcal{E}_\pi$, wenn u_i, $i = 1,\dots,d_\pi$ eine Orthonormalbasis von π ist. Daher gilt $\dim \mathcal{E}_\pi = d_\pi^2$ und $\mathcal{E}_\pi$ ist abgeschlossen in $\mathbf{L}^2(G)$.

Beweis. Man hat

$$\begin{aligned}\int \overline{\phi^\pi_{u,v}(g)}\phi^\varrho_{w,z}(g)\,dg &= \int (w|\varrho(g)z)(\pi(g)v|u)\,dg\\ &= \int (w|\varrho(g)A\pi(g^{-1})u)\,dg\end{aligned}$$

wobei $Au = (v|u)\cdot z$ sei. Da $B = \int \varrho(g)A\pi(g^{-1})\,dg \in C(\pi,\varrho)$, folgt $B = 0$, falls $[\pi] \neq [\varrho]$. Ist $[\pi] = [\varrho]$, so kann man $\pi = \varrho$ annehmen und es folgt $B = \frac{\operatorname{tr} B}{d_\pi}\cdot 1$. Aber es gilt

$$\operatorname{tr} B = \int \operatorname{tr}\big(\pi(g)A\pi(g^{-1})\big)\,dg = \operatorname{tr} A = (v|z)\ .$$

Es folgt

$$(\phi^\pi_{u,v} \mid \phi^\varrho_{w,z}) = d_\pi^{-1}\cdot \delta_{[\pi],[\varrho]}\cdot (w|u)(v|z)\ ,$$

was zu zeigen war. Es ist klar, dass $\mathcal{E}_\pi$ von $\phi^\pi_{u_i,u_j}$ aufgespannt wird, also folgt die Behauptung. □

Korollar 5.1.6. Sei $\pi \in \widehat{G}$. Dann ist $\mathcal{E}_\pi \subset \mathbf{L}^2(G)_{\overline{\pi}}$.

Beweis. Sei $\|u\| = 1$ ein Vektor in der Darstellung π. Es gilt

$$\phi(x) = (d_\pi^{1/2}\phi^\pi_u \mid d_\pi^{1/2}L_x\phi^\pi_u) = d_\pi(\phi^\pi_{u,u} \mid \phi^\pi_{\pi(x)u,u}) = (\pi(x)u|u) = \phi^{\overline{\pi}}_u(x)\ .$$

Aus Satz 2.3.9 folgt, dass π und die von $\sqrt{d_\pi}\phi^{\overline{\pi}}_u$ aufgespannte Unterdarstellung von $(\mathbf{L}^2(G), L)$ äquivalent sind. □

Das folgende Theorem ist der Satz von Peter–Weyl.

Theorem 5.1.7. Es gilt (als Hilbertsumme unitärer G-Darstellungen)

$$\mathbf{L}^2(G) = \bigoplus\nolimits_{[\pi]\in\widehat{G}} \mathcal{E}_\pi \cong \bigoplus\nolimits_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi\cdot\pi\ .$$

Insbesondere ist $\mathcal{E}_\pi = \mathbf{L}^2(G)_{\overline{\pi}}$.

Beweis. Aus Theorem 4.2.2 (mit $H = 1$) folgt, dass $\mathbf{L}^2(G)_\pi$ die Summe endlich vieler Kopien irreduzibler Darstellungen ist. Die Räume $\mathcal{E}_\pi$ sind orthogonal und enthalten π mit Multiplizität d_π. Es reicht daher zu zeigen, dass die der Aufspann $\mathcal{E}$ aller $\mathcal{E}_\pi$ dicht in $\mathbf{L}^2(G)$ ist. (Denn $d_\pi = d_{\overline{\pi}}$.)

Dafür genügt es, Dichtheit in $C(G)$ zu zeigen. Da $\mathcal{E}$ nach Theorem 2.3.22 die Punkte trennt, unital ist und unter komplexer Konjugation abgeschlossen, reicht es zu zeigen, dass $\mathcal{E}$ unter Multiplikation abgeschlossen ist. Zunächst rechnet man für $[\pi],[\varrho] \in \widehat{G}$

$$\phi^{\pi\otimes\varrho}_{u\otimes w,v\otimes z} = \phi^\pi_{u,v}\cdot\phi^\varrho_{w,z}\ .$$

Dann gilt insbesondere $\phi^{\pi\otimes\varrho}_{u\otimes w, v\otimes z} \in \mathbf{L}^2(G)$ und es folgt, dass die zyklische Darstellung $\pi\otimes\varrho$ als Unterdarstellung von $\mathbf{L}^2(G)$ vorkommt. Sie zerfällt insbesondere als direkte Summe mit endlichen Multiplizitäten irreduzibler Darstellungen. Somit ist $\mathcal{E}$ eine punktetrennende unitale involutive Unteralgebra von $C(G)$ und somit dicht. □

Bemerkung 5.1.8. Man kann die Dichtheit von $\mathcal{E}$ im obigen Beweis auch ohne die Sätze von Gelfand–Raikov und Stone–Weierstraß zeigen. In diesem Fall liefert der obige Satz sogar einen vom bereits diskutierten unabhängigen Beweis des Satzes von Gelfand–Raikov für kompakte Gruppen. Insofern kann man das folgende Resultat als Korollar verstehen.

Korollar 5.1.9. Genau dann ist G eine Liegruppe, wenn G eine treue (d.h. injektive) endlich-dimensionale Darstellung besitzt.

Beweis. Hat G eine endlich-dimensionale treue Darstellung, so ist G isomorph zu einer abgeschlossenen Untergruppe von $U(n)$ ($n \gg 0$), also eine Liegruppe.
Ist andererseits G eine Liegruppe, so existiert eine offene 1-Umgebung $U \subset G$, die keine nicht-triviale Untergruppe von G enthält. Zu $[\pi] \in \hat{G}$ sei $K_\pi = \ker \pi$. Es gilt $K = \bigcap_{[\pi]} K_\pi = 1$ nach Theorem 2.3.22, also $K \setminus U = \varnothing$. Da $G \setminus U$ kompakt ist, gibt es $\pi_1, \ldots, \pi_n$ mit $\bigcap_{j=1}^n K_{\pi_j} \setminus U = \varnothing$. Es folgt $\bigcap_j K_{\pi_j} \subset U$, also $\bigcap_j K_{\pi_j} = 1$. Dann ist $\pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_n$ treu. □

Korollar 5.1.10. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

(i). $\hat{G}$ ist abzählbar.

(ii). $\mathbf{L}^2(G)$ ist separabel (d.h. enthält eine dichte Folge bzw. hat abzählbare Hilbertdimension).

(iii). G ist metrisierbar.

Beweis. Nach Theorem 5.1.7 sind Aussagen (i) und (ii) äquivalent (da jede irreduzible Darstellung endlich-dimensional ist und $\mathbf{L}^2(G)$ alle irreduziblen Darstellungen mit endlicher Multiplizität enthält). Ist G metrisierbar, so gibt es eine abzählbare Fasteins. Mit der Kompaktheit findet man eine dichte Folge in $\mathbf{L}^2(G)$, also impliziert (iii) auch (ii).
(i) ⇒ (ii). Sei $\hat{G}$ abzählbar. Nach Theorem 2.3.22 bilden die Mengen

$$U_{\pi,n,i,j} = \{x \in G \mid 1 + \tfrac{1}{n} > (u_i^\pi | \pi(x) u_j^\pi) > 1 - \tfrac{1}{n}\} \quad \text{für alle } \; n \geqslant 1\,,\, [\pi] \in \hat{G}\,,$$

wobei (u_i^π) eine ONB von π ist, eine Basis von 1-Umgebungen. Da G kompakt ist, reichen für jedes n, $[\pi]$, i, j endlich viele Translate von $U_{n,[\pi],i,j}$, um G zu überdecken. Man erhält eine abzählbare Subbasis einer Topologie auf G und somit eine abzählbare Basis. Da G kompakt ist und die Topologie eine abzählbare Subbasis besitzt, ist G metrisierbar (Metrisierbarkeitssatz von Urysohn). □

Korollar 5.1.11. Sei G endlich. Dann gilt $|G| = \sum_{[\pi]\in\hat{G}} d_\pi^2$.

Beweis. Offenbar ist $\dim \mathbf{L}^2(G) = \dim \mathbb{C}[G] = |G|$. □

5.2 Fourieranalysis auf kompakten Gruppen

5.2.1. Für alle $f \in \mathbf{L}^1(G)$, definiere

$$\hat{f}(\pi) = \int f(x)\pi(x)^* \, dx \in \mathcal{L}(\pi) \quad \text{für alle } [\pi] \in \hat{G} .$$

Dies ist ein Analogon der Fouriertransformation für abelsche lokal-kompakte Gruppen. Da $\hat{G}$ keine einfache algebraische Struktur hat, kann man kein Analogon des Dualitätssatz von Pontryagin erwarten. (Wenn man geeignet kategorifiziert, gibt es allerdings einen solchen Satz, den Dualitätssatz von Tannaka. Vgl. `http://www.maths.mq.edu.au/~street/CT90Como.pdf` für weitere Entwicklungen in diese Richtung.) Dennoch hat man einen Inversionssatz.

Satz 5.2.2. Sei $C_c^2(G) = C_c(G) * C_c(G)$ und G habe abzählbare Umgebungsbasen (äquivalent: G metrisierbar). Dann gilt

$$f(1) = \sum_{[\pi]\in\hat{G}} d_\pi \operatorname{tr} \pi(f) \quad \text{für alle } f \in C_c^2(G) .$$

Beweis. Da $N_1(\pi) = d_\pi$ nach Theorem 5.1.7, folgt die Aussage sofort aus Theorem 4.3.4. □

5.2.3. Allgemeiner werden wir Inversionssätze ohne punktweise Konvergenz bekommen. Für $(\mathcal{H}, \pi)$ unitäre G-Darstellung und $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ schreibt man dazu

$$c_A(x) = \operatorname{tr}(A\pi(x)) \quad \text{für alle } x \in G .$$

Für $f \in \mathbf{L}^2(G)$ sei f_π die Projektion von f auf $\mathbf{L}^2(G)_\pi$. Schließlich sei $\chi_\pi(x) = \operatorname{tr}\pi(x)$ der *Charakter von* π.

Satz 5.2.4. Sei $f \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^2(G)$.

(i). Es gilt $f_\pi = d_\pi c_{\hat{f}(\pi)} = d_\pi f * \chi_\pi$ und

$$f = \sum_{[\pi]\in\hat{G}} f_\pi \quad \text{in} \quad \mathbf{L}^2(G) .$$

(ii). Es gilt

$$\|f\|^2 = \sum_{[\pi]\in\hat{G}} d_\pi \|\hat{f}(\pi)\|_{\mathcal{L}^2}^2 .$$

Beweis. Wegen Theorem 5.1.7 folgen alle Aussagen, sobald man

$$f_\pi = d_\pi c_{\hat{f}(\pi)} = d_\pi f * \chi_\pi$$

gezeigt hat. Sei $u_1, \ldots, u_n$ ($n = d_\pi$) eine Orthonormalbasis von π. Es gilt wegen Satz 5.1.5

$$\begin{aligned} f_\pi(x) &= n \sum_{i,j=1}^{n} (\phi^\pi_{u_j,u_i} \mid f) \cdot \phi^\pi_{u_j,u_i}(x) \\ &= n \sum_{i,j=1}^{n} \int (u_i|\pi(x)^* u_j) f(x)\, dx \cdot (u_j|\pi(x)u_i) \\ &= n \sum_{i,j=1}^{n} (u_i|\hat{f}(\pi)u_j)(u_j|\pi(x)u_i) \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{tr}(\hat{f}(\pi)\pi(x)) = \sum_{i=1}^{n} (u_i|\hat{f}(\pi)\pi(x)u_i) = \sum_{i,j=1}^{n} (u_i|\hat{f}(\pi)u_j)(u_j|\pi(x)u_i)\ .$$

Andererseits

$$\begin{aligned} f * \chi_\pi(x) &= \int f(y) \operatorname{tr}(\pi(y^{-1}x))\, dy \\ &= \int f(y) \operatorname{tr}(\pi(y)^*\pi(x))\, dx = \operatorname{tr}(\hat{f}(\pi)\pi(x))\ . \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Korollar 5.2.5. Für alle $[\pi], [\varrho] \in \widehat{G}$ gilt $\chi_\pi * \chi_\varrho = \delta_{[\pi],[\varrho]} d_\pi^{-1} \chi_\pi$.

Beweis. Da $f \mapsto d_\pi f * \chi_\pi$ die orthogonale Projektion auf $\mathbf{L}^2(G)_\pi$ ist, folgt die Behauptung. □

5.3 Klassenfunktionen

Definition 5.3.1. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Ist $f(yxy^{-1}) = f(x)$ für alle $x, y \in G$, so heißt f *zentral* oder eine *Klassenfunktion*. Man schreibt $ZC(G)$ bzw. $Z\mathbf{L}^p(G)$ für die stetigen bzw. p-integrierbaren Klassenfunktionen. Man sieht leicht ein, dass dies gerade die Zentren der Faltungsalgebren $C(G)$ bzw. $\mathbf{L}^p(G)$ sind. (Wir werden diese Charakterisierung aber nicht benötigen.)

Satz 5.3.2. Die Familie $(\chi_\pi)_{[\pi]\in\widehat{G}}$ ist eine Orthonormalbasis von $Z\mathbf{L}^2(G)$.

Lemma 5.3.3. Sei $f \in Z\mathbf{L}^1(G)$ und $[\pi] \in \widehat{G}$. Dann gilt $d_\pi f * \chi_\pi = (\chi_\pi|f) \cdot \chi_\pi$.

Beweis. Es gilt für alle $x \in G$

$$\begin{aligned}\pi(x)\hat{f}(\pi)\pi(x)^{-1} &= \int f(y)\pi(xy^{-1}x^{-1})\,dy\\ &= \int f(xyx^{-1})\pi(y^{-1})\,dy = \hat{f}(\pi)\ ,\end{aligned}$$

also ist $\hat{f}(\pi) \in C_\pi$ und folglich $\hat{f}(\pi) = \frac{\operatorname{tr}\hat{f}(\pi)}{d_\pi} \cdot 1$. Somit

$$d_\pi f * \chi_\pi(x) = d_\pi c_{\hat{f}(\pi)}(x) = d_\pi \operatorname{tr}(\hat{f}(\pi)\pi(x)) = \operatorname{tr}\hat{f}(\pi) \cdot \chi_\pi(x)$$

und aus

$$\operatorname{tr}\hat{f}(\pi) = \int f(y)\overline{\operatorname{tr}\pi(y)}\,dy = (\chi_\pi|f)$$

folgt die Behauptung. □

Beweis von Satz 5.3.2. Es ist klar, dass die χ_π Klassenfunktionen sind. Aus Korollar 5.2.5 und Lemma 5.3.3 folgt

$$(\chi_\pi|\chi_\varrho) \cdot \chi_\pi = d_\pi \chi_\varrho * \chi_\pi = \delta_{[\pi],[\varrho]} \cdot \chi_\pi\ ,$$

also sind sie orthogonal. Aus Satz 5.2.4 (i) und Lemma 5.3.3 folgt für alle Funktionen $f \in Z\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^2(G)$, dass $f = \sum_{[\pi]} d_\pi f * \chi_\pi = \sum_{[\pi]}(\chi_\pi|f) \cdot \chi_\pi$ in $\mathbf{L}^2(G)$. Dies zeigt die Behauptung. □

Korollar 5.3.4. Sei G endlich. Es gilt $|\widehat{G}| = |G/G|$ (Anzahl der irreduziblen Darstellungen = Anzahl der Konjugationsklassen).

Beweis. Sowohl (χ_π) als auch die charakteristischen Funktionen $(1_{[g]})_{[g]\in G/G}$ bilden eine Basis von $Z\mathbf{L}^2(G)$. □

In Anwendungen (siehe den Fall $G = \mathrm{SU}(2)$ weiter unten) muss man die Konvergenz von Fourierreihen verbessern (so dass die Konvergenz gleichmäßig wird). Der Schlüssel ist das folgende Lemma.

Lemma 5.3.5. Sei $f \in \mathbf{L}^p(G)$ für ein $1 \leqslant p < \infty$ und $g \in \mathrm{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty(G)$. Dann gilt

$$f * g * g = \sum\nolimits_{[\pi]\in\widehat{G}} d_\pi (f * g * g) * \chi_\pi$$

gleichmäßig auf G.

Beweis. Es gilt $g \in \mathbf{L}^q(G)$ für alle $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Nach Satz 1.5.7 sind $f*g, f*g*g \in C(G)$ mit $\|f * g * g\|_\infty \leqslant \|f * g\|_2\|g\|_2$. Für jede endliche Teilmenge $A \subset \widehat{G}$ gilt (da χ_π zentral sind)

$$\begin{aligned}&\Big[\sum\nolimits_{[\pi]\in A} d_\pi f * g * \chi_\pi\Big] * \Big[\sum\nolimits_{[\varrho]\in A} d_\varrho g * \chi_\varrho\Big]\\ &\qquad = \sum\nolimits_{[\pi],[\varrho]\in\widehat{G}} d_\pi d_\varrho f * g * g * \chi_\pi * \chi_\varrho\end{aligned}$$

$$= \sum_{[\pi]\in\hat{G}} d_\pi f * g * g * \chi_\pi \ ,$$

wobei im letzten Schritt Korollar 5.2.5 verwendet wurde. Die Behauptung folgt nun aus obiger Abschätzung und Satz 5.2.4 (i). □

Satz 5.3.6. Es existiert eine Fasteins (ψ_U), die in $ZC(G)$ enthalten ist. Es sei $f \in \mathbf{L}^p(G)$ für ein $1 \leqslant p < \infty$ und definiere $c_U(\pi) = d_\pi^{-1}(\chi_\pi|\psi_U)$. Dann gilt

$$f * \psi_U = \sum_{[\pi]\in\hat{G}} c_U(\pi) d_\pi f * \chi_\pi$$

gleichmäßig auf G.

Lemma 5.3.7. Die Gruppe G besitzt eine Basis von 1-Umgebungen aus konjugationsinvarianten Mengen.

Beweis. Sei U eine 1-Umgebung und V eine symmetrische 1-Umgebung mit $VVV \subset U$. Es gibt $x_1, \dots, x_n$ mit $G = \bigcup_{j=1}^n Vx_j$. Setze $W = \bigcap_{j=1}^n x_j^{-1}Vx_j$. Sei $x \in G$. Dann ist $x \in Vx_j$ für ein j und somit $xWx^{-1} \subset Vx_jWx_j^{-1}V \subset VVV \subset U$. Es folgt, dass die konjugationsinvariante 1-Umgebung $X = \bigcup_{x\in G} xWx^{-1}$ in U enthalten ist. □

Beweis von Satz 5.3.6. Sei $\mathcal{U}$ eine Basis konjugationsinvarianter 1-Umgebungen. Für $U \in \mathcal{U}$ wähle $V \in \mathcal{U}$ mit $VV \subset U$ und definiere $\psi_U = g * g$, wobei $g = \mathrm{vol}(V)^{-1}1_V$. Da V konjugationsinvariant ist, ist g eine Klassenfunktion und somit auch ψ_U. Nach Definition 1.5.10 ist (ψ_U) eine Fasteins.
Es gilt $\psi_U * \chi_\pi = c_U(\pi)\chi_\pi$ nach Korollar 5.2.5. Nun folgt aus Lemma 5.3.5, dass

$$f * \psi_U = \sum_{[\pi]\in\hat{G}} d_\pi f * \psi_U * \chi_\pi = \sum_{[\pi]\in\hat{G}} c_U(\pi) d_\pi f * \chi_\pi$$

gleichmäßig auf G. □

Korollar 5.3.8. Der lineare Aufspann von $(\chi_\pi)_{[\pi]\in\hat{G}}$ ist dicht in den Räumen $ZC(G)$ und $Z\mathbf{L}^p(G)$ für alle $1 \leqslant p < \infty$. Insbesondere ist $ZC(G)$ dicht in $Z\mathbf{L}^p(G)$ für alle $1 \leqslant p < \infty$.

Beweis. Sei $f \in ZC(G)$ oder $f \in \mathbf{L}^p(G)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Wähle eine zentrale Fasteins wie oben. Nach Satz 1.5.9 gilt $f * \psi_U \to f$ in der passenden Norm. Es gilt weiter $d_\pi(f * \psi_U) * \chi_\pi = (\chi_\pi|f * \psi_U) \cdot \chi_\pi$, also liegt $f * \psi_U$ nach Satz 5.3.6 im gleichmäßig abgeschlossenen linearen Aufspann der (χ_π). □

5.4 $\mathbf{L}^2(\mathrm{SU}(2))$

5.4.1. Sei $G = \mathrm{SU}(2)$ die Menge der unitären 2×2 komplexen Matrizen von Determinante 1. Die Elemente von G sind der Form

$$g = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = \det g = 1 \ .$$

Die Abbildung $G \to \mathbb{S}^3 : g \mapsto \binom{a}{b}$ identifiziert SU(2) mit der Einheitssphäre $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2$.
Die Gruppe G wirkt auf $\mathbb{C}^2$ durch Linksmultiplikation und lässt $\mathbb{S}^3$ invariant. Man sieht sofort, dass die obige Abbildung G-äquivariant ist. Es folgt leicht, dass sie das Haarmaß von G mit dem normalisierten Riemannschen Maß σ auf $\mathbb{S}^3$ identifiziert.

5.4.2. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{P}_m$ der Raum der homogenen Polynome vom Grad m. Man kann $\mathcal{P}_m$ als Unterraum von $\mathbf{L}^2(\mathbb{S}^3)$ auffassen. Die linksreguläre Darstellung L lässt $\mathcal{P}_m$ invariant. Sei $\pi_m = L|_{\mathcal{P}_m}$. Wir zeigen, dass π_m irreduzibel ist.

Satz 5.4.3. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist π_m irreduzibel. Ist $n \neq m$, so sind π_m und π_n inäquivalent.

Lemma 5.4.4. Die Operatoren $w\partial_z$ und $z\partial_w$ lassen jeden invarianten Unterraum von $\mathcal{P}_m$ invariant.

Beweis. Seien $g_t = \left(\begin{smallmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)$, $h_t = \left(\begin{smallmatrix} \cos t & i\sin t \\ i\sin t & \cos t \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt

$$\frac{d}{dt}\pi_m(g_t)p(z,w)\bigg|_{t=0} = \nabla p(z,w) \cdot \begin{pmatrix} w \\ -z \end{pmatrix} = w\partial_z p - z\partial_w p \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\pi_m(g_t)p(z,w)\bigg|_{t=0} = \nabla p(z,w) \cdot \begin{pmatrix} -iw \\ -iz \end{pmatrix} = -iw\partial_z p - iz\partial_w p \ .$$

Damit liegen $z\partial_w$ und $w\partial_z$ im abgeschlossenen linearen Aufspann der Teilmenge $\pi_m(\mathrm{SU}(2)) \subset \mathcal{L}(\mathcal{P}_m)$. □

Beweis von Satz 5.4.3. Da $\dim \mathcal{P}_m = m + 1$, sind die Darstellungen paarweise inäquivalent. Sei $U \subset \mathcal{P}_m$ ein invarianter Unterraum und $p \in U$, $p \neq 0$. Schreibe $p = \sum_{j=0}^{m} c_j z^j w^{m-j}$ und sei j maximal mit $c_j \neq 0$. Dann gilt $(w\partial_z)^j p = j! c_j w^m$, also $w^m \in U$. Dann ist aber auch

$$(z\partial_w)^a w^m = m(m-1)\cdots(m-a+1)z^a w^{m-a} \in U \quad \text{für alle } \ 0 \leqslant a \leqslant m \ .$$

Es folgt $U = \mathcal{P}_m$. □

Korollar 5.4.5. Für $m \neq n$ gilt $\mathcal{P}_m \perp \mathcal{P}_n$.

Beweis. Die Räume gehören zu unterschiedlichen isotypischen Komponenten von $\mathbf{L}^2(\mathbb{S}^3)$, also folgt die Behauptung aus Satz 5.1.3. □

5.4.6. Die Matrizen $h_\theta = \left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{smallmatrix}\right)$, $\theta \in [0, \pi[$, sind offenbar paarweise nicht konjugiert. Andererseits folgt aus der unitären Diagonalisierbarkeit normaler Matrizen, dass jede Konjugationsklasse von SU(2) ein Element h_θ enthält. Es ergibt sich der folgende Satz.

Satz 5.4.7. Die Abbildung $ZC(\mathrm{SU}(2)) \to C([0,\pi]) : f \mapsto f(\theta)$, $f(\theta) = f(h_\theta)$, ist ein isometrischer Isomorphismus.

5.4.8. Sei $\chi_m = \chi_{\pi_m}$. Die Polynome $z^j w^{m-j}$ bilden eine Basis von $\mathcal{P}_m$ und $\pi_m(h_\theta)z^j w^{m-j} = e^{i(m-2j)\theta}$. Folglich gilt

$$\chi_m(\theta) = \operatorname{tr}\pi_m(h_\theta) = e^{im\theta} + e^{i(m-2)\theta} + \cdots + e^{-im\theta} \ .$$

Es folgt

$$\chi_0 = 1 \ , \ (\chi_m - \chi_{m-2})(\theta) = e^{im\theta} + e^{-im\theta} = 2\cos(m\theta) \ ,$$

wobei wir $\chi_{-1} = 0$ setzen.

Theorem 5.4.9. Die (π_m), $m \geqslant 0$, sind ein Repräsentantensystem der unitären irreduziblen SU(2)-Darstellungen und

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{S}^3) = \bigoplus_{m=0}^{\infty}(m+1)\mathcal{P}_m$$

als Hilbertsumme unitärer SU(2)-Darstellungen. Weiterhin ist $\pi_m \cong \overline{\pi}_m$.

Beweis. Der Aufspann der Funktionen $(\cos(m\theta))$ ist dicht in $C([0,\pi])$. Aus Satz 5.4.7 und Korollar 5.3.8 folgt, dass der Aufspann von (χ_m) in $Z\mathbf{L}^2(\mathrm{SU}(2))$ dicht ist. Da die Menge aller Charaktere orthonormal ist, folgt, dass (χ_m) bereits alle Charaktere sind. Damit sind (π_m) bereits ein Repräsentatensystem irreduzibler unitärer Darstellungen. Die Behauptung folgt nun aus Theorem 5.1.7 und daraus, dass χ_m reellwertig ist für alle m. □

Man kann die isotypischen Komponenten von $\mathbf{L}^2(\mathbb{S}^3)$ genauer analysieren. Dafür muss man die Standardbasis von $\mathcal{P}_m$ orthonormalisieren.

Lemma 5.4.10. Seien $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{S}^3)$, $m \in \mathbb{N}$. Setze $F_m(rx) = r^m f(x)$ für alle $r \geqslant 0$, $x \in \mathbb{S}^3$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{S}^3} f\,d\sigma = \frac{1}{\pi^2\Gamma(\frac{m}{2}+2)}\int_{\mathbb{C}^2} F_m(z)e^{-\|z\|^2}\,dz \ ,$$

wobei dz das Lebesguemaß auf $\mathbb{C}^2$ sei.

Beweis. Durch Integration in Polarkoordinaten folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{C}^2} F_m(z)e^{-\|z\|^2}\,dz &= 2\pi^2\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^3} F_m(rx)\,d\sigma(x)\,e^{-r^2}r^3\,dr \\ &= \pi^2\Gamma(\tfrac{m}{2}+2)\int_{\mathbb{S}^3} f\,d\sigma\end{aligned}$$

denn $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = 2\int_0^\infty r^{2x-1}e^{-r^2}\,dr$ für alle $x > 0$. □

Lemma 5.4.11. Sei $p_{ab}(z,w) = z^a w^b$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{S}^3}\overline{p_{ab}}p_{cd}\,d\sigma = \delta_{ac}\delta_{bd}\cdot\frac{a!b!}{(a+b+1)!} \ .$$

Beweis. Nach dem vorherigen Lemma gilt

$$\int_{\mathbb{S}^3} \overline{p_{ab}} p_{cd}\, d\sigma = \frac{1}{\pi^2 \Gamma(\frac{1}{2}(a+b+c+d)+2)} \cdot \int \overline{z}^a z^c e^{-|z|^2}\, dz \cdot \int \overline{w}^b w^d e^{-|w|^2}\, dw \,.$$

Weiterhin

$$\begin{aligned} \int \overline{z}^a z^c e^{-|z|^2}\, dz &= \int_0^{2\pi} e^{(c-a)i\theta}\, d\theta \cdot \int_0^\infty r^{a+c+1} e^{-r^2}\, dr \\ &= \pi \delta_{ac} \Gamma(\tfrac{1}{2}(a+c)+1) = \pi a! \delta_{ac} \,. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt aus $\Gamma(a+b+2) = (a+b+1)!$. □

Korollar 5.4.12. Seien p, q homogene Polynome vom Grad m. Es gilt

$$(p|q)_{\mathbf{L}^2(\mathbb{S}^3)} = \frac{1}{(m+1)!} \cdot \overline{p}(\partial)(q)(0) \,.$$

Der Ausdruck $\overline{p}(\partial)q(0)$ heißt 'Fischer-Skalarprodukt'.

Beweis. Offenbar hat $\partial^{(a,b)} z^c w^d$ genau dann einen konstanten Term $\neq 0$, wenn $(a,b) = (c,d)$. Man rechnet $\partial^{(a,b)} z^a w^b = a!b!$. Die Behauptung folgt. □

5.4.13. Sei nun $m \in \mathbb{N}$ fest. Die Polynome

$$e_j(z,w) = \sqrt{\frac{(m+1)!}{j!(m-j)!}} z^j w^{m-j} \ , \ j = 0, \dots, m \,,$$

bilden eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_m$. Zu $\binom{a}{b} \in \mathbb{S}^3$ sei g_{ab} das entsprechende Element von SU(2) (mit erster Spalte $\binom{a}{b}$). Setze $\pi_m(a,b) = \pi_m(g_{ab})$ und $\pi_m^{jq}(a,b) = (e_j | \pi_m(a,b) e_q)$. Es gilt $g_{ab}^{-1} = g_{\overline{a},-b}$ und folglich

$$\pi_m(a,b) z^q w^{m-q} = (\overline{a}z + \overline{b}w)^q (-bz + aw)^{m-q} \,.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \sqrt{\frac{q!(m-q)!}{j!(m-j)!}} \pi_m^{jq}(a,b) z^j w^{m-j} &= \sqrt{\frac{q!(m-q)!}{(m+1)!}} \sum_{j=0}^m \pi_m^{jq}(a,b) e_j(z,w) \\ &= \sqrt{\frac{q!(m-q)!}{(m+1)!}} (\pi_m(a,b) e_q)(z,w) \\ &= (\overline{a}z + \overline{b}w)^q (-bz + aw)^{m-q} \,. \end{aligned}$$

Diese Formel erlaubt es, π_m^{jq} durch Koeffizientenvergleich auszurechnen.

Satz 5.4.14. Sei $\mathcal{H}_{p,q}$ der lineare Aufspann von $\pi_{p+q}^{j,q}$, $j = 0, \dots, p+q$. Dann ist jede Darstellung $\mathcal{H}_{p,q}$ äquivalent zu $\mathcal{P}_{p+q}$ und $\mathbf{L}^2(\mathbb{S}^3)_{\pi_m} = \bigoplus_{p+q=m} \mathcal{H}_{p,q}$ ist eine Menge von harmonischen Polynomen in a, b.

Beweis. In Korollar 5.1.6 wurde bereits gezeigt, dass $\mathcal{P}_{p+q}$ zu $\mathcal{H}_{p,q}$ äquivalent ist (da $\overline{\pi}_m \cong \pi_m$). Aus Theorem 5.1.7 und Satz 5.1.5 folgt die Zerlegung der isotypischen Komponente. In der obigen Formel ist für jedes feste Paar (z, w) die rechte Seite harmonisch in (a, b), da mit $a = x_1 + ix_2$ und $b = x_3 + ix_4$ gilt $\sum_{j=1}^4 \partial_j^2 = 4(\partial_a \partial_{\overline{a}} + \partial_b \partial_{\overline{b}})$. Es folgt, dass π_m^{jq} harmonisch ist. □

5.4.15. Zusammenfassend kann man also sagen, dass einem die Darstellungstheorie von SU(2) die übliche Zerlegung von $\mathbf{L}^2(\mathbb{S}^3)$ in harmonische Polynome liefert, sogar in verfeinerter Form: Die Funktionen in $\mathcal{H}_{p,q}$ haben sind als Polynome in a, b und $\overline{a}, \overline{b}$ homogen vom Bigrad (p, q).

Literatur

[Car76] P. Cartier. Vecteurs différentiables dans les représentations unitaires des groupes de Lie. In *Séminaire Bourbaki (1974/1975), Exp. No. 454*, pages 20–34. Lecture Notes in Math., Vol. 514. Springer, Berlin, 1976.

[DE09] A. Deitmar and S. Echterhoff. *Principles of Harmonic Analysis*. Universitext. Springer, New York, 2009.

[Fol95] G.B. Folland. *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[Joh05] T.R. Johansen. Representation theory of finite and compact groups. Unpublished lecture notes, 2005.

Stichwortverzeichnis