Aufgabe 1 (Greensche Formeln — 5 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $A \subset G$ ein Greenscher Bereich und seien $\phi, \psi : G \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$-Funktionen. Man schreibt $\Delta\phi = \operatorname{div} \nabla\phi$ für den Laplaceoperator und $\frac{\partial\phi}{\partial\nu} = \langle \nabla\phi, \nu\rangle$ für die Normalenableitung. Zeigen Sie die Greenschen Formeln:

$$(a) \quad \int_A \big(\phi \cdot \Delta\psi + \langle \nabla\phi, \nabla\psi\rangle\big)\, dx = \int_{\partial A} \phi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\, d\sigma$$

$$(b) \quad \int_A (\phi \cdot \Delta\psi - \Delta\phi \cdot \psi)\, dx = \int_{\partial A} \Big(\phi \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \frac{\partial\phi}{\partial\nu} \cdot \psi\Big)\, d\sigma$$

Aufgabe 2 (Ein verblüffendes Integral — 5 Punkte)
Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ ein Greenscher Bereich, der 0 im Inneren enthält. Für alle $x \in \partial_{reg} A$ sei $\alpha(x) \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen dem Ortvektor x und dem Normalenvektor $\nu(x)$. Zeigen Sie

$$\int_{\partial A} \frac{\cos\alpha(x)}{\|x\|^{n-1}}\, d\sigma(x) = \omega_n\,,$$

wobei $\omega_n = A_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ die Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel ist.
Hinweis: Drücken Sie $\cos\alpha(x)$ formelmäßig durch x und $\nu(x)$ aus. Betrachten Sie das Vektorfeld $F(x) = \frac{x}{\|x\|^n}$ und für kleine $\varepsilon > 0$ den Greenschen Bereich $A_\varepsilon = A \setminus U_\varepsilon(0)$. Wenden Sie hierauf den Gaußschen Integralsatz an.

Aufgabe 3 (Wachstum und Integral der Divergenz — 5 Punkte)
Sei $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld. Es gebe ein $\delta > 0$, so dass für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\lim_{\|x\|\to 0} \|x\|^{n-1} f_k = 0 \quad \text{und} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|^{n+\delta} |D_k f_k(x)| < \infty\,.$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} F(x)\, dx = 0\,,$$

wobei das Integral absolut konvergiert. (Die absolute Konvergenz ist zu begründen!)
Hinweis: Betrachten Sie $\int_{\|x\|<R} \operatorname{div} F(x)\, dx$ und den Limes $R \to \infty$.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (Elektrische Ladung innerhalb und außerhalb einer Kugel — mündlich)
Das $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stelle das elektrische Feld mit Ladungsdichte $\varrho = \operatorname{div} E$ dar. Wir nehmen an, ϱ sei die Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugelschale vom Radius $R > 0$. D.h., $\|E\|$ sei rotationssymmetrisch, $E(x)$ sei proportional zum Ortsvektor x und es gebe ein $\varepsilon > 0$, so dass $\varrho(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $\|x\| \geqslant R + \varepsilon$ oder $\|x\| \leqslant R - \varepsilon$.

(a) Zeigen Sie, dass $E(x) = 0$ für $\|x\| \leqslant R - \varepsilon$.

(b) Sei $Q(r) = \int_{B_r(0)} \varrho(x)\, dx$ die Ladung und $Q = Q(R + \varepsilon)$ die Gesamtladung. Zeigen Sie, dass $E(x) = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \frac{x}{r}$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ mit $r = \|x\| \geqslant R + \varepsilon$.

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 8.12.2008*, vor der Vorlesung ab.
Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 17.12.2008*, vor.