Dr. A. Alldridge: **Mathematik für Physiker C** (WS 2008/9), Blatt 5

Aufgabe 1 (Picardsche Iteration — 5 Punkte)
Man bestimme für die Anfangswertaufgabe

$$\dot{x}_1 = x_2 x_3 \, , \; \dot{x}_2 = -x_1 x_3 \, , \; \dot{x}_3 = 2 \, , \; x_1(0) = 0 \, , \; x_2(0) = 1 \, , \; x_3(0) = 0$$

die Picardsche Iterationsfolge $\phi_n(t)$ und ihren Grenzwert.

Aufgabe 2 (Eindeutigkeit von Lösungen — 5 Punkte)
Man betrachte die DGL $xy' = 2y$, $y = y(x)$. Bestimmen Sie alle Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$, für die die zugehörige Anfangswertaufgabe

(a) keine Lösung hat, (b) unendlich viele Lösungen hat, (c) eine eindeutige Lösung hat.

Aufgabe 3 (Lokale vs. globale Lipschitz-Bedingung — 5 Punkte)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Genügt f lokal einer Lipschitz-Bedingung, d.h. für alle $x \in K$ existiert ein $\delta > 0$ und ein $L_x < \infty$, so dass

$$|f(z) - f(y)| \leqslant L_x \cdot \|z - y\| \quad \text{für alle } \; y, z \in U_\delta(x) \, ,$$

so genügt f schon global einer Lipschitzbedingung, d.h. es gibt $L > 0$, so dass

$$|f(z) - f(y)| \leqslant L \cdot \|z - y\| \quad \text{für alle } \; y, z \in K \, .$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$F : K \times K \to \mathbb{R} \, , \; F(y, z) = \begin{cases} \frac{\|f(y) - f(z)\|}{\|y - z\|} & y \neq z \, , \\ 0 & y = z \, . \end{cases}$$

Aufgabe 4 (Gronwall-Lemma — mündlich)
Seien $a \in \mathbb{R}$, $T > t_0$ und stetige Funktionen $f, b : [t_0, T[\to \mathbb{R}$ gegeben, so dass $b \geqslant 0$ ist. Man definiere $g(t) = a + \int_{t_0}^t b(s) f(s) \, ds$. Zeigen Sie:

$$f(t) \leqslant g(t) \; (\forall t \in [t_0, T[) \; \Rightarrow \; f(t) \leqslant a \cdot \exp \int_{t_0}^t b(s) \, ds \; (\forall t \in [t_0, T[) \, .$$

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Betrachten Sie $g(t)$ und $h(t) = g'(t) - b(t) g(t)$.
(b) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $y'(t) - b(t) y(t) = h(t)$, $y(t_0) = a$.
(c) Zeigen Sie $y(t) \leqslant a \cdot \exp \int_{t_0}^t b(s) \, ds$ und vergleichen Sie y und g.

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 17.11.2008*, vor der Vorlesung ab.
Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 26.11.2008*, vor.