Dr. A. Alldridge: **Mathematik für Physiker C** (WS 2008/9), Blatt 3

Aufgabe 1 (Residuenkalkül I, rationale Funktionen — 5 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Satz 18.11.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$.
(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.
(c) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)^2}$.

Aufgabe 2 (Residuenkalkül II, scharfe Abfallbedingungen — 5 Punkte)
Berechnen Sie jeweils das Integral $\int_0^\infty f(x)\,dx$, indem Sie die Funktion $g(z)$ in der oberen Halbebene betrachten und ausnutzen, dass der Realteil von g gerade und der Imaginärteil von g ungerade ist, oder umgekehrt. Achten Sie darauf, die Voraussetzungen von Satz 18.12 bzw. Satz 18.13 zu überprüfen.

(a) $f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$, $g(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$.
(b) $f(x) = \frac{x \sin \omega x}{x^2+a}$, $g(z) = \frac{z e^{i\omega z}}{z^2+a}$, $\omega, a > 0$.

Aufgabe 3 (Residuenkalkül III, Integration in der geschlitzten Ebene — 5 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $0 < \alpha < 1$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} .$$

Wenden Sie dafür Satz 18.14 aus der Vorlesung an. Dabei wird z^α für $z = re^{i\theta}$ mit $0 < \theta < 2\pi$ definiert durch $z^\alpha = re^{ir\theta}$. Inbesondere ist $(-1)^\alpha = e^{i\pi\alpha}$.

Aufgabe 4 (Exponentialfunktion einer Matrix — mündlich)
Berechnen Sie e^A für die folgenden Matrizen A .

(a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben.
(b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben.
(c) $A = \lambda E + B$, wobei e^B als bekannt vorausgesetzt wird.
(d) Die Matrix A , die den Verschiebeoperator S ,

$$S(e_1) = 0\,,\ S(e_{j+1}) = e_j$$

in der Basis e_j darstellt.

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 3.11.2008*, vor der Vorlesung ab.
Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 11.11.2008*, vor.
Die Übung am 3.11.2008 fällt aus.