UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Institut für Mathematik

Dr. A. Alldridge: **Mathematik für Physiker C** (WS 2008/9), Blatt 2

Aufgabe 1 (Wachstum holomorpher Funktionen — 5 Punkte)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Es gebe Konstanten $A, B \geqslant 0$, so dass

$$|f(z)| \leqslant A|z| + B \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} .$$

Zeigen Sie, dass f affin ist, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Hinweis: Verwenden Sie z.B. die Cauchy-Ungleichungen oder den Satz von Liouville.

Aufgabe 2 (Laurententwicklung — 5 Punkte)
Bestimmen Sie für die Funktion f die Laurententwicklung um die isolierte Singularität z_0. Bestimmen Sie weiterhin die Art und im Fall eines Pols die Ordnung der Singularität, sowie das maximale Konvergenzgebiet der jeweiligen Reihe.

(a) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z_0 = 1$.
(b) $f(z) = (z-3) \sin \frac{1}{z+2}$, $z_0 = -2$.
(c) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = -2$.
(d) $f(z) = \frac{z^2 e^{1/z}}{1-z}$, $z_0 = 1$.

Aufgabe 3 (Typen von Singulariäten — 5 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphen Funktionen f. Bestimmen Sie jeweils, ob die Singularität hebbar ist, und andernfalls, ob es sich um einen Pol oder eine wesentliche Singularität handelt. Bestimmen Sie im Falle eines Pols die Ordnung.

(a) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$
(b) $f(z) = z^5 e^{\frac{1}{z^2}}$
(c) $f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right)$
(d) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

Aufgabe 4 (Residuensatz — mündlich)
Berechnen Sie mit dem Residuensatz die folgenden Integrale entlang der Kurve

$$\Gamma \,:\, |z| = 3 ,$$

die einmal positiv orientiert durchlaufen wird.

(a) $\oint_\Gamma \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\, dz$
(b) $\oint_\Gamma \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\, dz$

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 27.10.2008*, vor der Vorlesung ab.
Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 29.10.2008*, vor.