Aufgabe 1 (Trennung der Variablen — 5 Punkte)
Bestimmen Sie alle harmonischen Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die für $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ der Form $u(x,y) = f(x)g(y)$ sind, wobei $f(x) \neq 0$ und $g(y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ seien.
Anleitung:

(a) Zeigen Sie: Falls u harmonisch ist, gilt

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} \quad \text{für alle } \ x, y \in \mathbb{R} \,.$$

(b) Schließen Sie, dass beide Seiten der obigen Gleichung konstant sind.

(c) Lösen Sie das sich ergebende System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. (Achtung, unterscheiden Sie verschiedene Fälle, je nach den Werten der Konstante aus (b)!)

Aufgabe 2 (Normalenableitung der Greenschen Funktion in $\mathbb{R}^2$ — 5 Punkte)
Es sei $G \equiv G(x,y)$ die Greensche Funktion für das Gebiet $U_R(0) \subset \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie (analog zum Beweis von Satz 25.12 für $n \geqslant 3$), dass für die Normalenableitung gilt

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) = \frac{\|x\|^2 - R^2}{2\pi R \cdot \|x-y\|^2} \quad \text{für} \quad \|y\| = R \,.$$

Aufgabe 3 (Dirichlet- und Neumannproblem für die Poissongleichung — 5 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand $\partial\Omega$. Es gilt die erste Greensche Formel

$$\int_\Omega \big(v \cdot \Delta w + \langle \nabla v, \nabla w \rangle\big)\, d^n x = \int_{\partial\Omega} v \cdot \frac{\partial w}{\partial \nu}\, d\sigma \quad \text{für alle } \ v, w \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \,.$$

Seien $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$. Zeigen Sie mit Hilfe der obigen Formel:

(a) Das inhomogene Dirichletproblem für die Poissongleichung,

$$\Delta u = f \,,\ u \equiv \varphi \text{ auf } \partial\Omega \,,\ u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \,,$$

hat höchstens eine Lösung.

(b) Zwei Lösungen des Neumannproblems für die Poissongleichung,

$$\Delta u = f \,,\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv \varphi \text{ auf } \partial\Omega \,,\ u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \,,$$

unterscheiden sich höchstens um eine Kostante.

Hinweis: Setzen Sie in beiden Fällen $v = w = u_1 - u_2$ in der Greenschen Formel.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (Die Poissongleichung als Euler–Lagrange-Gleichung — mündlich)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränkter Greenscher Bereich. Seien $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ und $\varphi \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)$. Sei $Z_n = \left\{ u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \;\middle|\; u \equiv \varphi \text{ auf } \partial\Omega \right\}$ und J das Funktional

$$J(u) = \int_\Omega \left(\tfrac{1}{2} \|\nabla u\|^2 - f(x)u(x) \right) d^n x \, .$$

Zeigen Sie, dass die Poissongleichung $\Delta u = f$ die Euler–Lagrange-Gleichung für das n-dimensionale Variationsproblem $J(u) \to \min$, $u \in Z_n$, ist.

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 12.1.2008*, vor der Vorlesung ab.
Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 21.1.2009*, vor.