Dr. A. Alldridge: **Mathematik für Physiker C** (WS 2008/9), Blatt 10

Aufgabe 1 (Konjugiert harmonische Funktionen — 5 Punkte)
Sei $D \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen.

(a) Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, als $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ zerlegt, wobei $u, v : D \to \mathbb{R}$ sind. Zeigen Sie: Die Funktionen u, v sind harmonisch. Die Funktion v heißt zu u *konjugiert harmonische Funktion*.
Hinweis: Benutzen Sie die Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen.

(b) Sei $u : D \to \mathbb{R}$ harmonisch und D ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Zeigen Sie, dass es ein holomorphes f mit $f = u + iv$ gibt. (D.h. $u = \operatorname{Re} f$.)
Hinweis: Sei $g(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y)$. Man zeige, dass g holomorph ist und benutze, dass g eine holomorphe Stammfunktion hat (Satz 16.22).

Aufgabe 2 (Harmonische und nicht harmonische Funktionen — 5 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe von direkten Rechnungen oder mit Aufgabe 1, welche der folgenden Funktionen $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ harmonisch sind und welche nicht.

$$\text{(a) } h(x,y) = x^2 - y^2 \quad \text{(b) } h(x,y) = \operatorname{Im}\left(\sin^{12}(x-iy) + e^{cos^4(x+iy)}\right)$$
$$\text{(c) } h(x,y) = \sin(xy) + \cos(xy) \quad \text{(d) } h(x,y) = \operatorname{Re}\left(e^{(x+iy)(x-iy)} + \cos^7(x+iy)\right).$$

Aufgabe 3 (Niveaumengen konjugiert harmonischer Funktionen — 5 Punkte)
Seien $D \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, sowie $u, v : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Man betrachte das Vektorfeld $F = \nabla u$. Zeigen Sie, dass die Niveaumengen $\Gamma : v(x,y) = a$, $a \in \mathbb{R}$, Trajektorien von F sind.
Hinweis: Zeigen Sie, dass aus den Cauchy–Riemann-Differentialgleichungen folgt, dass $\langle \nabla u, \nabla v \rangle = 0$ gilt.

Aufgabe 4 (Mehr zu Trajektorien und Niveaumengen — mündlich)
Benutzen Sie Aufgabe 3, um die Trajektorien von ∇u für die folgenden harmonischen Funktionen $u : U \to \mathbb{R}$ zu bestimmen:

(a) $u(x,y) = x^2 - y^2$, $U : x^2 + y^2 > 0$.
(b) $u(x,y) = e^x \cos y$, $U = \mathbb{R}^2$.
(c) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $U : x^2 + y^2 > 0$.

Bitte geben Sie die Übungsaufgaben am *Montag, 5.1.2008*, vor der Vorlesung ab.
Bereiten Sie die mündliche Aufgabe zur Übung am *Mittwoch, 14.1.2009*, vor.
Ich wünsche Ihnen ein Frohes Fest und einen guten Start ins Neue Jahr!