Analysis IV
Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Dr. rer. nat. A. Alldridge

16. März 2012

Inhalt

1 Daniell-Integrationstheorie

1.1 Integrierbare Funktionen

Definition 1.1.1. Es sei X ein metrischer Raum. Dann heißt X *lokal kompakt*, wenn es für jedes $x \in X$ ein $\infty > r_0 > 0$ gibt, so dass die abgeschlossenen Kugeln $B_r(x)$ mit $0 < r \leqslant r_0 < \infty$ allesamt kompakt sind.
Ist X beliebig, so sei $\mathcal{C}_c(X)$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$, deren *Träger*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}} \subset X$$

kompakt ist.
Weiter seien $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ und $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$; sei $\mathcal{F}(X)$ die Menge *aller* Funktionen $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ oder $A \subset \overline{\mathbb{R}}$, schreiben wir auch $\mathcal{F}(X; A)$ für Funktionen mit Werten in A. Für $\mathcal{F}(X; [0, \infty])$ schreiben wir auch $\mathcal{F}_+(X)$. Man definiert für alle $z \in \mathbb{C}$, $\lambda > 0$,

$$\pm\infty + z = z + \pm\infty = \pm\infty\,,\ \lambda \cdot \infty = \infty\,,\ |\infty| = \infty\,,\ \operatorname{Re}(\pm\infty) = \pm\infty\,,\ \operatorname{Im}(\pm\infty) = 0\,,$$
$$0 \cdot \pm\infty = 0\,,\ \pm\infty + \pm\infty = \pm\infty\,,\ \pm\infty - z = \pm\infty + (-z)\,.$$

Man beachte, dass die Summe von ∞ und $-\infty$ nicht definiert ist. Um auch solche Fälle zu behandeln und vernünftige algebraische Gleichungen zu erhalten, müsste man zwei verschiedene Additionen auf $\overline{\mathbb{R}}$ einführen. Würde man $-\infty$ zu $\overline{\mathbb{C}}$ hinzunehmen, könnte man Konvergenz in $\overline{\mathbb{C}}$ nicht vernünftig definieren.

Beispiel 1.1.2. Jeder endlich-dimensionale Vektorraum mit der von einer beliebigen Norm induzierten Metrik ist lokal kompakt (Heine–Borel).
Ist X irgendeine Menge mit der diskreten Metrik $d(x, y) = \delta_{xy}$, so ist X lokal kompakt, denn für $0 < \varepsilon < 1$ ist $B_\varepsilon(x) = \{x\}$ kompakt.
Ist $X = \mathcal{C}([0, 1])$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$, versehen mit der von der Supremumsnorm induzierten Metrik, so ist X nicht lokal kompakt. Denn für $\varepsilon > 0$ liegt zwar die Folge f_k, definiert durch $f_k(x) = \varepsilon \cdot \sin(kx)$, in der Kugel $B_\varepsilon(f_0)$ (wobei $f_0 = 0$ die Nullfunktion ist), sie hat aber keine konvergente Teilfolge. In diesem Fall besteht $\mathcal{C}_c(X)$ nur aus der Nullfunktion $f = 0 : X \to \mathbb{C}$. Auf lokal kompakten Räumen gibt es aber viele Funktionen in $\mathcal{C}_c(X)$, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1.1.3. Seien X lokal kompakt und $\varnothing \neq K \subset U \subset X$, so dass K kompakt und U offen ist. Dann gibt eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f = 1$ auf K und kompaktem Träger $\operatorname{supp} f \subset U$.

Beweis. Die stetige Funktion $h = \operatorname{dist}(\sqcup, X \setminus U) : K \to [0, \infty[$ ist auf K positiv und nimmt ihr Minimum an. Folglich gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $d(x, y) \geqslant \varepsilon$ für alle $x \in K$ und $y \in X \setminus K$. Für jedes $x \in K$ sei $U_x = B^\circ_{r_x}(x)$, wobei $0 < r_x \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ derart sei, dass $B_{r_x}(x)$ kompakt ist.
Dann bildet $(U_x)_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K und es gibt folglich eine endliche Menge $K' \subset K$, so dass $(U_x)_{x \in K'}$ bereits K überdeckt. Man setze

$$L = \bigcup\nolimits_{x \in K'} B_{r_x}(x)\,.$$

Dann ist L kompakt und $K \subset L^\circ$; folglich ist $\delta = \inf_{x \in K} \operatorname{dist}(x, X \setminus L^\circ) > 0$. Für die Menge

$$M = \left\{ x \in X \;\middle|\; \operatorname{dist}(x, K) \leqslant \delta \right\}$$

gilt also $K \subset M \subset L$. Da $\operatorname{dist}(\llcorner\!\lrcorner, X \setminus L^\circ)$ stetig ist, ist M abgeschlossen, also kompakt, da L kompakt ist.
Nun setze man

$$f(x) = \max\left(0, 1 - \frac{\operatorname{dist}(x, K)}{\delta}\right) \quad \text{für alle } x \in X\,.$$

Dann ist $f : X \to [0,1]$ stetig; da $\operatorname{dist}(x, K) > \delta$ für alle $x \notin M$, ist $\operatorname{supp} f \subset M$ und insbesondere kompakt. Es ist auch klar, dass $f = 1$ auf K. □

Bemerkung 1.1.4. Im Zuge des obigen Beweises haben wir auch folgendes bewiesen: Sind X lokal kompakt, $U \subset X$ offen und $K \subset X$ kompakt mit $K \subset U$, so gibt es eine kompakte Menge $L \subset X$, so dass $K \subset L^\circ$ und $L \subset U$. Kurz gesagt: K hat eine kompakte Umgebung, die in U enthalten ist.

Definition 1.1.5. Sei X ein lokal kompakter metrischer Raum. Ein *Elementarintegral* μ ist eine positive Linearform auf $\mathcal{C}_c(X)$, dass heißt:

1. Es gilt $\mu : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{C}$ und die Gleichung

$$\mu(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \mu(f) + \beta \cdot \mu(g) \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{C}_c(X)\,,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,.$$

2. Wenn $f \geqslant 0$, d.h. $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in X$, dann ist $\mu(f)$ reell und es gilt $\mu(f) \geqslant 0$.

Setzt man die erste voraus, so ist die zweite Bedingung dazu äquivalent, dass μ wachsend ist, d.h.

$$f_1 \leqslant f_2 \quad \Rightarrow \quad \mu(f_1) \leqslant \mu(f_2) \quad \text{für alle reellwertigen } f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c(X)\,.$$

Das folgende Lemma ist offensichtlich.

Lemma 1.1.6. Sei $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ stetig; setze für $f \in \mathcal{C}_c(X)$

$$\lambda_\varrho(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) \varrho(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \cdots dx_1\,.$$

Dann ist λ_ϱ ein Elementarintegral auf $\mathbb{R}^n$.

Definition 1.1.7. Für $\varrho = 1$ schreibt man auch $\lambda = \lambda_1$. Dann heißen λ bzw. λ_ϱ *Riemann-* bzw. *Riemann-Stieltjes-Integral*. Auf $\mathbb{R}^n$ werden wir in der Regel das Elementarintegral λ betrachten.

Beispiel 1.1.8. Sei X ein diskreter metrischer Raum. Jede Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist stetig; kompakten Träger hat eine solche Funktion genau dann, wenn $f(x) = 0$ außer an endlich vielen $x \in X$. Dann ist durch

$$\#(f) = \textstyle\sum_{x \in X} f(x) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}_c(X)$$

ein Elementarintegral definiert, das man das *Zählintegral* nennt. Alternativ könnte man für jede Funktion $\varrho : X \to [0, \infty[$ das gewichtete Zählintegral

$$\#_\varrho(f) = \textstyle\sum_{x \in X} \varrho(x) f(x) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}_c(X)$$

betrachten. Die bekannten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen liefern interessante Beispiele für solche gewichteten Zählintegrale, etwa die *Binomial-Verteilung*. Hier ist $X = \mathbb{N}$ und die Funktion $\varrho = B(n;p)$ mit $0 \leqslant p \leqslant 1$ und $n \in \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$B(n;p)(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k \leqslant n\,, \\ 0 & k > n\,. \end{cases}$$

Lemma 1.1.9. Seien $f_k, f \in \mathcal{C}_c(X)$, so dass ein Kompaktum $K \subset X$ mit $\operatorname{supp} f_k, \operatorname{supp} f \subset K$ gibt und $f = \lim_k f_k$ gleichmäßig auf K. Dann gilt $\mu(f) = \lim_k \mu(f_k)$.

Beweis. Man macht erst folgende Vorüberlegung: Ist $g \in \mathcal{C}_c(X)$, so gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, mit

$$|\mu(g)| = z \cdot \mu(g) = \mu(zg) = \mu(\operatorname{Re}(zg)) + i\mu(\operatorname{Im}(zg)) = \mu(\operatorname{Re}(zg)) \leqslant \mu(|zg|) = \mu(|g|)\,.$$

Sei nun $\chi : X \to [0,1]$ stetig mit kompaktem Träger, so dass $\chi = 1$ auf K. Dann gilt aber $f - f_k = \chi \cdot (f - f_k)$, also

$$|\mu(f) - \mu(f_k)| = |\mu(f - f_k)| \leqslant \mu(\chi \cdot |f - f_k|) \leqslant \mu(\chi) \cdot \|f - f_k\|_\infty \tag{$*$}$$

weil

$$\chi(x) \cdot \big|f(x) - f_k(x)\big| \leqslant \chi(x) \cdot \|f - f_k\|_\infty \quad \text{für alle } \ x \in X\,.$$

Aus der Ungleichung ($*$) folgt sofort, dass $\mu(f) = \lim_k \mu(f_k)$. □

Definition 1.1.10. Sei μ ein Elementarintegral auf dem lokal kompakten Raum X. Man definiert

$$\|f\|_1 = \inf\Big\{ \sum_{k=0}^\infty \mu(g_k) \;\Big|\; g_k \in \mathcal{C}_c(X)\,,\, g_k \geqslant 0\,,\, |f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^\infty g_k(x) \ \text{ für alle } \ x \in X \Big\}$$

für alle $f \in \mathcal{F}(X;\overline{\mathbb{C}})$ und alle $f \in \mathcal{F}(X)$. Dabei definiert man

$$\textstyle\sum_{k=0}^\infty x_k = \sup_{\ell \geqslant 0} \sum_{k=0}^\ell x_k \quad \text{für alle } \ x, x_k \in [0,\infty]\,.$$

Damit die Definition von $\|\sqcup\|_1$ sinnvoll ist (d.h. die Menge, über die man das Infimum nimmt, ist stets nicht leer), muss man annehmen, dass es eine Folge $K_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, von Kompakta gibt, so dass $X = \bigcup_{j=0}^\infty K_j$. In diesem Fall sagt man, X sei *σ-kompakt*. Falls X eine dichte Folge enthält, so heißt X *separabel*. Da jede offene Teilmenge eines separablen, lokal kompakten metrischen Raums σ-kompakt ist (Übung), *werden wir im folgenden immer annehmen, dass X lokal kompakt und separabel ist.*

Das folgende Lemma ist als Lemma von Dini aus der Analysis II bekannt.

Lemma 1.1.11. Sei seien $f_k, f : X \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf X. Falls (f_k) wachsend ist und $f(x) = \sup_k f_k(x)$, so konvergiert f_k gleichmäßig gegen f auf jedem Kompaktum in X.

Wir können nun ein paar grundlegende Eigenschaften der Funktion $\|\sqcup\|_1$ herleiten.

Satz 1.1.12. Seien μ ein Elementarintegral auf X, $f, g, f_k \in \mathcal{F}(X;\overline{\mathbb{C}})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(i). Falls $f \in \mathcal{C}_c(X)$, so ist $\|f\|_1 = \mu(|f|)$.

(ii). Gilt $|f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$ für alle $x \in X$, so folgt $\|f\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1$.

(iii). Es gilt, wenn $f+g$ definiert ist,

$$\|f+g\|_1 \leqslant \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad \text{und} \quad \|\lambda f\|_1 = |\lambda| \cdot \|f\|_1 .$$

(iv). Wann immer $|f| \leqslant |g|$ gilt, folgt $\|f\|_1 \leqslant \|g\|_1$.

Beweis von (i). Nimmt man in der Definition $g_0 = |f|$ und $g_k = 0$, so folgt $\|f\|_1 \leqslant \mu(|f|)$. Seien umgekehrt $g_k \in \mathcal{C}_c(X)$, $g_k \geqslant 0$, gegeben, so dass

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \quad \text{für alle } x \in X .$$

Man setze

$$h_k(x) = \sum_{j=0}^{k} g_j(x) \quad \text{und} \quad f_k(x) = \min\big(|f(x)|, h_k(x)\big) .$$

Dann gilt $f_k \leqslant f_{k+1} \leqslant h_{k+1}$ und aus der Voraussetzung an (g_k) folgt, dass $|f| = \sup_k f_k$. Da $|f|$ kompakten Träger hat und $0 \leqslant f_k \leqslant |f|$, ist $\operatorname{supp} f_k \subset \operatorname{supp} f$ kompakt. Aus Lemma 1.1.11 folgt, dass $f = \lim_k f_k$ gleichmäßig; aus Lemma 1.1.9 folgt, dass $\mu(|f|) = \lim_k \mu(f_k)$.

Nun gilt aber $\mu(f_k) \leqslant \mu(h_k) = \sum_{j=0}^{k} \mu(g_j)$; somit ergibt sich $\mu(|f|) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mu(g_k)$. Da (g_k) beliebig war, ist $\mu(|f|)$ somit untere Schranke der Menge, von der $\|f\|_1$ das Infimum ist, d.h. es gilt $\mu(|f|) \leqslant \|f\|_1$.

Beweis von (ii). Man kann annehmen, dass $\|f_k\|_1 < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, da sonst die rechte Seite gleich ∞ und folglich nichts zu zeigen ist. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $g_{jk} \in \mathcal{C}_c(X)$, $g_{jk} \geqslant 0$, mit

$$|f_k(x)| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} |g_{jk}(x)| \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \mu(g_{jk}) \leqslant \|f_k\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \quad \text{für alle } x \in X, k \in \mathbb{N} .$$

Es folgt

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |g_{jk}(x)| , \quad \text{also} \quad \|f\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu(g_{jk}) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\|f_k\|_1 + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \Big) = \varepsilon + \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1 .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Beweis von (iii). Da $0 \in \mathcal{C}_c(X)$ gilt, folgt aus (i), dass $\|0\|_1 = 0$. Damit ist die erste Aussage ein Spezialfall von (ii) und die zweite Aussage ist für $\lambda = 0$ bewiesen. Ist $\lambda \neq 0$ und $|f| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} g_k$, so folgt $|\lambda f| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda| \cdot g_k$, also

$$\|\lambda f\|_1 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mu(|\lambda| \cdot g_k) = |\lambda| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \mu(g_k) .$$

Es folgt $\|\lambda f\|_1 \leqslant |\lambda| \cdot \|f\|_1$; indem man diese Ungleichung auf $\frac{1}{\lambda}$ und λf anstelle von λ bzw. f anwendet, folgt die umgekehrte Ungleichung.

Beweis von (iv). Dies ist auch ein Spezialfall von (ii). $\square$

Definition 1.1.13. Sei μ ein Elementarintegral auf X. Jede Funktion $f \in \mathcal{F}(X;\overline{\mathbb{C}})$ oder $f \in \mathcal{F}(X)$ mit der Eigenschaft, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{C}_c(X)$ gibt mit $\|f-g\|_1 \leqslant \varepsilon$, heißt *$\mu$-integrierbar*. Weiter schreibt man $\mathcal{L}^1(X)$ oder $\mathcal{L}^1(X,\mu)$ für die *Menge der μ-integrierbaren Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$*.

Bemerkung 1.1.14.

(i). Man beachte, dass integrierbare Funktionen qua Definition durchaus den Wert ∞ annehmen dürfen. Damit man von einem Vektorraum sprechen kann, sammelt man in $\mathcal{L}^1(X)$ allerdings nur Funktionen, die Werte in $\mathbb{C}$ annehmen.

(ii). Die Eigenschaft Satz 1.1.12 (iii) bedeutet, dass $\|\sqcup\|_1$ eine *'Halbnorm'* auf dem Vektorraum (s.u.) $\mathcal{L}^1(X)$ ist. Eine Norm ist dies allerdings nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 1.1.15. Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ eine Funktion, die an höchstens abzählbar vielen Stellen $\neq 0$ ist. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\lambda_\varrho)$ und $\|f\|_1 = 0$ für jedes ϱ. (Das folgt mit einem $\frac{\varepsilon}{2^k}$-Trick wie im obigen Satz.) Die Umkehrung ist falsch: Es gibt überabzählbare Mengen (etwa Cantormengen), deren charakterische Funktionen f in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\lambda_\varrho)$ liegen und für die auch $\|f\|_1 = 0$ gilt. (Natürlich gilt dies nicht für alle überabzählbaren Mengen.)

Satz 1.1.16. Es ist $\mathcal{L}^1(X)$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\mathcal{C}_c(X) \subset \mathcal{L}^1(X)$. Weiter gilt

$$f \text{ integrierbar} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f, |f| \text{ integrierbar.}$$

Falls $f, g \in \mathcal{F}(X)$ integrierbar sind, so gilt dies auch für $\max(f,g), \min(f,g)$.

Lemma 1.1.17. Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ und $c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\big|\max(a,b) - \max(c,d)\big| \leqslant |a-c| + |b-d| \,.$$

Beweis. Falls eine der Zahlen a, b gleich $\pm\infty$ ist, ist die rechte Seite der Ungleichung ∞, also nichts zu zeigen. Also kann man annehmen, dass $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$2 \cdot \big(\max(a,b) - \max(c,d)\big) = a + b - (c+d) + |a-b| - |c-d| \,,$$

also

$$2 \cdot \big|\max(a,b) - \max(c,d)\big| \leqslant |a-c| + |b-d| + |a-b-c+d| \leqslant 2 \cdot \big(|a-c| + |b-d|\big) \,,$$

was zu zeigen war. □

Beweis von Satz 1.1.16. Dass $\mathcal{L}^1(X)$ ein Vektorraum ist, der $\mathcal{C}_c(X)$ als Unterraum enthält, folgt aus Satz 1.1.12 (iii). Seien f, g integrierbar. Da $|\bar{z}| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und $h \in \mathcal{C}_c(X)$ impliziert, dass $\bar{h} \in \mathcal{C}_c(X)$, folgt, dass auch $\bar{f}$ integrierbar ist. Da $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \leqslant |z|$, sind $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ integrierbar. Da $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z-w|$, ist $|f|$ integrierbar. Mit dem Lemma folgt aus $f, g \in \mathcal{F}(X)$ integrierbar, dass $\max(f,g)$ integrierbar ist. Da $\min(f,g) = -\min(-f,-g)$, ist dann auch $\min(f,g)$ integrierbar. □

1.2 Daniell-Integration

Definition 1.2.1. Wenn $f \in \mathcal{F}(X;\overline{\mathbb{C}})$ oder $f \in \mathcal{F}(X)$ μ-integrierbar ist, so definiert man

$$\int f\,d\mu = \int_X f(x)\,d\mu(x) = \lim_k \mu(h_k) \quad \text{wann immer} \quad h_k \in \mathcal{C}_c(X)\,,\ \lim_k \|f-h_k\|_1 = 0\,.$$

Dies nennt man das *Integral von f* bezüglich μ. Falls $X = \mathbb{R}^n$ und $\mu = \lambda$ bzw. λ_ϱ, so nennt man $\int \sqcup\,d\mu$ *Lebesgue-Integral* bzw. *Lebesgue-Stieltjes-Integral*.
Es ist nicht auf den ersten Blick offensichtlich, dass diese Definition sinnvoll ist. Wir formulieren und beweisen dies als den folgenden Satz.

Satz 1.2.2. Seien $g_k, h_k \in \mathcal{C}_c(X)$ und $f \in \mathcal{F}(X;\overline{\mathbb{C}})$ oder $\in \mathcal{F}(X)$, so dass

$$\lim_k \big\|f-g_k\big\|_1 = \lim_k \big\|f-h_k\big\|_1 = 0\,.$$

Dann existieren die Limiten $\lim_k \mu(g_k)$ und $\lim_k \mu(h_k)$ und sind gleich. Damit ist $\int \sqcup\,d\mu$ wohldefiniert.

Beweis. Definiere

$$\varphi_k = \begin{cases} g_\ell & k = 2\ell\,, \\ h_\ell & k = 2\ell+1\,. \end{cases}$$

Es reicht zu zeigen, dass $\mu(\varphi_k)$ eine Cauchyfolge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f-g_\ell\|_1\,,\ \|f-h_\ell\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{sobald} \quad 2\ell+1 \geqslant n\,.$$

Damit ist für alle $p, q \geqslant n$

$$\big|\mu(\varphi_p)-\mu(\varphi_q)\big| = \big|\mu(\varphi_p-\varphi_q)\big| \leqslant \mu\big(|\varphi_p-\varphi_q|\big) = \|\varphi_p-\varphi_q\|_1 \leqslant \varepsilon\,,$$

also gilt die Behauptung. □

Satz 1.2.3. Das Integral $\int \sqcup\,d\mu$ ist eine positive Linearform auf $\mathcal{L}^1(X)$. Weiterhin gilt für alle integrierbaren f

$$\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d\mu = \|f\|_1\,,\ \overline{\int f\,d\mu} = \int \bar{f}\,d\mu\,,\ \mathrm{Re}\int f\,d\mu = \int \mathrm{Re}\,f\,d\mu\,,\ \mathrm{Im}\int f\,d\mu = \int \mathrm{Im}\,f\,d\mu\,.$$

Beweis. Die Linearität von $\int \sqcup\,d\mu$ ergibt sich durch Übergang zum Grenzwert aus der des Elementarintegrals μ. Zur Positivität: Sei $\mathcal{L}^1(X) \ni f \geqslant 0$. Es gibt $h_k \in \mathcal{C}_c(X)$ mit $\|f-h_k\|_1 \to 0$. Dann gilt

$$\big|f-|h_k|\big| = \big||f|-|h_k|\big| \leqslant |f-h_k|\,,$$

also $\|f-|h_k|\|_1 \leqslant \|f-h_k\|_1 \to 0$ nach Satz 1.1.12 (iv). Da $\mu(|h_k|) \geqslant 0$, folgt $\int f\,d\mu \geqslant 0$. Da $|\|f\|_1 - \|h_k\|_1| \leqslant \|f-h_k\|_1$, folgt

$$\|f\|_1 = \lim_k \|h_k\|_1 = \lim_k \mu(|h_k|) = \int |f|\,d\mu\,.$$

Sei f integrierbar. Die Ungleichung $\left|\int f\,d\mu\right| \leqslant \int |f|\,d\mu$ folgt aufgrund der Positivität des Integrals genauso, wie im Beweis von Lemma 1.1.9.

Die Aussage die komplexe Konjugation folgt sofort durch Übergang zum Grenzwert und $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ lassen sich als Linearkombinationen von z und $\bar{z}$ ausdrücken. □

Korollar 1.2.4. Es seien Funktionen f, f_k gegeben, so dass $f - f_k$ existiert und f_k integrierbar ist. Gilt $\lim_k \|f - f_k\|_1 = 0$, so ist f integrierbar und

$$\int f \, d\mu = \lim_k \int f_k \, d\mu \, .$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_k\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $\varphi \in \mathcal{C}_c(X)$ mit $\|f_k - \varphi\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt

$$\|f - \varphi\|_1 \leqslant \|f - f_k\|_1 + \|f_k - \varphi\|_1 \leqslant \varepsilon \, .$$

Da ε beliebig war, ist f integrierbar. Weiter gilt

$$\left| \int f \, d\mu - \int f_k \, d\mu \right| \leqslant \int |f - f_k| \, d\mu = \|f - f_k\|_1 \to 0 \quad (k \to \infty) \, ,$$

was die Behauptung beweist. □

Beispiel 1.2.5. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geqslant a$ und $\varrho : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ stetig. Dann gilt

$$1_{]a,b[} \, , \, 1_{]a,b]} \, , \, 1_{[a,b[} \, , \, 1_{[a,b]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda_\varrho)$$

mit

$$\int 1_{]a,b[} \, d\lambda_\varrho = \int 1_{]a,b]} \, d\lambda_\varrho = \int 1_{[a,b[} \, d\lambda_\varrho = \int 1_{[a,b]} \, d\lambda_\varrho = \int_a^b \varrho(x) \, dx \, .$$

1.3 Konvergenzsätze

Satz 1.3.1. Es seien $f_k \in \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$ integrierbar mit $0 \leqslant f_k \leqslant f_{k+1}$. Falls $\sup_k \int f_k \, d\mu < \infty$, so ist $f = \sup_k f_k$ integrierbar mit

$$\int f \, d\mu = \sup_k \int f_k \, d\mu \, .$$

Beweis. Aufgrund der Monotonie gilt für alle $x \in X$: $f(x) = \lim_k f_k(x) \in [0, \infty]$. Folglich

$$f(x) - f_k(x) = \sum_{j=k}^{\infty} \big(f_{j+1}(x) - f_j(x) \big) \quad \text{für alle } \; x \in X \, , \, k \in \mathbb{N} \, .$$

Aus Satz 1.1.12 (ii) und Satz 1.2.3 folgt

$$\begin{aligned} \|f - f_k\|_1 &\leqslant \sum_{j=k}^{\infty} \|f_{j+1} - f_j\|_1 \\ &= \sup_{\ell \geqslant k} \sum_{j=k}^{\ell} \int (f_{j+1} - f_j) \, d\mu = \sup_j \int f_j \, d\mu - \int f_k \, d\mu \to 0 \quad (k \to \infty) \, . \end{aligned}$$

Aus Korollar 1.2.4 folgt die Behauptung. □

Korollar 1.3.2. Seien $0 \leqslant f_k \leqslant f_{k+1}$ integrierbar und $f = \sup_k f_k$. Dann gilt $\|f\|_1 = \sup_k \|f_k\|_1$.

Beweis. Es gilt $\|f\|_1 \geqslant \|f_k\|_1$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Falls $\sup_k \|f_k\|_1 = \infty$, folgt $\|f\|_1 = \infty$. Der Fall $\sup_k \|f_k\|_1 < \infty$ folgt aus Satz 1.1.12 und Satz 1.3.1. □

Theorem 1.3.3. Seien $f, f_k \in \mathcal{F}(X;\overline{\mathbb{C}}) \cup \mathcal{F}(X)$ und $g \in \mathcal{F}_+(X)$ gegeben. Gelten die Voraussetzungen

$$f = \lim_k f_k \quad \text{und} \quad |f_k| \leqslant g \quad \text{punktweise auf} \quad X\,,$$

so ist f integrierbar mit

$$\int f\,d\mu = \lim_k \int f_k\,d\mu\,.$$

Beweis. Durch Übergang zu Real- und Imaginärteil kann man annehmen, dass die f_k reellwertige Funktionen sind. Nun definiert man

$$h_{k\ell} = g + \max_{k\leqslant j\leqslant \ell} f_j \quad \text{für alle } \ k \leqslant \ell\,.$$

Dann gilt $0 \leqslant h_{k\ell} \leqslant 2g$. Für festes k ist die Folge $(h_{k\ell})_{\ell\geqslant k}$ offenbar wachsend und es gilt

$$\sup_{\ell\geqslant k} \int h_{k\ell}\,d\mu \leqslant 2\cdot \int g\,d\mu < \infty\,.$$

Aus Satz 1.3.1 folgt, dass $\sup_{\ell\geqslant k} h_{k\ell} = g + \sup_{\ell\geqslant k} f_\ell$ integrierbar ist. Da g integrierbar und reellwertig ist, ist auch $\sup_{\ell\geqslant k} f_\ell$ integrierbar. Da diese Funktion punktweise $\leqslant g$ ist, ist sie auch reellwertig.
Daher kann man die Folge $g_k = g - \sup_{\ell\geqslant k} f_\ell$ betrachten. Für diese gilt $0 \leqslant g_k \leqslant g_{k+1} \leqslant g$ und

$$\sup_k \int g_k\,d\mu \leqslant \int g\,d\mu < \infty\,,$$

also ist — wieder mit Satz 1.3.1 — $\sup_k g_k = g - \limsup_k f_k = g - f$ integrierbar mit

$$\int g\,d\mu - \inf_k \int \sup_{\ell\geqslant k} f_\ell\,d\mu = \sup_k \int g_k\,d\mu = \int (g-f)\,d\mu\,.$$

Es folgt, dass f integrierbar ist mit

$$\int f\,d\mu = \inf_k \int \sup_{\ell\geqslant k} f_\ell\,d\mu \geqslant \inf_k \sup_{\ell\geqslant k} \int f_\ell\,d\mu = \limsup_k \int f_k\,d\mu\,.$$

Ersetzt man f durch $-f$ und f_k durch $-f_k$, so folgt

$$\liminf_k \int f_k\,d\mu = -\limsup_k \int -f_k\,d\mu \geqslant -\int -f\,\mu = \int f\,d\mu\,,$$

also die Behauptung. □

Bemerkung 1.3.4. Der obige Satz ist in der Literatur als Satz der monotonen Konvergenz oder Satz von Beppo Levi bekannt; das obige Theorem als Satz der majorisierten oder dominierten Konvergenz oder als Satz von (Henri) Lebesgue bekannt. Genauer gesagt sind die Versionen, die wir bewiesen haben, leicht abgeschwächte Varianten, obwohl sie bereits sehr nützlich sind. Um die allgemeine Form der beiden Sätze zu formulieren und zu beweisen, werden wir noch ein wenig neue Terminologie und Maschinerie benötigen. Zuerst aber ein paar Anwendungen.

Definition 1.3.5. Sei $A \subset X$. Man notiert die *charakteristische Funktion* von A

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A\,, \\ 0 & x \notin A\,. \end{cases}$$

Man definiert $\mu(A) = \|1_A\|_1$ und nennt dies das *Maß* von A. Die Menge A heißt *integrierbar*, falls die Funktion 1_A integrierbar ist. Falls $f \in \mathcal{F}(X;\overline{\mathbb{C}})$ oder $f \in \mathcal{F}(X)$ und $f \cdot 1_A$ integrierbar ist, schreibt man auch $\int_A f\, d\mu$ für das Integral der Funktion $f \cdot 1_A$.

Satz 1.3.6. Seien $U \subset X$ offen, $K \subset X$ kompakt und $f : X \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $f \cdot 1_K$ integrierbar und es gilt

$$\left\|f \cdot 1_U\right\|_1 = \sup_{L \subset U \text{ kompakt}} \|1_L \cdot f\|_1 .$$

Genau dann ist $f \cdot 1_U$ integrierbar, wenn diese Größe endlich ist. Insbesondere ist K integrierbar,

$$\mu(U) = \sup_{L \subset U \text{ kompakt}} \mu(L)$$

und U ist integrierbar genau dann, wenn $\mu(U) < \infty$. Schließlich ist f integrierbar genau dann, wenn $\|f\|_1 < \infty$.

Beweis. Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei $K_j = \left\{x \in X \;\middle|\; \operatorname{dist}(x, K) \leqslant \frac{1}{j}\right\}$. Dann ist K_j eine Umgebung von K und $K = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$. Seien $\chi_j \in \mathcal{C}_c(X)$ mit $1_K \leqslant \chi_j \leqslant 1_{K_j}$. Dann gilt $f \cdot \chi_j \in \mathcal{C}_c(X) \subset \mathcal{L}^1(X)$ und $f \cdot 1_K = \lim_j \chi_j$ punktweise auf X. Ist $\chi \in \mathcal{C}_c(X)$ mit $1_{K_1} \leqslant \chi \leqslant 1$, so gilt

$$|f \cdot \chi_j| \leqslant |f \cdot \chi| \in \mathcal{C}_c(X) \subset \mathcal{L}^1(X) \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}$$

und aus Theorem 1.3.3 folgt $f \cdot 1_K \in \mathcal{L}^1(X)$. Für den Spezialfall $f = 1$ erhält man, dass K integrierbar ist.
Es gilt für alle $L \subset U$ $|f| \cdot 1_U \geqslant |f| \cdot 1_L$, also $\|1_U \cdot f\|_1 \geqslant \sup_{L \subset U} \|1_L \cdot f\|_1$. Da U σ-kompakt ist, gibt es eine Folge $K_j \subset K_{j+1}$ von Kompakta mit $U = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$. Setze $g_j = 1_{K_j} \cdot |f|$. Dann ist g_j integrierbar, $0 \leqslant g_j \leqslant g_{j+1}$ und $|f| \cdot 1_U = \sup_j g_j$. Mit Korollar 1.3.2 folgt die Gleichung.
Sei nun $\|f \cdot 1_U\|_1 < \infty$. Aus Satz 1.3.1 folgt, dass $|f| \cdot 1_U$ integrierbar ist. Da $f \cdot 1_U = \lim_j f \cdot 1_{K_j}$ punktweise und

$$|f \cdot 1_{K_j}| \leqslant |f| \cdot 1_U \in \mathcal{L}^1(X)$$

folgt aus Theorem 1.3.3, dass $f \cdot 1_U$ integrierbar ist mit

$$\int_U f\, d\mu = \lim_j \int_{K_j} f\, d\mu .$$

Die weiteren Aussagen folgen durch die Betrachtung von $f = 1$ bzw. $U = X$. □

Beispiel 1.3.7. Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist genau dann λ-integrierbar, wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int f\, d\lambda = \lim_{a \to \infty,\, b \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx .$$

Die Aussage ist im allgemeinen falsch, wenn man nur fordert, dass f uneigentlich Riemann-integrierbar sei.

Bemerkung 1.3.8. Das Intervall $[0, 1]$ enthält Teilmengen, die nicht λ-integrierbar sind (obwohl ihr Maß $\leqslant 1$ ist).

Satz 1.3.9. Seien $A, B, A_k \subset X$ integrierbar. Dann sind $A \setminus B$ und $\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$ integrierbar mit

$$\mu\Big(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \inf_\ell \mu\Big(\bigcap_{k=0}^{\ell} A_k\Big) .$$

Weiter ist $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ integrierbar, falls endlichen Maßes. In *jedem* Fall gilt

$$\mu\Big(\bigcup\nolimits_{k=0}^{\infty} A_k\Big) = \sup\nolimits_\ell \mu\Big(\bigcup\nolimits_{k=0}^{\ell} A_k\Big) .$$

Beweis. Es gilt $1_{A\setminus B} = 1_A - \min(1_A, 1_B)$, also ist $A \setminus B$ integrierbar. Seien nun $B_\ell = \bigcap_{k=0}^{\ell} A_k$ und $B = \bigcap_{k=0}^{\infty} B_k$. Dann ist $1_{B_\ell} = \min_{k=0}^{\ell} 1_{A_k}$ integrierbar mit $1_B = \lim_k 1_{B_k}$ punktweise und $1_{B_\ell} \leqslant 1_{A_0} \in \mathcal{L}^1(X)$. Mit Theorem 1.3.3 folgt die Integrierbarkeit des Schnitts.
Analog betrachtet man $C_\ell = \bigcup_{k=0}^{\ell} A_k$ und $C = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. Dann ist $1_{C_\ell} = \max_{k=0}^{\ell} 1_{A_k}$ integrierbar und $0 \leqslant 1_{C_\ell} \leqslant 1_{C_{\ell+1}} \leqslant 1_C$, also $\sup_\ell \|1_{C_\ell}\|_1 \leqslant \mu(C) < \infty$, falls C endlichen Maßes ist. In diesem Fall ist C integrierbar nach Satz 1.3.1. Aus Korollar 1.3.2 folgt die Gleichung. □

1.4 Nullfunktionen und Nullmengen

Wir haben gesehen, dass $\|\sqcup\|_1$ keine Norm ist. Dies ist weniger ein Nachteil; vielmehr erlaubt uns eine genauere Untersuchung des Verschwindens von $\|\sqcup\|_1$, Funktionen als (vom Standpunkt der Integrationstheorie) 'gleich' zu behandeln, die sich — in diesem Sinne — nur an 'wenigen' Stellen unterscheiden. ('It's not a bug, it's a feature.')

Definition 1.4.1. Eine Funktion $f \in \mathcal{F}(X;\overline{\mathbb{C}})$ heißt *μ-Nullfunktion*, falls $\|f\|_1 = 0$. Eine Menge $A \subset X$ heißt *μ-Nullmenge*, falls 1_A eine μ-Nullfunktion ist, d.h. $\mu(A) = 0$. Ist P eine Aussageform auf X, so sagt man, es gelte $P(x)$ für *μ-fast alle $x \in X$*, oder, P gelte *μ-fast überall*, wenn die Menge

$$A = \big\{x \in X \bigm| P(x) \text{ gilt nicht}\big\}$$

eine μ-Nullmenge ist.

Satz 1.4.2. Es seien $f, g, f_k \in \mathcal{F}(X;\overline{\mathbb{C}})$ oder $\in \mathcal{F}(X)$.

(i). Ist $|f| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}|f_k|$ und sind alle f_k μ-Nullfunktionen, so ist f eine μ-Nullfunktion. Insbesondere gilt: Ist f eine Nullfunktion, so gilt dies auch für $|f|$.

(ii). Genau dann gilt $f = 0$ μ-fast überall, wenn f eine μ-Nullfunktion ist. Insbesondere gilt für g komplexwertig genau dann $f = g$ μ-fast überall, wenn $f - g$ eine Nullfunktion ist.

(iii). Ist f eine Nullfunktion, so ist f integrierbar mit $\|f\|_1 = \int f\,d\mu = 0$. Allgemeiner gilt: Für f integrierbar und $f = g$ μ-fast überall ist f integrierbar mit $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$ und $\|f\|_1 = \|g\|_1$. Insbesondere ist jede Nullmenge integrierbar.

(iv). Ist f μ-integrierbar, so ist $f(x) \neq \infty$ für μ-fast alle $x \in X$.

Beweis von (i). Dies folgt sofort aus Satz 1.1.12 (ii).

Beweis von (ii). Sei $A = \big\{x \in X \bigm| f(x) \neq 0\big\}$. Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}|f(x)| = \left\{\begin{matrix} \infty & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{matrix}\right\} \geqslant 1_A(x) ,$$

also $1_A \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}|f|$; ebenso folgt $|f| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 1_A$. Aus (i) folgt, dass f genau dann eine Nullfunktion ist, wenn dies für 1_A gilt.

Beweis von (iii). Dass eine Nullfunktion f integrierbar ist, folgt, da $0 \in \mathcal{C}_c(X)$ und

$$\|f - 0\|_1 = \|f\|_1 = 0 \leqslant \varepsilon \quad \text{für alle } \varepsilon > 0\,.$$

Dass $\int f\,d\mu = 0$, ergibt sich nun sofort aus Satz 1.2.3.

Beweis von (iv). Es reicht, den Fall zu betrachten, dass f seine Werte in $[0,\infty]$ annimmt. Es gilt $f \geqslant k \cdot 1_{f^{-1}(\infty)}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Somit folgt

$$\infty > \|f\|_1 \geqslant k \cdot \mu(f^{-1}(\infty)) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,,$$

also $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$. □

Korollar 1.4.3. Seien $A, B, A_k \subset X$. Ist $A \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ und sind alle A_k μ-Nullmengen, so ist auch A eine μ-Nullmenge. (Insbesondere: Ist $A \subset B$ und B eine μ-Nullmenge, so ist auch A eine.) Folglich ist $f = g$ μ-fast überall eine Äquivalenzrelation in f und g.

Nun können wir die Sätze von Beppo Levi und Lebesgue verbessern.

Satz 1.4.4. Seien $f_k \in \mathcal{F}(X)$ integrierbar, wobei $0 \leqslant f_k \leqslant f_{k+1}$ μ-fast überall. Wann immer $\sup_k \int f_k\,d\mu < \infty$ und $f \in \mathcal{F}(X)$ mit $f = \sup_k f_k$ μ-fast überall, ist f integrierbar mit

$$\int f\,d\mu = \sup\nolimits_k \int f_k\,d\mu_k\,.$$

Beweis. Seien $N_k = \{x \in X \mid f_k(x) > f_{k+1}(x)\}$ und $N_{-1} = \{x \in X \mid f_0(x) < 0\}$. Dann ist $N = \bigcup_{k=-1}^{\infty} N_k$ eine μ-Nullmenge. Definiere

$$g_k(x) = \begin{cases} f_k(x) & x \notin N\,, \\ k\,, & x \in N \end{cases} \quad \text{und} \quad g = \sup\nolimits_k g_k\,.$$

Dann gilt $0 \leqslant g_k \leqslant g_{k+1}$, g_k sind integrierbar und $\sup_k \int g_k\,d\mu = \sup_k \int f_k\,d\mu < \infty$. Nach Satz 1.3.1 ist g integrierbar mit

$$\int g\,d\mu = \sup\nolimits_k \int g_k\,d\mu = \sup\nolimits_k \int f_k\,d\mu\,.$$

Es gilt $f = g$ auf $X \setminus N$, insbesondere fast überall. Folglich ist f integrierbar mit $\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$. Dies zeigt die Behauptung. □

In ähnlicher Weise folgt der verbesserte Satz von Lebesgue aus der einfachen Version.

Theorem 1.4.5. Seien $f, f_k, g \in \mathcal{F}(X;\overline{\mathbb{C}})$ oder $\in \mathcal{F}(X)$ mit $f = \lim_k f_k$ punktweise μ-fast überall und $|f_k| \leqslant g$ μ-fast überall. Wenn g integrierbar ist, so folgt, dass f integrierbar ist mit

$$\int f\,d\mu = \lim\nolimits_k \int f_k\,d\mu\,.$$

1.5 Parameterabhängige Integrale

Obwohl dies eine sehr natürliche Fragestellung ist, ist es notorisch schwierig, die stetige bzw. differenzierbare Parameter-Abhängigkeit von Riemann-Integralen nachzuweisen. Die Situation ist für das Lebesgueintegral bzw. andere abstrakte Integrale durch das Theorem von Lebesgue dramatisch besser. Es ist sehr leicht, passende Bedingungen zu fomurlieren und die entsprechenden Sätze zu beweisen. Diese haben eine Vielzahl von Anwendungen.

Theorem 1.5.1. Sei Y ein beliebiger metrischer Raum, $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $y_0 \in Y$. Sei $V \subset Y$ eine Umgebung von y_0, so dass gilt:

1. Für alle $y \in V$ ist die Funktion $f(\sqcup, y) : X \to \mathbb{C}$ μ-integrierbar;
2. für μ-fast alle $x \in X$ ist $f(x, \sqcup) : Y \to \mathbb{C}$ stetig im Punkt y_0;
3. es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g \in \mathcal{F}_+(X)$, so dass für alle $y \in V$ μ-fast überall auf X gilt $|f(\sqcup, y)| \leqslant g$.

Dann ist die Funktion

$$\int f(x, \sqcup)\, d\mu : V \to \mathbb{C} : y \mapsto \int f(x, y)\, d\mu(x)$$

stetig im Punkt y_0.

Beweis. Seien $y_k \in V$, $y_0 = \lim_k y_k$. Dann genügt die Funktionenfolge (f_k) mit $f_k(x) = f(x, y_k)$, den Voraussetzungen von Theorem 1.4.5, mit Grenzfunktion μ-fast überall gleich $f(\sqcup, y_0)$ (Voraussetzung 2). Es folgt

$$\int f(x, y_0)\, d\mu(x) = \lim_k \int f(x, y_k)\, d\mu(x) .$$

Da die Folge (y_k) beliebig war, folgt die Behauptung. □

Theorem 1.5.2. Seien $Y \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $y_0 \in Y$. Sei $V \subset Y$ eine Umgebung von y_0, so dass

1. Für alle $y \in V$ ist die Funktion $f(\sqcup, y) : X \to \mathbb{C}$ μ-integrierbar;
2. für μ-fast alle $x \in X$ ist $f(x, \sqcup) : Y \to \mathbb{C}$ differenzierbar im Punkte y_0, mit Ableitung $\partial_2 f(x, \sqcup)$;
3. es gibt eine μ-integrierbare Funktion $g \in \mathcal{F}_+(X)$ mit $\sup_{y \in V} |\partial_2 f(\sqcup, y)| \leqslant g$ μ-fast überall auf X.

Dann ist $\partial_2 f(\sqcup, y)$ μ-integrierbar für alle $y \in V$ und die Funktion

$$\int f(x, \sqcup)\, d\mu(x) : V \to \mathbb{C} : y \mapsto \int f(x, y)\, d\mu(y)$$

ist im Punkt y_0 differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{dy} \int f(x, y)\, d\mu(x) \Big|_{y=y_0} = \int \partial_2 f(x, y_0)\, d\mu(x) .$$

Beweis. Seien $y_k \in V$, $y_k \neq y_0$, mit $y_0 = \lim_k y_k$. Definiere Funktionen $g_k : X \to \mathbb{C}$ durch

$$g_k(x) = \frac{f(x, y_k) - f(x, y_0)}{y_k - y_0} \quad \text{für alle } x \in X,\ k \in \mathbb{N} \setminus 0 .$$

Nach Voraussetzung ist diese Funktion μ-integrierbar. Aus dem Mittelwertsatz folgt für μ-fast jedes x

$$|g_k(x)| \leqslant \sup_{y\in V}|\partial_2 f(x,y)| \leqslant g(x)\;.$$

Da $\partial_2 f(\sqcup, y_0) = \lim_k g_k$ μ-fast überall, folgt aus Theorem 1.4.5, dass $\partial_2 f(\sqcup, y_0)$ integrierbar ist mit

$$\int \partial_2 f(x,y_0)\,d\mu(x) = \lim_k \int g_k\,d\mu = \lim_k \frac{1}{y_k - y_0}\cdot\Big(\int f(x,y_k)\,d\mu(x) - \int f(x,y_0)\,d\mu(x)\Big)\;.$$

Da die Folge y_k beliebig war, folgt die Behauptung. □

Beispiel 1.5.3. Die Funktion $\mathbb{R}\to\mathbb{R} : x \mapsto e^{-x^2}$ ist λ-integrierbar mit

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,d\lambda(x) = \sqrt{\pi}\;.$$

Dazu zeigt man, dass die Funktion $F : [0,\infty[\to\mathbb{R}$, definiert durch

$$F(t) = \Big(\int_0^t e^{-x^2}\,dx\Big)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}\,dx\;,$$

konstant ist.

Beispiel 1.5.4. Man berechne für $a\in\mathbb{R}$ die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\cos(ax^2)\,dx \quad\text{und}\quad \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\sin(ax^2)\,dx\;.$$

Dazu zeigt man, dass für $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$ die Funktionen $f_t : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f_t(x) = e^{-e^{2it}x^2}$, integrierbar sind mit

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}} f_t(x)\,dx = \sqrt{\pi}\cdot e^{-it}\;.$$

Letzteres folgt, indem man zeigt, dass F das AWP

$$F' = -i\cdot F\;,\; F(0) = \sqrt{\pi} \quad \text{löst.}$$

Beispiel 1.5.5. Die Gammafunktion $\Gamma :]0,\infty[\to\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\;.$$

Γ ist differenzierbar, $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Es gilt $\Gamma'(1) = -\gamma$, wobei γ die Euler-Mascheroni-Konstante

$$\gamma = \lim_k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} - \log k \quad \text{ist.}$$

Beispiel 1.5.6. Sei $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gibt es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $v = \operatorname{grad} f$ genau dann, wenn $\partial_k v_\ell = \partial_\ell v_k$ für alle $k,\ell = 1,\ldots,n$. (Für $n = 3$ bedeutet dies, dass $\operatorname{rot} v = 0$.) In der Tat erhält man ein 'integrierendes Potenzial' f durch die Formel

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^1 v_j(tx)\,dt\cdot x_j\;.$$

Die Aussage ist falsch, wenn $\mathbb{R}^n \setminus 0$ der Definitionsbereich von v ist. Dieses Phänomen werden wir am Ende der Vorlesung mit Hilfe der Theorie der Differentialformen und dem Satz vom Abbildungsgrad genauer erklären.

1.6 Messbare Funktionen und Mengen

Nachdem wir einige nützliche Sätze über integrierbare Funktionen bewiesen haben, ist es wichtig, ein gangbares Kriterium für die Integrierbarkeit zur Verfügung zu haben. Ein solches werden wir am Ende dieses Abschnitts beweisen. Dazu ist es aber zunächst notwendig, das Konzept der Messbarkeit einzuführen. Anschaulich gesagt ist die Menge aller messbaren Funktionen so groß, dass man zu Recht sagen kann, jede vernünftige Funktion sei messbar. Unter den messbaren Funktionen werden wir dann die integrierbaren charakterisieren.

Definition 1.6.1. Sei $A \subset X$. Dann heißt A *μ-messbar*, falls $A \cap B$ μ-integrierbar ist für alle μ-integrierbaren Mengen $B \subset X$.

Satz 1.6.2. Seien $A, A_k \subset X$.

(i). Genau dann ist A messbar, wenn $X \setminus A$ messbar ist.

(ii). Sind alle A_k messbar, so sind auch $\bigcup_{k=0}^\infty A_k$ und $\bigcap_{k=0}^\infty A_k$ messbar.

(iii). Alle integrierbaren Mengen (insbesondere alle kompakten und alle Nullmengen) und alle offenen Mengen sind messbar.

(iv). Sei A messbar und $B \supset A$ integrierbar. Dann ist A integrierbar.

Beweis. Es gilt $A = X \setminus (X \setminus A)$, $B \cap (X \setminus A) = B \setminus (A \cap B)$ und

$$B \cap \bigcup_{k=0}^\infty A_k = \bigcup_{k=0}^\infty (B \cap A_k) ,$$

also folgt die Messbarkeit aus Satz 1.3.9, da die Vereinigung Maß $\leqslant \mu(B)$ hat. Da

$$\bigcap_{k=0}^\infty A_k = X \setminus \bigcup_{k=0}^\infty (X \setminus A_k) ,$$

folgt die Messbarkeit die Schnitts. Dies zeigt (i) und (ii).
Dass eine integrierbare Menge auch messbar ist, folgt auch aus Satz 1.3.9. Somit ist auch jede kompakte Menge messbar. Da jede offene Menge ist σ-kompakt; die Messbarkeit folgt aus (ii). Sei nun A messbar und B integrierbar mit $A \subset B$. Dann ist $A = B \cap A$ integrierbar nach Definition der Messbarkeit. □

Definition 1.6.3. Sei $f \in \mathcal{F}(X)$. Dann heißt die Funktion f *μ-messbar* genau dann, wenn die Mengen $\{f > a\} = f^{-1}]a, \infty]$ für alle $a \in \mathbb{R}$ μ-messbar sind. Falls $f \in \mathcal{F}(X; \overline{\mathbb{C}})$, so heißt f μ-messbar, falls dies für $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ gilt.
Offenbar ist für $A \subset X$ die Funktion 1_A genau dann μ-messbar, wenn dies für die Menge A gilt. Außerdem sind alle stetigen Funktionen messbar. Es ist auch klar, dass, falls f messbar ist und $f = g$ μ-fast überall, dann auch g messbar ist.

Satz 1.6.4. Seien $f, g, f_j \in \mathcal{F}(X; \overline{\mathbb{C}})$ und $h, h_j, k \in \mathcal{F}(X)$ messbar.

(i). Für $a \in \mathbb{R}$ sind $\{h < a\}$, $\{h \geqslant a\}$ und $\{h \leqslant a\}$ messbar.

(ii). Ist $u : \bar{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $u \circ h$ messbar. Insbesondere gilt dies für konstantes u.[1]

(iii). Die Funktionen $h^+ = \max(h,0)$, $h^- = (-h)^+$, $\max(h,k)$, $\min(h,k)$, $f+g$, $\bar{f}$ und $|f|$ sind messbar.

(iv). Falls $f \geqslant 0$ oder $f,g \neq \infty$ überall, ist $f \cdot g$ messbar. Falls $g \neq 0,\infty$ überall, sind $1/g$ und f/g messbar.

(v). Die Funktionen $\sup_k h_k$, $\inf_k h_k$, $\liminf_k h_k$, $\limsup_k h_k$ sind messbar. Falls $\lim_k f_k$ punktweise überall in $\overline{\mathbb{C}}$ bzw. in $\overline{\mathbb{R}}$ existiert, ist diese Funktion messbar.

Beweis. Es gilt

$$\{h \leqslant a\} = X \setminus \{h > a\}\,,\ \{h < a\} = \bigcup\nolimits_{\mathbb{Q} \ni b < a} \{h \leqslant b\}\,,\ \{h \geqslant a\} = X \setminus \{h < a\}\,.$$

Es ist $\{u > a\}$ offen, also

$$\{u > a\} = \bigcup\nolimits_{b,c \in \mathbb{Q}} \{]b,c[\mid u(]b,c[) > a\}$$

Da $f^{-1}(]b,c[) = \{f > b\} \cap \{f < c\}$, ist $\{u \circ f > a\} = f^{-1}\{u > a\}$ messbar; folglich ist $u \circ f$ messbar. Es reicht im weiteren, Funktionen mit Werten in $\overline{\mathbb{R}}$ zu betrachten. Die Messbarkeit von $f+g$ folgt aus

$$\{f+g > a\} = \bigcup\nolimits_{b,c \in \mathbb{Q}\,,\, b+c>a} \{f > b\} \cap \{g > c\}\,.$$

Nun ist

$$\{f^2 > a\} = \{f^2 > a^+\} = \{f > \sqrt{a^+}\} \cap \{f < -\sqrt{a^+}\}\,,$$

also f^2 messbar. Da $2fg = (f+g)^2 - (f^2+g^2)$, ist $f \cdot g$ messbar. Nun ist

$$\{1/g > a\} = \begin{cases} \{g > 1/a\} & a > 0\,, \\ \{g > 0\} & a = 0\,, \\ \{g \geqslant 0\} \cup \{g < -1/a\} & a < 0\,. \end{cases}$$

Folglich ist auch f/g messbar. Nun ist $f^+ = 1_{\{f \geqslant 0\}} \cdot f$ messbar, ebenso $f^- = (-f)^+$. Es gilt

$$|f| = f^+ + f^-\,,\ \max(f,g) = (f-g)^+ + g \quad \text{und} \quad \min(f,g) = -\max(-f,-g)\,,$$

also sind diese Funktionen messbar. Nun gilt $\{\inf_k f_k > a\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{f_k > a\}$,

$$\sup\nolimits_k f_k = -\inf\nolimits_k(-f_k)\,,\ \liminf\nolimits_k f_k = \sup\nolimits_k \inf\nolimits_{\ell \geqslant k} f_\ell\,,$$
$$\limsup\nolimits_k f_k = -\liminf\nolimits_k(-f_k) \text{ und } \lim\nolimits_k f_k = \limsup\nolimits_k f_k\,,$$

wo immer der Limes existiert. □

Ebenso wie für Mengen gilt auch für Funktionen, dass aus der Integrierbarkeit die Messbarkeit folgt. Dies folgt aus dem folgenden Satz.

[1] $\bar{\mathbb{R}}$ ist ein metrischer Raum, etwa mit der Metrik $d(x,y) = \frac{1}{\pi} \cdot |\arctan x - \arctan y|$ für $x \neq y$ ($\lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$).

Satz 1.6.5. Seien $f \in \mathcal{F}_+(X)$ integrierbar und $a > 0$. Dann sind die Mengen $\{f > a\}$ und $\{f \geqslant a\}$ integrierbar mit
$$a \cdot \mu(f \geqslant a) \leqslant \int f \, d\mu \, .$$

Lemma 1.6.6. Sei $f \in \mathcal{F}(X)$ integrierbar und $g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\min(f, g)$ integrierbar.

Beweis. Für jedes Kompaktum K ist $1_K \cdot g$ integrierbar. Ist $K_j \subset K_{j+1}$ eine Folge kompakter Mengen mit $X = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$, so ist $g_j = \min\bigl(f, 1_{K_j} \cdot g\bigr) \leqslant g_{j+1}$ eine wachsende Folge integrierbarer Funktionen mit $\sup_j \int g_j \, d\mu \leqslant \int f \, d\mu < \infty$. Damit ist $\min(f, g) = \sup_j g_j$ integrierbar (Satz 1.3.1). □

Beweis von Satz 1.6.5. Aus dem Lemma folgt, dass $f_k = \min\bigl(k \cdot (f - \min(f, a)), 1\bigr)$ integrierbar ist. Es gilt $f_k \leqslant f_{k+1}$. Weiterhin gilt
$$\sup_k \min\bigl(k \cdot y, 1\bigr) = 1 \;\Leftrightarrow y > 0 \quad \text{und} \quad f(x) > a \;\Leftrightarrow (f - \min(f, a))(x) > 0 \, ;$$
es folgt $1_{\{f>a\}} = \sup_k f_k$. Da $1_{\{f \geqslant a\}} \leqslant \frac{1}{a} \cdot f$, folgt
$$\mu\bigl(\{f > a\}\bigr) \leqslant \mu\bigl(\{f \geqslant a\}\bigr) \leqslant \frac{1}{a} \cdot \int f \, d\mu < \infty \, .$$
Aus Satz 1.3.1 folgt, dass $\{f > a\}$ integrierbar ist. Nun ist $\{f \geqslant a\} = \bigcap_{\mathbb{Q} \ni b < a} \{f > b\}$, also nach Satz 1.3.9 integrierbar. □

Korollar 1.6.7. Sei $f \in \mathcal{F}(X; \overline{\mathbb{C}})$ oder $f \in \mathcal{F}(X)$, so dass $1_K \cdot f$ integrierbar sei für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$. Dann ist f messbar.

Beweis. Es reicht, den Fall $f \in \mathcal{F}(X)$ zu betrachten. Dann ist $f = f^+ - f^-$ und es reicht, den Fall $f \geqslant 0$ zu behandeln. Da X σ-kompakt ist, folgt aus Satz 1.4.4 und Satz 1.6.2, dass man f integrierbar annehmen kann. Nun zeigt Satz 1.6.5, dass für $a > 0$ die Mengen $\{f > a\}$ und $\{f \geqslant a\}$ integrierbar und somit messbar sind. Somit ist $\max(f, a)$ für alle $a > 0$ messbar. Aus $f = \inf_{\mathbb{Q} \ni a > 0} \max(f, a)$ folgt mit Satz 1.6.4 (v), dass f messbar ist. □

Theorem 1.6.8. Sei $f \in \mathcal{F}(X; \overline{\mathbb{C}}) \cup \mathcal{F}(X)$ messbar. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn $\|f\|_1 < \infty$, genau dann, wenn
$$\sup\bigl\{ \bigl\|1_K \cdot f\bigr\|_1 \bigm| K \subset X \text{ kompakt} \bigr\} < \infty \, . \tag{$*$}$$

Beweis. Dass die Bedingung $(*)$ für die Integrierbarkeit hinreichend ist, folgt mit Satz 1.4.4, sobald gezeigt wurde, dass aus der Endlichkeit der Norm für messbares f bereits die Integrierbarkeit folgt. Weiterhin kann man annehmen, dass f Werte in $\overline{\mathbb{R}}$ hat und da $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, kann man $f \geqslant 0$ annehmen.
Definiere die *pyramidale Approximation* von f durch
$$f_k = \frac{1}{2^k} \cdot \sum_{j=0}^{k \cdot 2^k} 1_{\{f > j \cdot 2^{-k}\}} \quad \text{für alle } \; k \in \mathbb{N} \, .$$
Dann gilt $f = \sup_k f_k$, $0 \leqslant f_k \leqslant f_{k+1}$, so dass es mit Satz 1.3.1 reicht, die Integrierbarkeit von $\{f > a\}$ für $a > 0$ zu zeigen.

Nach Definition der Norm $\|\sqcup\|_1$ gibt es $g_j \in \mathcal{C}_c(X)$, $g_j \geqslant 0$, mit

$$f \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} g_j \quad \text{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \int g_j \, d\mu < \infty \, .$$

Aus Satz 1.3.1 folgt, dass $g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j$ integrierbar ist. Es gilt $\{f > a\} \subset \{g > a\}$; die Menge $\{g > a\}$ ist integrierbar nach Satz 1.6.5, also ist $\{f > a\}$ integrierbar nach Satz 1.6.2 (iv). Dies zeigt die Behauptung. □

Korollar 1.6.9. Sei $f \in \mathcal{F}(X)$ messbar. Es gibt eine Folge integrierbarer Funktionen (f_j) mit kompaktem Träger, so dass $f = \limsup_j f_j$ punktweise überall. Ist $f \in \mathcal{F}_+(X)$, so kann man $f_j \leqslant f_{j+1}$ und $f = \sup_j f_j$ annehmen.

Beweis. Es reicht den Fall $f \in \mathcal{F}(X)$ zu betrachten. Seien $K_j \subset K_{j+1}$ Kompakta mit $X = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$. Man setzt

$$f_j = \min\bigl(\max(f, -j_{K_j}), j_{K_j}\bigr) \, , \quad \text{so dass} \quad |f_j| \leqslant j \cdot 1_{K_j} \, .$$

Dann ist $f = \limsup_j f_j$ und f_j μ-messbar. Weiterhin ist $\|f_j\|_1 \leqslant j \cdot \mu(K_j) < \infty$, also f_j integrierbar nach dem Theorem. Ist $f \geqslant 0$, so ist $f_j = \min(f, j_{K_j}) \leqslant f_{j+1}$. □

Es ist natürlich Funktionen zu integrieren, die auf Teilmengen von X definiert sind. Mithilfe des Integrabilitätskriteriums ist diese Operation nun einfach zu definieren.

Definition 1.6.10. Sei $Y \subset X$ eine lokal kompakte Teilmenge von X . Dann definiert man auf Y ein Elementarintegral μ_Y durch

$$\mu_Y(f) = \int \tilde{f} \, d\mu \quad \text{für alle } \; f \in \mathcal{C}_c(Y) \, ,$$

wobei $\tilde{f}$ die Nullfortsetzung von f ist (d.h. $= 0$ auf $X \setminus Y$). Die Definition ist sinnvoll: $\tilde{f}$ ist messbar (da Y lokal abgeschlossen, also messbar ist); weiter ist $\tilde{f}$ beschränkt und hat kompakten Träger. Es folgt leicht, dass $\|\tilde{f}\|_1 < \infty$, also ist $\tilde{f}$ μ-integrierbar. Es folgt leicht mit Korollar 1.6.9, dass

$$\int f \, d\mu_Y = \int \tilde{f} \, d\mu \quad \text{für alle } \mu\text{-integrierbaren } f \in \mathcal{F}(X; \overline{\mathbb{C}}) \, .$$

Ist weiter $f : X \to \overline{\mathbb{C}}$ μ-integrierbar und $A \subset X$ μ-messbar, so definiert man

$$\int_A f \, d\mu = \int 1_A \cdot f \, d\mu \, .$$

Aus dem Obigen ist klar, dass $\int_Y f \, d\mu = \int f|Y \, d\mu_Y$.

1.7 Integration über Produktmengen und sukzessive Integration

Im folgenden sei Y stets ein weiterer lokal kompakter, separabler metrischer Raum, versehen mit einem Elementarintegral ν .

Definition 1.7.1. Man definiert auf dem metrischen Raum $X \times Y$ ein Elementarintegral $\mu \otimes \nu$ durch

$$(\mu \otimes \nu)(f) = \nu\bigl(y \mapsto \mu(f(\sqcup, y))\bigr) = \iint f(x,y) \, d\mu(x) \, d\nu(y) \quad \text{für alle } \; f \in \mathcal{C}_c(X \times Y) \, .$$

Diese Definition ist sinnvoll, da $g : Y \to \mathbb{C} : y \mapsto \mu(f(\llcorner, y)) = \int f(x,y)\, d\mu(x)$ nach Theorem 1.5.1 stetig ist. Weiterhin ist $\operatorname{supp} f$ kompakt, also in $K \times L$ enthalten, wobei $K \subset X$ und $L \subset Y$ kompakt sind. Damit ist $\operatorname{supp} g \subset L$, also kompakt. Es ist offensichtlich, dass $\mu \otimes \nu$ ein Elementarintegral ist. Man nennt es das *Produktintegral* von μ und ν.

Falls $f \in \mathcal{F}_+(X)$, so *definieren* wir zur Verbesserung der Lesbarkeit das *Integral einer positiven Funktion* als $\int f\, d\mu = \|f\|_1$. Für integrierbares f stimmt dies mit der üblichen Definition überein, nach Satz 1.2.3.

Theorem 1.7.2. Sei f eine $\mu \otimes \nu$-integrierbare Funktion auf $X \times Y$. Für μ-fast alle $x \in X$ ist $f(x, \llcorner)$ ν-integrierbar und für ν-fast alle $y \in Y$ ist $f(\llcorner, y)$ μ-integrierbar. Die Funktionen $\int f(x, \llcorner)\, d\mu(x)$ und $\int f(\llcorner, y)\, d\nu(y)$ sind ν- bzw. μ-integrierbar und es gilt

$$\int f\, d(\mu \otimes \nu) = \iint f(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \iint f(x,y)\, d\nu(y)\, d\mu(x) .$$

Um das Theorem zu beweisen, benötigen wir den folgenden als Theorem von Stone–Weierstraß bekannten Satz.

Satz 1.7.3. Sei Z ein kompakter metrischer Raum und $E \subset \mathcal{C}(Z; \mathbb{R})$ eine Teilmenge mit den folgenden Eigenschaften:

1. E trennt die Punkte von Z stark, d.h. zu $x, y \in Z$, $x \neq y$, und $a, b \in \mathbb{R}$, gibt es $f \in E$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$;

2. E ist ein Verband, d.h. aus $f, g \in E$ folgt $\min(f, g), \max(f, g) \in E$.

Dann ist E dicht in $\mathcal{C}(Z; \mathbb{R})$, d.h. zu $f \in \mathcal{C}(Z; \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $g \in E$ mit $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Beweis. Man kann annehmen, dass Z wenigstens zwei Punkte hat, sonst ist nichts zu zeigen. Seien $f \in \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$. Zu $x \in Z$ und zu jedem $y \in Z \setminus x$ gibt es eine Funktion $g_{xy} \in E$ mit $g_{xy}(x) = f(x)$ und $g_{xy}(y) = f(y)$. Zu jedem $y \neq x$ ist

$$U_y = \big\{ z \in Z \;\big|\; g_{xy}(z) < f(z) + \varepsilon \big\}$$

eine offene Umgebung von x und y. Da Z kompakt ist, ist $K = \bigcup_{y \in Z'} U_y$ für eine gewisse endliche Teilmenge $Z' \subset Z \setminus x$. Setze $g_x = \min_{y \in Z'} g_{xy}$. Dann ist $g_x \in E$, $g_x(x) = f(x)$ und $g_x < f + \varepsilon$. Setzt man $V_x = \big\{ z \in Z \;\big|\; f(z) < g_x(z) + \varepsilon \big\}$, so ist V_x eine offene Umgebung von x. Es gibt also eine endliche Teilmenge $Z'' \subset Z$ mit $Z = \bigcup_{x \in Z''} V_x$. Dann gilt für $g = \max_{x \in Z''} g_x$, dass $g \in E$ und $f - \varepsilon < g < f + \varepsilon$, also die Behauptung. □

Korollar 1.7.4. Die Aussage des Satzes gilt immer noch, wenn man Bedingung 2 ersetzt durch: $E \subset \mathcal{C}(Z; \mathbb{R})$ ist eine Unteralgebra, d.h. unter Summen, Produkten und Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen, und enthält die konstante Einsfunktion.

Beweis. Minimum und Maximum lassen sich durch den Absolutbetrag ausdrücken. Der Absolutbetrag ist die Quadratwurzel aus dem Quadrat. Die Quadratwurzel lässt sich durch eine konvergente Pontenzreihe ausdrücken, in der die Einsfunktion vorkommt. Folglich ist der Abschluss von E in $\mathcal{C}(Z; \mathbb{R})$ ein Verband. □

Mit Hilfe des Satzes von Stone–Weierstraß können wir das folgende Lemma beweisen, was uns dem Beweis von Theorem 1.7.2 einen Schritt näher bringt.

Lemma 1.7.5. Es gilt

$$(\mu \otimes \nu)(f) = \mu\big(x \mapsto \nu(f(x,\sqcup))\big) = \iint f(x,y)\,d\nu(y)\,d\mu(x) \quad \text{für alle } f \in \mathcal{C}_c(X \times Y)\,.$$

Beweis. Man kann $f \in \mathcal{C}_c(X \times Y; \mathbb{R})$ annehmen. Es gilt $\operatorname{supp} f \subset K \times L$ mit $K \subset X$ und $L \subset Y$ kompakt. Seien $K' \supset K$ und $L' \supset L$ kompakte Umgebungen. Setze

$$E = \Big\{ (x,y) \mapsto \sum_{j=0}^{k} g_j(x) h_j(y) \;\Big|\; g_j \in \mathcal{C}(K')\,,\, h_j \in \mathcal{C}(L')\,,\, k \in \mathbb{N} \Big\}\,.$$

Durch

$$\varrho(h) = \mu\big(x \mapsto \nu(h(x,\sqcup))\big) \quad \text{für alle } h \in \mathcal{C}_c(X \times Y)$$

wird ein Elementarintegral auf $X \times Y$ definiert. Seien $\varphi \in \mathcal{C}_c(X)$ mit $1_K \leqslant \varphi \leqslant 1_{K'}$ und $\psi \in \mathcal{C}_c(Y)$ mit $1_L \leqslant \psi \leqslant 1_{L'}$. Setze $\chi(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$. Für g ist die Fortsetzung der Funktion $\chi \cdot g$ auf $X \times Y$ durch 0 stetig mit kompaktem Träger und es gilt

$$\varrho(\chi \cdot g) = \sum_{j=0}^{k} \int g_j(x)\,d\mu(x) \cdot \int h_j(y)\,d\nu(y) = (\mu \otimes \nu)(\chi \cdot g)\,.$$

Es ist klar, dass $1_{K' \times L'} \in E$ und dass E eine Unteralgebra ist. Wir zeigen, dass E die Punkte von $K' \times L'$ stark trennt. Seien dazu $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in K' \times L'$ verschieden und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt etwa $x_1 \neq x_2$, so dass es $g \in \mathcal{C}(K')$ mit $g(x_1) = a$ und $g(x_2) = b$ gibt. Weiter gibt es $h \in \mathcal{C}(L')$ mit $h(y_1) = h(y_2) = 1$. Setzt man $k(x,y) = g(x)h(y)$, so gilt $k \in E$ und $k(x_1,y_1) = a$, $k(x_2,y_2) = b$. Aus Korollar 1.7.4 folgt, dass E in $\mathcal{C}(K' \times L')$ dicht ist.

Folglich gibt es $f_k \in \mathcal{C}(K' \times L')$ mit $f|(K' \times L') = \lim_k f_k$ gleichmäßig auf $K' \times L'$. Damit ist $f = \lim_k \chi \cdot f_k$ gleichmäßig auf $X \times Y$. Aus Lemma 1.1.9 folgt

$$\varrho(f) = \lim_k \varrho(\chi \cdot f_k) = \lim_k (\mu \otimes \nu)(\chi \cdot f_k) = (\mu \otimes \nu)(f)\,,$$

also die Behauptung. □

Lemma 1.7.6. Sei $f \in \mathcal{F}(X \times Y; \overline{\mathbb{C}}) \cup \mathcal{F}(X \times Y)$. Dann gilt

$$\iint |f(x,y)|\,d\mu(x)\,d\nu(y) \leqslant \int |f(x,y)|\,d(\mu \otimes \nu)(x,y)$$

im Sinne des oben definierten Integrals positiver Funktionen.

Beweis. Sei $|f| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} g_j$ mit $g_j \in \mathcal{C}_c(X \times Y)$, $g_j \geqslant 0$. Für alle $y \in Y$ sind $g_j(\sqcup, y) \in \mathcal{C}_c(X)$ positiv mit $|f(\sqcup, y)| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} g_j(\sqcup, y)$. Also gilt qua Definition

$$\int |f(x,y)|\,d\mu(x) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \int g_j(x,y)\,d\mu(x) \quad \text{für alle } y \in Y\,.$$

Mit dem Argument aus Definition 1.7.1 sind die Funktionen $\int g_j(x, \sqcup)\,d\mu(x)$ stetig mit kompaktem Träger. Folglich ist

$$\iint |f(x,y)|\, d\mu(x)\, d\nu(y) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \iint g_j(x,y)\, d\mu(x)\, d\nu(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \int g_j(x,y)\, d(\mu \otimes \nu)(x,y)\,,$$

wiederum nach Definition und nach Lemma 1.7.5. Das Infimum über die rechten Seiten für verschiedene Wahlen von (g_j) ist aber gerade gleich $\int |f|\, d\mu \otimes \nu$. □

Beweis von Theorem 1.7.2. Nach Lemma 1.7.5 sind die Elementarintegrale $\mu \otimes \nu$ und $\nu \otimes \mu$ identisch. Die Aussagen für eine Integrationsreihenfolge folgen aus der für die andere Integrationsreihenfolge, angewandt auf $\nu \otimes \mu$. Deswegen reicht es, die Aussagen nur für eine Reihenfolge zu beweisen.

Sei $(f_j) \subset \mathcal{C}_c(X \times Y)$ mit $\|f - f_j\|_{1,\mu\otimes\nu} \leqslant 2^{-j+1}$. Setze

$$g_j(y) = \begin{cases} \int |f(x,y) - f_j(x,y)|\, d\mu(x) & \text{wo das Integral endlich ist,} \\ 2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt nach Lemma 1.7.6, dass $\int g_j\, d\nu \leqslant 2^{-(j+1)}$. Definiere

$$g(y) = \begin{cases} \lim_j g_j(y) & \text{falls existent,} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls $\lim_j g_j(y)$ existiert, ist

$$|g(y)| \leqslant g_j(y) + \sum_{i=j}^{\infty} |g_{i+1}(y) - g_i(y)|\,. \tag{$*$}$$

Ist andererseits $\sum_{i=j}^{\infty} |g_{i+1}(y) - g_i(y)| < \infty$, so folgt $\lim_j \sum_{i=j}^{\infty} (g_{i+1}(y) - g_i(y)) = 0$ und der Grenzwert $\lim_j g_j(y)$ existiert. Somit gilt $(*)$ für alle $y \in Y$. Es folgt mit Satz 1.1.12 (ii), dass

$$\|g\|_{1,\nu} \leqslant \int g_j\, d\nu + \sum_{i=j}^{\infty} \int |g_{i+1} - g_i|\, d\nu \leqslant 2^{-(j+1)} + \sum_{i=j}^{\infty} \big(2^{-(i+2)} + 2^{-(i+1)}\big) = 2^{-j+1} \to 0\,.$$

Damit ist g eine Nullfunktion; es folgt $\lim_j g_j = 0$ punktweise ν-fast überall.

Sei $N \subset Y$ die ν-Nullmenge aller $y \in Y$, für die $g_j(y) \not\to 0$. Es gilt

$$\lim_k \|f(\sqcup, y) - f_j(\sqcup, y)\|_{1,\mu} = 0 \quad \text{für alle } y \notin N\,.$$

Daher ist $f(\sqcup, y)$ in diesem Fall μ-integrierbar. Weiter definiert $h_j(y) = \int f_j(x,y)\, d\mu(x)$ eine Funktion in $\mathcal{C}_c(Y)$. Für $y \notin N$ gilt

$$\Big|\int f(x,y)\, d\mu(x) - h_j(y)\Big| \leqslant \int |f(x,y) - f_j(x,y)|\, d\mu(x) = g_j(y)\,.$$

Es folgt

$$\int \Big|\int f(x,y)\, d\mu(x) - h_j(y)\Big|\, d\nu(y) \leqslant \int g_j(y)\, d\nu \leqslant 2^{-(j+1)} \to 0\,,$$

wobei $\int f(x,y)\, d\mu(x)$ beliebig definiert ist, wenn $y \notin N$. Da $h_j \in \mathcal{C}_c(Y)$, folgt, dass die Funktion

$\int f(x,\sqcup)\,d\mu(y)$ auf Y ν-integrierbar ist. Schließlich ist

$$\Big|\iint f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) - \int h_j(y)\,d\nu(y)\Big| \leqslant \int\Big|\int f(x,y)\,d\mu(x) - h_j(y)\Big|\,d\nu(y) \to 0\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\iint f(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) &= \lim_j \int h_j(y)\,d\nu(y) = \lim_j \iint f_j(x,y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)\\ &= \lim_j \int f_j(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int f(x,y)\,d(\mu\otimes\nu)(x,y)\,.\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Korollar 1.7.7. Seien $n,m \in \mathbb{N}$. Bezeichnet man mit λ^n das Lebesgueintegral auf $\mathbb{R}^n$, so gilt $\lambda^n \otimes \lambda^m = \lambda^{n+m}$. Allgemeiner gilt $\lambda^n_\varrho \otimes \lambda^m_\sigma = \lambda^{n+m}_{\varrho\otimes\sigma}$, wobei $\varrho : \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ und $\sigma : \mathbb{R}^m \to [0,\infty[$ stetig sind und $(\varrho\otimes\sigma)(x,y) = \varrho(x)\sigma(y)$.

Beweis. Dies ist aufgrund der Definitionen klar. □

Theorem 1.7.8. Sei f eine $\mu\otimes\nu$-messbare Funktion auf $X\times Y$.

(i). Für μ-fast alle $x\in X$ ist $f(x,\sqcup)$ ν-messbar und für ν-fast alle $y\in Y$ ist $f(\sqcup,y)$ μ-messbar.

(ii). Die Funktionen $\int|f(x,\sqcup)|\,d\mu(x)$ und $\int|f(\sqcup,y)|\,d\nu(y)$ sind ν- bzw. μ-messbar und es gilt

$$\int|f|\,d(\mu\otimes\nu) = \iint|f(x,y)|\,d\mu(x)\,d\nu(y) = \iint|f(x,y)|\,d\nu(y)\,d\mu(x)\,.$$

(iii). Insbesondere ist f $\mu\otimes\nu$-integrierbar genau dann, wenn eines der Integrale

$$\iint|f(x,y)|\,d\mu(x)\,d\nu(y) \quad\text{und}\quad \iint|f(x,y)|\,d\nu(y)\,d\mu(x) \quad\text{endlich ist.}$$

(iv). Sei $A \subset X\times Y$ $\mu\otimes\nu$-messbar. Dann ist A eine $\mu\otimes\nu$-Nullmenge genau dann, wenn $A_y = \{x\in X \mid (x,y)\in A\}$ eine μ-Nullmenge ist für ν-fast alle $y\in Y$, genau dann, wenn die Menge ${}_xA = \{y\in Y \mid (x,y)\in A\}$ eine ν-Nullmenge ist für μ-fast alle $x\in X$.

Beweis. Man kann sich auf den Fall $f\in\mathcal{F}(X)$ beschränken. Teile (i) und (ii) folgen mit Korollar 1.6.9 sofort aus Theorem 1.7.2. Dann ist (iii) eine Folgerung aus (ii) in Verbindung mit Theorem 1.6.8. Auch (iv) folgt aus (ii), in Verbindung mit Satz 1.4.2 (ii), denn

$$\int 1_A(x,y)\,d\mu(x) = \mu(A_y) \quad\text{und}\quad \int 1_A(x,y)\,d\nu(y) = \nu({}_xA)\,.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 1.7.9. Theorem 1.7.2 ist als Satz von Fubini bekannt, Theorem 1.7.8 als Satz von Tonelli. In Anwendungen ist der Satz von Fubini sehr bedeutend; um die Voraussetzung der $\mu\otimes\nu$-Integrierbarkeit nachzuweisen, greift man in der Regel auf den Satz von Tonelli zurück.

Beispiel 1.7.10. Seien $f,g : X\to\overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar und

$$B = \{(x,t)\in X\times\mathbb{R} \mid f(x)\leqslant t\leqslant g(x)\}\,.$$

Dann gilt

$$(\mu\otimes\lambda)(B) = \int g\,d\mu - \int f\,d\mu\,,$$

wobei λ das Lebesgueintegral auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Beispiel 1.7.11. Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \in]-1,1[^2 \setminus \{(0,0)\}\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann existieren die sukzessiven Integrale und stimmen überein, aber die Funktion f ist nicht $\lambda^2 = \lambda \otimes \lambda$-integrierbar.

Beispiel 1.7.12. Man betrachte die Funktion

$$f :]0,1[\times]1,\infty[\to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto e^{-xy} - 2e^{-2xy}\,.$$

Dann sind die sukzessiven Integrale von f verschieden; die sukzessiven Integrale von $|f|$ sind beide unendlich.

Beispiel 1.7.13. Aus der Tatsache, dass $\int_0^\infty e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}$, folgert man mit dem Satz von Fubini, dass

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Beispiel 1.7.14. Sei $s \in \mathbb{R}$. Die Funktion

$$Q =]0,1[^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{1}{(x+y)^s}$$

ist λ_Q^2-integrierbar genau dann, wenn $s < 2$. In diesem Fall ist

$$\int_Q \frac{dx\,dy}{(x+y)^s} = \begin{cases} 2\log 2 & s = 1\,, \\ \dfrac{2^{2-s}-2}{(1-s)(2-s)} & 1 \neq s < 2\,. \end{cases}$$

Die Funktion

$$Q \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \frac{1}{(x^2+y^2)^s}$$

ist λ_Q^2-integrierbar genau dann, wenn $s < 1$.

1.8 Die Transformationsformel

Definition 1.8.1. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ eine Abbildung. Dann heißt f ein *Diffeomorphismus*, falls f stetig differenzierbar und bijektiv und f^{-1} stetig differenzierbar sind. Falls f stetig und bijektiv und f^{-1} stetig sind, spricht man von einem *Homöomorphismus*. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist bekanntermaßen eine stetig differenzierbare Injektion $f : U \to \mathbb{R}^n$ genau dann ein Diffeomorphismus auf $V = f(U)$, wenn $Df(x)$ invertierbar ist für alle $x \in U$. In diesem Fall ist $V = f(U)$ automatisch offen.

Theorem 1.8.2. Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g : U \to V$ ein Diffeomorphismus und $f \in \mathcal{F}(V)$. Dann gilt

(i). Genau dann ist f λ_V-messbar, wenn $f \circ g \cdot |\det Dg|$ λ_U-messbar ist.

(ii). Genau dann ist f λ_V-integrierbar, wenn $f \circ g \cdot |\det Dg|$ λ_U-integrierbar ist.

(iii). Ist $f \geqslant 0$ oder f integrierbar, so gilt

$$\int_V f(x)\,dx = \int_U f\big(g(x)\big) \cdot |\det Dg(x)|\,dx\,.$$

Beweis. Teil (i) folgt aus (ii) in Verbindung mit Korollar 1.6.9. Teil (ii) folgt aus (iii) für $f \geqslant 0$ und für $f \in \mathcal{C}_c(V)$, mit der Definition von Integrierbarkeit. Dann folgt Teil (iii) für f integrierbar durch die Zerlegung $f = f^+ - f^-$.

Es reicht also, (iii) für positive und für stetige und kompakt getragene Funktionen zu beweisen. Aus der Definition von $\|\sqcup\|_1$ folgt aber, dass es reicht, die Aussage für $f \in \mathcal{C}_c(V)$ zu beweisen. Das machen wir per Induktion nach n.

Sei dafür zunächst $n = 1$. Die Menge U ist aufgrund ihrer Offenheit die Vereinigung ihrer maximalen offenen Teilintervalle. Da $\mathbb{R}$ keine überabzählbare diskrete Teilmenge enthält, ist die Menge der maximalen offenen Teilintervalle abzählbar. Es gibt also offene und disjunkte Intervalle I_k (endlich oder abzählbar unendlich viele), so dass $U = \bigcup_k I_k$. Auf jedem Intervall I_k ist g streng monoton (wachsend oder fallend) mit dem entsprechend $\det Dg = g' > 0$ oder < 0 auf dem Intervall I_k. Es gilt $V = \bigcup_k g(I_k)$ und da g injektiv ist, ist diese Vereinigung disjunkt. Mit $I_k = [a_k, b_k]$ hat man

$$g(I_k) = \begin{cases} [g(a_k), g(b_k)] & g' > 0 \text{ auf } I_k\,, \\ [g(b_k), g(a_k)] & g' < 0 \text{ auf } I_k\,, \end{cases}$$

also

$$\int_{I_k} f \circ g \cdot |Dg|\,d\lambda = \operatorname{sgn} g'(I_k) \cdot \int_{a_k}^{b_k} f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \operatorname{sgn} g'(I_k) \cdot \int_{g(a_k)}^{g(b_k)} f(x)\,dx = \int_{g(I_k)} f\,d\lambda\,.$$

Mit Theorem 1.3.3 folgt

$$\int f\,d\lambda_V = \sum\nolimits_k \int_{g(I_k)} f\,d\lambda = \sum\nolimits_k \int_{I_k} f \circ g \cdot |\det Dg|\,d\lambda = \int f \cdot |\det Dg|\,d\lambda_U\,.$$

Nun nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, dass $n \geqslant 2$ und die Aussage (iii) für alle Diffeomorphismen offener Teilmengen von $\mathbb{R}^{n-1}$ und alle stetigen, kompakt getragenen Funktionen auf $\mathbb{R}^{n-1}$ bewiesen sei.

Zunächst nehmen wir an, dass g die erste Variable festhält, d.h.,

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \big(y_1, g_2(y_1, \ldots, y_n), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_n)\big)\,.$$

Für $y \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$U_y = \big\{\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1} \bigm| (y, \tilde{y}) \in U\big\} \quad \text{und} \quad V_y = \big\{\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1} \bigm| (y, \tilde{y}) \in V\big\}\,.$$

Dann ist für festes $y \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$g_y : U_y \to V_y : \tilde{y} \mapsto \big(g_2(y, \tilde{y}), \ldots, g_n(y, \tilde{y})\big)\,, \quad \text{wobei} \quad \tilde{y} = (y_2, \ldots, y_n)\,,$$

eine stetig differenzierbare Bijektion. Es gilt $g(y,\tilde{y}) = (y, g_y(\tilde{y}))$ und folglich

$$0 \neq \det Dg(y,\tilde{y}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 g(y,\tilde{y}) & Dg_y(\tilde{y}) \end{vmatrix} = \det Dg_y(\tilde{y}) \,.$$

Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist $g_y : U_y \to V_y$ ein Diffeomorphismus.
Die Funktionen f und $f \circ g \cdot |\det Dg|$ kann man durch Fortsetzung mit 0 als Elemente von $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ betrachten. Nach Induktionsvoraussetzung und dem Satz von Fubini gilt also

$$\begin{aligned} \int f\,d\lambda &= \iint f(y,\tilde{y})\,d(y,\tilde{y}) = \int_{\mathbb{R}} \int_{V_y} f(y,\tilde{y})\,d\tilde{y}\,dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{U_y} f(y, g_y(\tilde{y})) \cdot |\det Dg_y(\tilde{y})|\,d\tilde{y}\,dy \\ &= \iint f(g(y,\tilde{y})) \cdot |\det Dg(y,\tilde{y})|\,d\tilde{y}\,dy = \int f \circ g \cdot |\det Dg|\,d\lambda \,. \end{aligned}$$

Nun sei g beliebig. Sei $u \in U$. Dann ist $\det Dg(u) \neq 0$, also gibt es k, ℓ mit $\partial_k g_\ell(u) \neq 0$. Durch Vertauschung der Koordinaten in U und V kann man annehmen, dass $k = \ell = n$. (Vertauschung der Koordinaten lässt nach Theorem 1.7.2 beide Seiten der Gleichung unverändert.)
Wir definieren $h : U \to \mathbb{R}^n$ durch $h(\tilde{y}, y) = \big(\tilde{y}, g_n(\tilde{y}, y)\big)$, wobei $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Dann ist h stetig differenzierbar und

$$\det Dh(u) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \partial_1 g_n(u) \cdots \partial_{n-1} g_n(u) & \partial_n g_n(u) \end{vmatrix} = \partial_n g_n(u) \neq 0 \,.$$

Nach dem Satz über die Umkehrfunktion gibt es offene Umgebungen U_u und V_u der Punkte u und $h(u)$, so dass $h : U_u \to V_u$ ein Diffeomorphismus ist.
Die Abbildung h hält die erste Variable fest. Für $k = g \circ h^{-1} : V_u \to g(U_u)$ gilt für alle Punkte $z = h(\tilde{y}, y) = (\tilde{y}, g_n(\tilde{y}, y)) \in U_u$

$$k(z) = g(\tilde{y}, y) = \big(g_1(\tilde{y}, y), \ldots, g_n(\tilde{y}, y)\big) = (*, z_n) \,,$$

also hält k die letzte Variable fest. Mit dem Obigen folgt

$$\begin{aligned} \int_{g(U_u)} f\,d\lambda &= \int_{V_u} f \circ k \cdot |\det Dk|\,d\lambda \\ &= \int_{U_u} f \circ k \circ h \cdot |\det(Dk \circ h) \cdot \det Dh|\,d\lambda = \int_{U_u} f \circ g \cdot |\det Dg|\,d\lambda \,; \end{aligned}$$

hierbei wurde die Kettenregel benutzt. Mit Hilfe der Argumente, die am Anfang des Beweises aufgeführt wurden, gilt diese Gleichung sogar für jedes integrierbare f.
Da $\operatorname{supp} f$ kompakt ist, gibt es $u_0, \ldots, u_m \in U$ mit $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{j=0}^m V_j$, wobei $V_j = g(U_j)$ und $U_j = U_{u_j}$. Nun setzt man $A_j = U_j \setminus \bigcup_{i<j} U_i$ und $B_j = g(A_j)$. Weiter sind A_j und B_j lokal abgeschlossen, also messbar, so dass $1_{B_j} \cdot f$ und $(1_{B_j} \cdot f) \circ g \cdot |\det Dg|$ integrierbar sind. Dann folgt mit $1_{B_j} \circ g = 1_{A_j}$

$$\int_V f\,d\lambda = \sum_{j=0}^m \int_{V_j} 1_{B_j} \cdot f\,d\lambda = \sum_{j=0}^m \int_{U_j} 1_{A_j} \cdot f \circ g \cdot |\det Dg|\,d\lambda = \int_U f \circ g \cdot |\det Dg|\,d\lambda \,,$$

d.h. die Behauptung. □

Beispiel 1.8.3. Bereits aus der Analysis I sind die *ebenen Polarkoordinaten* bekannt. Wir wollen Sie noch einmal ausführlich diskutieren. Für $t, x, y \in \mathbb{R}$ gilt mit den Bezeichnungen

$$k_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad \text{dass} \quad k_t \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x\cos t - y \sin t \\ x \sin t + y \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\big(e^{it} \cdot (x+iy)\big) \\ \mathrm{Im}\big(e^{it} \cdot (x+iy)\big) \end{pmatrix}$$

also unter der Identifizierung $z = x + iy \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, dass $k_t \cdot z = e^{it} \cdot z$. Daraus folgt sofort $k_{s+t} = k_s \cdot k_t$.[2] Weiterhin ist

$$\|k_t \cdot (x,y)^t\|_2 = |e^{it} z| = |z| = \|(x,y)^t\|_2$$

Die ebene Polarkoordinatenabbildung ist nun gegeben durch

$$\varphi :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 : (r,t) \mapsto r \cdot k_t \cdot e_1 = (r \cdot \cos t, r \cdot \sin t)\,,$$

wobei $e_1 = (1,0)^t$.
Sei $\varphi(r_1,t_1) = \varphi(r_2,t_2)$. Es gilt

$$r_1 = \|\varphi(r_1,t_1)\|_2 = \|\varphi(r_2,t_2)\|_2 = r_2\,,$$

also $k_{t_1} e_1 = k_{t_2} e_1$. Es folgt $e^{i(t_1-t_2)} = k_{t_1-t_2} e_1 = e_1 = 1$, also $t_1 - t_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$. Da $-\pi < t_1, t_2 < \pi$, folgt $t_1 = t_2$. Damit ist φ injektiv.
Offensichtlich ist φ unendlich oft stetig differenzierbar. Es gilt

$$D\varphi(r,t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{vmatrix} = r \cdot \det k_t = r > 0\,.$$

Damit ist $D\varphi(r,t)$ invertierbar und φ ist nach dem Satz über die Umkehrfunktion ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Es ist leicht zu sehen, dass

$$\varphi(]0,\infty[\times]-\pi,\pi[) = \mathbb{R}^2 \setminus (]-\infty,0] \times 0)\,.$$

Da $\mathbb{R} \times 0$ eine λ^2-Nullmenge ist nach dem Satz von Tonelli (0 ist eine λ-Nullmenge in $\mathbb{R}$), ist das Komplement des Bildes von φ eine Nullmenge.
Mit der Transformationsformel kann man nun zeigen, dass

$$\lambda^2(\mathbb{B}_r) = \pi \cdot r^2 \quad \text{die Fläche der Kreisscheibe mit Radius } r \text{ ist.}$$

Weiterhin folgt mit der Formel (Übung) die folgende Gleichung für die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$, $x > 0$, und die Eulersche Betafunktion $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\, dt$:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \text{für alle } p,q > 0\,.$$

Beispiel 1.8.4. In Verallgemeinerung der ebenen Polarkoordinaten führt man die *räumlichen Polarkoordinaten* ein. Dies ist die Abbildung $\varphi :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^3$, die durch die

[2] Mit der in der Analysis III eingeführten Exponentialfunktion für Matrizen gilt auch $k_t = \exp t \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

folgende Formel gegeben ist

$$\varphi(r,t_2,t_3) = r\cdot\begin{pmatrix} k_{t_2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t_3 & 0 & -\sin t_3\\ 0 & 1 & 0\\ \sin t_3 & 0 & \cos t_3\end{pmatrix}\cdot e_1 = \begin{pmatrix} r\cdot\cos t_3\cdot\cos t_2\\ r\cdot\cos t_3\cdot\sin t_2\\ r\cdot\sin t_3\end{pmatrix}.$$

Bezeichnet k_t^j also die Wirkung von k_t auf der ersten und j-ten Komponente (d.h. Rotation in der (x_1,x_j)-Ebene), so gilt $\varphi(r,t_2,t_3) = k_{t_2}^2 k_{t_3}^3 e_1 = k_3^{t_3}\cdot(\varphi(r,t_2),0)$. Da $t_3\in\,]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ durch $\sin t_3$ eindeutig bestimmt ist, folgt aus der Injektivität der ebenen Polarkoordinaten, dass φ injektiv ist. Man sieht leicht, dass

$$\varphi(]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}^3\setminus(]-\infty,0]\times 0\times\mathbb{R}).$$

Da

$$\begin{aligned}\det D\varphi(r,t_2,t_3) &= r^2\cdot\begin{vmatrix}\cos t_3\cdot\cos t_2 & -\cos t_3\cdot\sin t_2 & -\sin t_3\cdot\cos t_2\\ \cos t_3\cdot\sin t_2 & \cos t_3\cdot\cos t_2 & \sin t_3\cdot\sin t_2\\ \sin t_3 & 0 & \cos t_3\end{vmatrix}\\ &= r^2\cdot\cos t_3\cdot\begin{vmatrix}\cos t_3\cdot\cos t_2 & -\sin t_2 & -\sin t_3\cdot\cos t_2\\ \cos t_3\cdot\sin t_2 & \cos t_2 & \sin t_3\cdot\sin t_2\\ \sin t_3 & 0 & \cos t_3\end{vmatrix}\\ &= r^2\cdot\cos t_3\cdot\det(k_{t_2}^2\cdot k_{t_3}^3) = r^2\cos t_3 > 0,\end{aligned}$$

ist φ ein Diffeomorphismus auf sein Bild.

Beispiel 1.8.5. Die *n-dimensionalen Polarkoordinaten* ($n\geqslant 2$) sind gegeben durch die Abbildung $\varphi:]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[^{n-2}\to\mathbb{R}^n$,

$$\varphi(r,t_2,\dots,t_n) = r\cdot k_{t_2}^2\cdots k_{t_n}^n\cdot e_1 = \begin{pmatrix} r\cdot\cos t_n\cdot\cdots\cos t_3\cos t_2\\ r\cdot\cos t_n\cdots\cos t_3\cdot\sin t_2\\ \vdots\\ r\cdot\sin t_n\end{pmatrix}.$$

Durch Induktion zeigt man, dass φ ein Diffeomorphismus auf $\mathbb{R}^n\setminus(]-\infty,0]\times 0\times\mathbb{R}^{n-2})$ ist mit

$$\det D\varphi(r,t_2,\dots,t_n) = r^{n-1}\cdot\cos^{n-2}t_n\cdot\cos^{n-3}t_{n-1}\cdots\cos t_3 > 0.$$

Als Anwendung (Übung) kann man zeigen, dass das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius r gegeben ist durch

$$\lambda^n(\mathbb{B}_r) = \frac{\pi^{n/2}r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Insbesondere ist $\lambda^n(\mathbb{B}_r)\to 0$ für $n\to\infty$!

Satz 1.8.6. Die Funktion F auf $\mathbb{R}^n$ sei rotationssymmetrisch, d.h. $F(x) = f(\|x\|_2)$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$ und eine Funktion f auf $[0,\infty[$. Dann ist F genau dann integrierbar, wenn $r\mapsto r^{n-1}\cdot f(r)$ $\lambda_{[0,\infty[}$-

integrierbar ist und in diesem Fall ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} F\, d\lambda^n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty f(r) r^{n-1}\, dr$$

Beweis. Es gilt $(F \circ \varphi)(r,t) = f(r)$, also

$$\begin{aligned}\int_{]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[^{n-2}} F \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|\, d\lambda^n &= 2^{n-1}\pi \int_0^\infty f(r) r^{n-1}\, dr \cdot \prod_{j=1}^{n-2} \int_0^{\pi/2} \sin^j t\, dt \\ &= \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty f(r) r^{n-1}\, dr\,,\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Bemerkung 1.8.7. Wie wir später sehen werden, ist der Vorfaktor $\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ gerade der Flächeninhalt der Einheitssphäre

$$\mathbb{S}^{n-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\|_2 = 1 \right\}.$$

Beispiel 1.8.8. Als Anwendung des obigen Satzes über rotationssymmetrische Funktionen betrachte man $F(x) = \frac{1}{\|x\|_2^s}$, wobei $s \in \mathbb{R}$ sei. Dann ist f über die Einheitskugel $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1$ (also in der Nähe von 0) integrierbar genau dann, wenn $s < n$ ist. In diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbb{B}} F\, d\lambda^n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^1 r^{n-s} \frac{dr}{r} = \frac{2\pi^{n/2}}{(n-s)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,.$$

Ebenso sieht man leicht ein, dass F genau dann über $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}$ (also in der Nähe von ∞) integrierbar ist, wenn $s > n$!

Beispiel 1.8.9. Sei A eine positiv definite symmetrische Matrix. Man zeigt, dass $A = B^2$ für eine positiv definite symmetrische Matrix B. Damit kann man das n-dimensionale Volumen des Ellipsoids $E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (x : Ax) \leqslant 1 \right\}$ sowie das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x:Ax)}\, dx$ berechnen.

2 Untermannigfaltigkeiten mit Rand

2.1 Offene Mengen mit Rand

Definition 2.1.1. Seien $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 1$, und $a \in \mathbb{R}$. Die Menge $H_{x,a} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x : y) \leqslant a\}$ heißt *geschlossener Halbraum*, ihr Inneres $H^\circ_{x,a} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x : y) < a\}$ *offener Halbraum*.
Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offene Menge mit Rand*, falls $U \subset H_{x,a}$ und in $H_{x,a}$ offen ist. Die Menge $\partial U = U \setminus H^\circ_{x,a}$ heißt der *Rand* von U. Man beachte, dass ∂U im allgemeinen nicht der topologische Rand von U in $\mathbb{R}^n$ ist!

Lemma 2.1.2. Sei U eine offene Menge mit Rand. Bezeichnet U° das topologische Innere von U in $\mathbb{R}^n$, so gilt für den Rand von U: $\partial U = U \setminus U^\circ$. Insbesondere ist ∂U wohldefiniert, unabhängig vom Halbraum $H_{x,a}$, in dem U offen ist.

Beweis. Es gibt $x \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, $\|x\| = 1$, $a \in \mathbb{R}$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $U = V \cap H_{x,a}$. Damit ist $V \cap H^\circ_{x,a} \subset U^\circ$. Sei umgekehrt $y \in U^\circ$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|z - y\| \leqslant \varepsilon \;\Rightarrow\; z \in U^\circ \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^n .$$

Insbesondere gilt $z = y + \varepsilon \cdot x \in U^\circ \subset H_{x,a}$. Damit ist

$$a \geqslant (z : x) = (y : x) + \varepsilon \cdot \|x\|^2 > (y : x) ,$$

also $x \in H^\circ_{x,a}$. Es folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.1.3. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = 1$, und $a \in \mathbb{R}$, gibt es eine Matrix $A \in \mathrm{SO}(n)$ (d.h. $A^t A = 1$ und $\det A = 1$), so dass $H_{x,a} = A(]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}) + a \cdot x$. Daher kann man bis auf affine Bijektionen annehmen, dass U in $H_{e_1,0} =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ offen ist. Dann ist $\partial U = U \cap (0 \times \mathbb{R}^{n-1})$ und kann als offene Teilmenge (ohne Rand) von $\mathbb{R}^{n-1}$ aufgefasst werden.

Definition 2.1.4. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit Rand und $f : U \to \mathbb{R}^m$. Dann heißt f auf U *stetig differenzierbar* oder $\mathcal{C}^q$*-Abbildung*, falls es für jedes $x \in U$ eine offene Umgebung $V_x \subset \mathbb{R}^n$ von x und eine q-mal stetig differenzierbare Abbildung $f_x : V_x \to \mathbb{R}^m$ gibt mit $f|U \cap V_x = f_x|U \cap V_x$. Falls $q \geqslant 1$ ist, definiert man $Df(x) = D\tilde{f}(x)$. Dies ist offenbar von der Wahl von $\tilde{f}$ unabhängig.
Ist $q \geqslant 1$ und $V \subset \mathbb{R}^n$ eine weitere offene Menge mit Rand und $f : U \to V$ stetig differenzierbar, bijektiv mit stetig differenzierbarer Umkehrabbildung, so heißt f ein *Diffeomorphismus*, genauer $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismus.
Falls $Df(x)$ lediglich injektiv ist für alle $x \in U$, so heißt f eine *Immersion* oder genauer $\mathcal{C}^q$-*Immersion*. Analog heißt für $Df(x)$ surjektiv für alle $x \in U$ f eine *Submersion* oder genauer $\mathcal{C}^q$-*Submersion*.

Satz 2.1.5. Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$, $W \subset \mathbb{R}^k$ offene Mengen mit Rand, $f : U \to V$ und $g : V \to W$ $\mathcal{C}^q$-Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f$ eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung. Ist $q \geqslant 1$ und f ein $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismus, so gilt $n = m$, $Df(x)$ ist invertierbar für alle $x \in U$,

$$f(U^\circ) = V^\circ \quad \text{und} \quad f(\partial U) = \partial V .$$

Insbesondere induziert f $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismen $U^\circ \to V^\circ$ und $\partial U \to \partial V$.

Beweis. Ist $x \in U$, so gibt es offene Umgebungen U_x von x, $V_{f(x)}$ von $f(x)$ und stetig differenzierbare Fortsetzungen $\tilde{f} : U_x \to \mathbb{R}^m$ und $\tilde{g} : V_{f(x)} \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$ auf der offenen Umgebung $f^{-1}(V_{f(x)}) \subset U_x$ von x wohldefiniert und stetig differenzierbar. Weiter gilt für $h = g \circ f$, dass $h|f^{-1}(V_{f(x)}) \cap U = \tilde{h}|f^{-1}(V_{f(x)}) \cap U$, also ist $g \circ f$ eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung.
Aus der Kettenregel folgt $Df^{-1}(f(x))Df(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ und $Df(x)Df^{-1}(f(x)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ für alle $x \in U$. Damit ist $n = m$ und $Df(x)$ ist invertierbar. Weiter ist $f|U^\circ$ stetig differenzierbar mit überall invertierbarer Ableitung, also folgt aus dem Satz über die Umkehrfunktion (Analysis II), dass $f(U^\circ)$ offen ist. Daher ist $f(U^\circ) \subset V^\circ$. Diese Aussage, angewandt auf f^{-1}, zeigt, dass $f^{-1}(V^\circ) \subset U^\circ$, also ist $f(U^\circ) = V^\circ$. Aus Lemma 2.1.2 folgt, dass $f(\partial U) = \partial V$. Damit ist $f|U^\circ : U^\circ \to V^\circ$ ein Diffeomorphismus und gleiches folgt für $f|\partial U : \partial U \to \partial V$. □

2.2 Untermannigfaltigkeiten mit Rand

Theorem 2.2.1. Seien $m \leqslant n$ natürliche Zahlen, $X \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i). Es gibt eine offene Menge mit Rand $U \subset \mathbb{R}^m$ und eine injektive $\mathcal{C}^q$-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^n$, so dass $f(U) \subset X$ eine in X offene Umgebung von x ist und $Df(f^{-1}(x))$ injektiv ist.

(ii). Es gibt eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n$ von x in $\mathbb{R}^n$ und einen $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismus $g : V \to g(V) \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$g(X \cap V) = g(V) \cap \big(]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times 0_{\mathbb{R}^{n-m}}\big) .$$

(iii). Es gibt eine offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ von x und $\mathcal{C}^q$-Abbildungen $h : W \to \mathbb{R}^{n-m}$ und $k : W \to \mathbb{R}$, so dass

$$X \cap W = \{h = 0\} \cap \{k \leqslant 0\} ,$$

h eine Submersion ist und die Vektoren $\operatorname{grad} h_j(x)$, $j = 1, \dots, n-m$ und $\operatorname{grad} k(x)$ linear unabhängig sind, wann immer $k(x) = 0$ ist.

Man kann annehmen, dass U in $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$ offen ist und durch geeignete Verkleinerung der Umgebungen einrichten, dass

$$V = W \ , \ U \times 0_{\mathbb{R}^{n-m}} = g(X \cap V) \ , \ f(U) = X \cap V \ , \ f(\partial U) = \{h = 0\} \cap \{k = 0\} ,$$

dass f eine Immersion ist, sowie, dass

$$f = g^{-1}|U \times 0_{\mathbb{R}^{n-m}} \ , \ k = g_1 \ , \ h_j = g_{j+m} \ , \ j = 1, \cdots, n-m .$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii). Man kann annehmen, dass $U \subset]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$ offen ist und $f^{-1}(x) = y$. Sei eine stetig differenzierbare Funktion $\tilde{f} : U_y \to \mathbb{R}^n$ gegeben mit $f|U \cap U_y = \tilde{f}|U \cap U_y$. Da nach Voraussetzung $\operatorname{rk} Df(y) = m$ ist, gibt es mindestens $n - m$ Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$, die nicht in $Df(y)(\mathbb{R}^m)$ liegen. Durch Vertauschung der Komponenten kann man also annehmen, dass $Df(y)(\mathbb{R}^m) \cap (0 \times \mathbb{R}^{n-m}) = 0$ ist. Die Projektion

$$p_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times 0_{\mathbb{R}^{n-m}} : (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$$

hat $\ker p_m = 0_{\mathbb{R}^m} \times \mathbb{R}^{n-m}$, also ist ihre Einschränkung auf $Df(y)(\mathbb{R}^m)$ injektiv. Damit ist auch $p_m \circ Df(y)$ injektiv und es folgt $\operatorname{rk} p_m \circ Df(y) = m$.
Man betrachte die Abbildung

$$F : U_y \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n \ , \ F(u,v) = \tilde{f}(u) + (0,v) \ .$$

Wenn $p_{n-m} = 1 - p_m$ die orthogonale Projektion auf $0_{\mathbb{R}^m} \times \mathbb{R}^{n-m}$ bezeichnet, gilt

$$DF(y,0) = \begin{pmatrix} p_m \circ Df(y) & 0 \\ p_{n-m} \circ Df(y) & 1 \end{pmatrix} .$$

Damit ist $DF(y,0)$ invertierbar und der Satz über die Umkehrfunktion zeigt, dass es eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $(y,0)$ in $U_y \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass F einen Diffeomorphismus von $\tilde{U}$ auf die offene Menge $V = F(\tilde{U})$ induziert. Durch Verkleinerung von $\tilde{U}$ kann man annehmen, dass

$$\tilde{U} \cap \big(]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}^{n-m}\big) \subset U \cap U_y \quad \text{und} \quad F(\tilde{U}) = V \subset \tilde{f}(U_y) \ .$$

Definiere $g = F^{-1} : V \to \tilde{U}$. Dann ist g ein Diffeomorphismus. Für $v \in X \cap V$ gibt es $u \in U$ mit $f(u) = v$, also $F(u,0) = \tilde{f}(u) = v$. Es folgt

$$g(v) = (u,0) \in g(V) \cap \big(]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times 0_{\mathbb{R}^{n-m}}\big) \ .$$

Ist umgekehrt $(u,0) \in g(V) \cap \big(]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times 0_{\mathbb{R}^{n-m}}\big)$, so folgt $u \in U \cap U_y$ es gibt $v \in V$ mit $g(v) = (u,0)$. Daher ist $X \ni f(u) = F(u,0) = v$. Dies zeigt die Behauptung (ii).
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Man nehme $W = V$, $k = g_1$ und $h_j = g_{j+m}$, $j = 1, \ldots, n-m$. Dann ist es klar, dass $X \cap W = \{h = 0\} \cap \{k \leqslant 0\}$. Da die Gradienten $\operatorname{grad} k(x)$ und $\operatorname{grad} h_j(x)$ Spalten der invertierbaren Matrix $Dg(x)^t$ sind, sind sie linear unabhängig. Dies zeigt die Behauptung (iii).
(iii) $\Rightarrow$ (i). Der Fall $k(x) < 0$ ist ähnlich, aber einfacher, als der Fall $k(x) = 0$, so dass wir nur den letzteren Fall betrachten. Aus der Voraussetzung folgt, dass es mindestens $m-1$ Elemente der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ gibt, die nicht im Aufspann der Vektoren $\operatorname{grad} k(x)$ und $\operatorname{grad} h_j(x)$, $j = 1, \cdots, n-m$, liegen. Durch Vertauschung der Komponenten kann man annehmen, dass dies die Vektoren $e_2, \cdots, e_m$ sind.
Definiere

$$G : W \to \mathbb{R}^n \ , \ G(v) = \big(k(v), v_2, \ldots, v_m, h(v)\big) \ .$$

Dann gilt $DG(x)^t = \big(\operatorname{grad} k(x), e_2, \ldots, e_m, \operatorname{grad} h_1(x), \ldots, \operatorname{grad} h_{n-m}(x)\big)$. Folglich ist $DG(x)$ invertierbar und nach dem Satz über die Umkehrfunktion kann man durch Verkleinerung von W annehmen, dass $G : W \to G(W)$ ein Diffeomorphismus ist. Nun definiere

$$\tilde{f}(u) = G^{-1}(u,0) \quad \text{für alle } \ u \in U_0 = G(W) \cap (\mathbb{R}^m \times 0_{\mathbb{R}^{n-m}}) \ .$$

Dann ist $U = U_0 \cap \big(]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1} \times 0_{\mathbb{R}^{n-m}}\big)$ eine offene Menge mit Rand in $\mathbb{R}^m$ und $f = \tilde{f}|U$ ist eine injektive $\mathcal{C}^q$-Immersion mit Bild $f(U) = \{h = 0\} \cap \{k \leqslant 0\} = X \cap W$. Dies zeigt Behauptung (i). □

Definition 2.2.2. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ derart, dass für ein $q \geqslant 1$ und jedes $x \in X$ die äquivalenten Bedingungen von Theorem 2.2.1 erfüllt sind, so heißt X eine *Untermannigfaltigkeit mit Rand* der Klasse $\mathcal{C}^q$ *Dimension m* oder auch der *Codimension* $n - m$. Aus den Definitionen ist klar, dass X

dann lokal abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ ist, also insbesondere ein lokal kompakter, separabler metrischer Raum.

Eine injektive Immersion f wie im Theorem heißt *reguläre Parametrisierung* an x. Ebenso heißt eine Abbildung $g : X \cap V \to \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times 0_{\mathbb{R}^{n-m}}$ eine *lokale Karte* oder ein *System von lokalen Koordinaten*. Man schreibt auch $y_j = g_j(y)$, $j = 1, \cdots, m$ für die 'lokalen Koordinaten' auf $X \cap V$.

Im folgenden sei $X \subset \mathbb{R}^n$ stets eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Klasse $\mathcal{C}^q$, $q \geqslant 1$, und der Dimension m.

Korollar 2.2.3. Seien (g_α, V_α) und (g_β, V_β) lokale Karten an $x \in X$. Dann ist der 'Kartenwechsel'

$$g_{\alpha\beta} : g_\beta(V_{\alpha\beta}) \to g_\alpha(V_{\alpha\beta}) \, , \, g_{\alpha\beta} = g_\alpha \circ g_\beta^{-1}$$

wobei $V_{\alpha\beta} = V_\alpha \cap V_\beta$, ein $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismus von offenen Mengen mit Rand. Insbesondere ist die Dimension von X wohldefiniert und es gilt $g_\alpha^{-1}(\partial g_\alpha(V_{\alpha\beta})) = g_\beta^{-1}(\partial g_\beta(V_{\alpha\beta}))$.

Beweis. Dies folgt sofort aus $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = \mathrm{id}$, $g_{\beta\alpha} \circ g_{\alpha\beta} = \mathrm{id}$ in Verbindung mit Satz 2.1.5. □

Definition 2.2.4. Falls $x \in X$ derart ist, dass $g_1(x) = 0$ ist für ein System $g_1, \ldots, g_m$ von lokalen Koordinaten, bzw. $f(u) = x$ für eine reguläre Parametrisierung $f : U \to X$ an x mit $u \in \partial U$, so heißt x ein *Randpunkt* von X, andernfalls *innerer Punkt*. Mit Korollar 2.2.3 folgt, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der lokalen Koordinaten oder der lokalen Parametrisierung ist. Sei ∂X die Menge der Randpunkt von X, X° die Menge der inneren Punkte. Falls $\partial X = \varnothing$ ist, sagt man, X sei ohne Rand oder einfach, X sei eine *Untermannigfaltigkeit*.

Aus Theorem 2.2.1 folgt, dass ∂X in X abgeschlossen ist und X° in X offen ist.[3] Weiterhin folgt, dass ∂X eine Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension $m-1$ ist und X° eine Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension m.

Sei $U \subset X$ offen. Eine Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^m$ heißt $\mathcal{C}^q$*-Abbildung*, falls es für jedes $x \in U$ eine reguläre Parametrisierung f an x gibt, so dass $F \circ f$ eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung ist. Nach Korollar 2.2.3 ist diese Definition unabhängig von der Wahl regulärer Parametrisierungen.

Korollar 2.2.5. Seien (f_α, U_α) und (f_β, U_β) lokale Parametrisierungen an $f_\alpha(u_\alpha) = f_\beta(u_\beta) = x$, (g, V) eine lokale Karte an x und h, k Funktionen auf W wie in Theorem 2.2.1. Dann gilt

$$Df_\alpha(u_\alpha)(\mathbb{R}^m) = Df_\beta(u_\beta)(\mathbb{R}^m) = Dg(x)^{-1}(\mathbb{R}^m) = \ker Dh(x)$$

und dies ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension m.

Beweis. Aus Korollar 2.2.3 folgt ($f_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1} \circ f_\beta$)

$$Df_\beta(u_\beta) = Df_\alpha(u_\alpha) \circ Df_{\alpha\beta}(u_\beta) \, ,$$

also sind die Bilder von $Df_\gamma(u_\gamma)$, $\gamma = \alpha, \beta$, gleich und der Dimension m. Da $h \circ f_\alpha = 0$, ist $Df_\alpha(u_\alpha)(\mathbb{R}^m) \subset \ker Dh(x)$, aber da $\mathrm{rk}\, Dh(x) = n - m$ ist, folgt Gleichheit. Da $f = g^{-1}$ eine Karte ist und $Dg(x)^{-1} = Df(g(x))$, folgt $Dg(x)^{-1}(\mathbb{R}^m) = Df_\alpha(u_\alpha)(\mathbb{R}^m)$. □

Definition 2.2.6. Seien $x \in X$ und f eine reguläre Parametrisierung an x, $f(u) = x$. Dann heißt der Vektorraum $T_x(X) = Df(u)(\mathbb{R}^m)$ von $\mathbb{R}^n$ *Tangentialraum an x*. Nach Korollar 2.2.5 ist diese Definition unabhängig von der Wahl regulärer Parametrisierungen.

[3] Achtung, ∂X muss nicht in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen sei, ebenso wenig wie X° in $\mathbb{R}^n$ offen sein muss!

Beispiel 2.2.7. Seien $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und

$$\mathbb{B}_r^n(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 \leqslant r\} .$$

Betrachte $k(x) = \|x - x_0\|_2^2 - r^2 = (x_1 - x_{01})^2 + \cdots + (x_n - x_{0n})^2 - r^2$. Dann ist k eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und es gilt $\mathbb{B}_r^n(x_0) = \{k \leqslant 0\}$. Falls $k(x) = 0$, d.h. $\|x - x_0\|_2 = r > 0$, gilt

$$\operatorname{grad} k(x) = 2(x - x_0) \neq 0 ,$$

d.h. $\operatorname{grad} k(x)$ ist linear unabhängig. Folglich ist $\mathbb{B}_r^n(x_0)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Dimension n mit Rand

$$\partial\mathbb{B}_r^n(x_0) = \mathbb{S}_r^{n-1}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\|_2 = r\} .$$

Der Tangentialraum $T_x(\mathbb{B}_r^n(x_0))$ ist ein n-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^n$, also gleich $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 2.2.8. Die klassischen Matrixgruppen wie $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{SO}(n)$ sind alle Untermannigfaltigkeiten ohne Rand. Betrachte dazu eine Matrix $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und definiere

$$G(B) = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid B^{-1}gB = (g^t)^{-1}\} \quad \text{und} \quad SG(B) = \{g \in G(B) \mid \det g = 1\} .$$

Man sieht leicht ein, dass dies Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sind. Für $B = 1$ erhält man etwa $G(B) = \mathrm{O}(n)$ und $SG(B) = \mathrm{SO}(n)$. Für $n = 2m$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erhält man die so genannte symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(2m, \mathbb{R}) = SG(B)$.

Zunächst beachte man, dass $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{\det \neq 0\}$ offen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist, insbesondere eine Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension n^2 mit Tangentialraum $T_g(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) = \mathbb{R}^{n\times n}$ für alle $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Definiere

$$\mathfrak{g}(B) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid B^{-1}AB = -A^t\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{sg}(B) = \{A \in \mathfrak{g}(B) \mid \operatorname{tr} A = 0\}$$

Dies sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{n\times n}$ und können daher auch mit gewissen $\mathbb{R}^m$ identifiziert werden. Für $B = 1$ erhält man etwa

$$\mathfrak{g}(B) = \mathfrak{sg}(B) = \mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = -A\} .$$

Dies ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Für $g \in G(B)$ bzw. $g \in SG(B)$ und $A \in \mathfrak{g}(B)$ bzw. $A \in \mathfrak{sg}(B)$ setzt man

$$\phi_g(A) = g \cdot \exp(A) = g \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} .$$

Die Abbildung ϕ_g ist $\mathcal{C}^1$ und es gilt $\phi_1(A)\phi_1(-A) = \exp(A)\exp(-A) = \exp(0) = 1$, also ist $\phi_g(A) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Es gilt

$$B^{-1}\phi_1(A)B = B^{-1} \cdot \exp A \cdot B = \exp(B^{-1}AB) = \exp(-A^t) = (\phi_1(A)^t)^{-1} ,$$

folglich $\phi_g(A) = g \cdot \phi_1(A) \in G(B)$. Falls $A \in \mathfrak{sg}(B)$, gilt

$$\det \phi_1(A) = \det \exp(A) = e^{\operatorname{tr} A} = e^0 = 1 ,$$

also $\phi_g(A) = g \cdot \phi_1(A) \in SB(B)$. Damit sind

$$\phi_g : \mathfrak{g}(B) \to G(B) \quad \text{und} \quad \phi_g : \mathfrak{sg}(B) \to SG(B)$$

wohldefiniert. Es gilt $\phi_g(0) = g$ und $D\phi_g(0) = g \cdot D\exp(0) = g$. Die Matrix ist invertierbar, also hat die Multiplikation mit g als lineare Abbildung von $\mathfrak{g}(B)$ bzw. $\mathfrak{sg}(B)$ nach $\mathbb{R}^{n\times n}$ den Rang $\dim \mathfrak{g}(B)$ bzw. $\dim \mathfrak{sg}(B)$. Mit Theorem 2.2.1 folgt, dass $G(B)$ und $SG(B)$ Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^{n\times n}$ sind. Die Tangentialräume an g sind

$$T_g(G(B)) = D\phi_g(\mathfrak{g}(B)) = g \cdot \mathfrak{g}(B) \quad \text{bzw.} \quad T_g(SG(B)) = g \cdot \mathfrak{sg}(B) .$$

Theorem 2.2.9.

(i). Sei $x \in X$. Dann gilt

$$T_x(X) = \left\{ \dot\gamma(0) \;\middle|\; 0 \in I \subset \mathbb{R} \text{ Intervall} ,\ \gamma : I \to \mathbb{R}^n\ \mathcal{C}^q \text{ mit } \gamma(I) \subset X ,\ \gamma(0) = x \right\}$$

und an Stelle von $\mathcal{C}^q$ kann man auch $\mathcal{C}^1$ schreiben.

(ii). Sei nun $x \in \partial X$. Dann gilt es genau ein $n_x \in T_x(X)$, $\|n_x\| = 1$, so dass $n_x \perp T_x(\partial X)$ und

$$T_x(X) \cap H_{n_x,0} = \left\{ \dot\gamma(0) \;\middle|\; 0 \in I \subset [0,\infty[\text{ Intervall} ,\ \gamma : I \to \mathbb{R}^n\ \mathcal{C}^q \text{ mit } \gamma(I) \subset X ,\ \gamma(0) = x \right\} .$$

(iii). Seien $x \in \partial X$ und $f : U \to X$ eine reguläre Parametrisierung an $f(u) = x$, wobei $U \subset]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$ offen sei. Dann ist $n_x \in T_x(X)$ eindeutig bestimmt durch die Bedingungen

$$\|n_x\| = 1 ,\ n_x \perp T_x(\partial X) \quad \text{und} \quad (\partial_1 f(u) : n_x) > 0 .$$

Mit den Notationen von Theorem 2.2.1 ist

$$n_x = \frac{p_x \operatorname{grad} k(x)}{\|p_x \operatorname{grad} k(x)\|} , \quad \text{wobei} \quad p_x : \mathbb{R}^n \to T_x(X) \text{ die orthogonale Projektion ist.}$$

Beweis von (i). Ist g eine Karte an x , so ist nach Verkleinerung von I die Abbildung $g \circ \gamma$ wohldefiniert und stetig differenzierbar. Es gilt

$$\dot\gamma(0) = Dg(x)^{-1} D(g \circ \gamma)(0) \in T_x(X) .$$

Ist umgekehrt $v \in T_x(X)$, so gilt $v = Df(u)w$ für ein $w \in \mathbb{R}^m$ und eine reguläre Parametrisierung $f : U \to \mathbb{R}^m$ von X an x mit $f(u) = x$. Die Menge $\left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; u + tw \in U \right\}$ enthält ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$. Dann ist $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = f(u + t \cdot w)$ stetig differenzierbar mit $\gamma(I) \subset X$, $\gamma(0) = x$ und $\dot\gamma(0) = Df(u)w = v$.

Beweis von (ii) und (iii). Sei $f : U \to X$ eine reguläre Parametrisierung an $x = f(u)$ mit U offen im Halbraum $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$. Dann ist $f|\partial U$ eine reguläre Parametrisierung von ∂X an x und folglich $T_x(\partial X) = Df(u)(0 \times \mathbb{R}^{m-1})$. Daher ist $\partial_1 f(u) = Df(u)e_1 \notin T_x(\partial X)$ und es gibt genau einen Vektor $n_x \in T_x(X)$, der den Bedingungen $\|n_x\| = 1$, $n_x \perp T_x(\partial X)$ und $(\partial_1 f(u) : n_x) > 0$ genügt.

Für jeden Tangentialvektor $v = Df(u)w$ gilt

$$(v : n_x) = (Df(u)w : n_x) = w_1 \cdot (\partial_1 f(u) : n_x)\,,$$

also $w_1 \leqslant 0$ genau dann, wenn $(v : n_x) \leqslant 0$. Wenn also $v \in T_x(X)$ mit $(v : n_x) \leqslant 0$ ist, enthält die Menge

$$\left\{t \in \mathbb{R} \;\middle|\; u + t \cdot w \in]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}\right\}$$

ein Intervall $I \subset [0, \infty[$ mit $0 \in I$. Es definiert $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = f(u + t \cdot v)$, die gewünschte Kurve mit $\dot\gamma(0) = v$. Ist umgekehrt $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^q$ mit $I \subset [0, \infty[$, $\gamma(I) \subset X$ und $\gamma(0) = x$, so ist $\dot\gamma(0) \in T_x(X)$ nach (i). Es gilt $\alpha = \mathrm{pr}_1 \circ f^{-1} \circ \gamma : I \to]-\infty, 0]$ und $\alpha(0) = u_1 = 0$, da x ein Randpunkt ist. Notwendigerweise ist $\dot\alpha(0) \leqslant 0$. Für $v = D(f^{-1} \circ \gamma)(0)$ gilt

$$v_1 = \dot\alpha(0) \leqslant 0 \quad \text{und} \quad Df(u)v = \dot\gamma(0)\,,$$

also ist nach der obigen Überlegung $(\dot\gamma(0) : n_x) \leqslant 0$.

Zur Formel für n_x beachte man, dass nach Theorem 2.2.1 und Korollar 2.2.5 gilt

$$T_x(\partial X) = \ker D(h,k)(x) = \ker Dk(x) \cap \ker Dh(x) \quad \text{und} \quad T_x(X) = \ker Dh(x)\,.$$

Da $Dk(x)v = \sum_{j=1}^n \partial_j k(x) \cdot v_j = (\operatorname{grad} k(x) : v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$, folgt

$$T_x(\partial X) = \operatorname{grad} k(x)^\perp \cap T_x(X)\,.$$

Mithin ist $T_x(X) \cap (T_x(\partial X))^\perp = \mathbb{R} \cdot p_x \operatorname{grad} k(x)$. Es ist $-n_x \in T_x(X) \cap H_{n_x,0}$, also existiert $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ der Klasse $\mathcal{C}^1$ mit $\gamma(I) \subset X$, $\gamma(0) = x$ und $\dot\gamma(0) = -n_x$. Es folgt

$$-(p_x \operatorname{grad} k(x) : n_x) = -Dk(x)n_x = (k \circ \gamma)'(0) \leqslant 0\,,$$

da $k \circ \gamma \leqslant 0$. Damit ist $p_x \operatorname{grad} k(x) = c \cdot n_x$ für ein $c > 0$ und es folgt die Behauptung. □

Korollar 2.2.10. Ist X von der Klasse $\mathcal{C}^q$, $q \geqslant 1$, so ist die Abbildung $n : \partial X \to \mathbb{R}^n : x \mapsto n_x$ von der Klasse $\mathcal{C}^{q-1}$.

Beweis. Es gilt $n_x = \|p_x \operatorname{grad} k(x)\|^{-1} \cdot p_x \operatorname{grad} k(x)$ und folglich reicht es zu zeigen, dass p_x der Klasse $\mathcal{C}^q$ ist. Aber p_x ist die Projektion auf $Df(f^{-1}(x))(\mathbb{R}^m)$ und das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren zeigt, dass die Projektion auf $A(\mathbb{R}^m)$ unendlich oft differenzierbar von der linearen Abbildung A abhängt. □

Definition 2.2.11. Der für $x \in \partial X$ definierte Vektor $n_x \in T_x(X) \cap (T_x(\partial X))^\perp$ heißt *äußerer Normalenvektor (oder äußere Normale) an x*. Die Bedingung in (ii) garantiert, dass n_x unabhängig von der Wahl regulärer Parametrisierungen definiert ist und bedeutet, dass n_x 'nach außen zeigt', d.h. jede Kurve, die an x beginnt und an x die Tangente n_x hat, verlässt X in Zeit $t > 0$. Dies rechtfertigt die Bezeichnung.

Beispiel 2.2.12. Betrachte wieder die Kugel $\mathbb{B}^n_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$. Da $\mathbb{B}^n_r(x_0) = \{k \leqslant 0\}$ ist, wobei $k(x) = \|x - x_0\|_2^2 - r^2$ und $\operatorname{grad} k(x) = 2(x - x_0)$, ist die äußere Normale an $x \in \mathbb{S}^{n-1}_r(x_0)$

$$n_x = \frac{\operatorname{grad} k(x)}{\|\operatorname{grad} k(x)\|_2} = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|_2} .$$

Insbesondere ist der Tangentialraum am Rand die Hyperebene $T_x(\mathbb{S}^{n-1}_r(x_0)) = n_x^\perp = (x - x_0)^\perp$.

Definition 2.2.13. Sei $Y \subset \mathbb{R}^k$ eine weitere Untermanningfaltigkeit mit Rand, $\phi : X \to Y$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung und $x \in X$. Dann ist die lineare *Tangentialabbildung von* ϕ, $T_x(\phi) : T_x(X) \to T_{\phi(x)}(Y)$, definiert durch

$$T_x(\phi)Df(u)v = D(\phi \circ f)(u)v \quad \text{für alle } \ v \in \mathbb{R}^m ,$$

wobei f eine lokale Karte an $x = f(u)$ ist.

Die Abbildung $\phi : X \to Y$, $q \geqslant 1$, heißt *Immersion* bzw. *Submersion* falls $T_x(\phi)$ für alle $x \in X$ injektiv bzw. für alle $x \in X$ surjektiv ist. ϕ heißt *Diffeomorphismus*, falls ϕ bijektiv und ϕ^{-1} eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung sind.

Satz 2.2.14. Seien $\phi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ $\mathcal{C}^1$-Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten mit Rand und $x \in X$. Die Tangentialabbildung $T_x(\phi)$ ist wohldefiniert und unabhängig von der Wahl lokaler Karten. Es gilt

$$T_x(\psi \circ \phi) = T_{\phi(x)}(\psi) \circ T_x(\phi) \quad \text{und} \quad T_x(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{T_x(X)} .$$

Falls $v = \dot\gamma(0) \in T_x(X)$ ein Tangentialvektor ist, gilt $T_x(\phi)v = (\phi \circ \gamma)'(0)$.

Beweis. Zunächst gilt für eine lokale Karte f an $x = f(u)$ und $v = \dot\gamma(0)$

$$T_x(\phi)v = T_x(\phi)Df(u)(f^{-1} \circ \gamma)'(0) = D(\phi \circ f)(u)(f^{-1} \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \gamma)'(0) .$$

Insbesondere ist $T_x(\phi)v \in T_{\phi(x)}(Y)$ und $T_x(\phi)$ unabhängig von der Wahl von f definiert. Es folgt

$$T_x(\psi \circ \psi)v = (\psi \circ \phi \circ \gamma)'(0) = T_{\phi(x)}(\psi)(\phi \circ \gamma)'(0) = \left[T_{\phi(x)}(\psi) \circ T_x(\psi)\right]v .$$

Schließlich gilt $T_x(\mathrm{id}_X)v = (\mathrm{id}_X \circ \gamma)'(0) = \dot\gamma(0) = v$. Dies zeigt die Behauptung. □

Korollar 2.2.15. Sei $\phi : X \to Y$ eine bijektive $\mathcal{C}^q$-Abbildung, $q \geqslant 1$. Genau dann ist ϕ ein Diffeomorphismus, wenn $T_x(\phi) : T_x(X) \to T_{\phi(x)}(Y)$ für alle $x \in X$ eine Bijektion ist.

Beweis. Sei ϕ ein Diffeomorphismus. Dann gilt

$$T_x(\phi) \circ T_{\phi(x)}(\phi^{-1}) = T_{\phi(x)}(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{T_{\phi(x)}(Y)}$$

und ebenso $T_{\phi(x)}(\phi^{-1}) \circ T_x(\phi) = \mathrm{id}_{T_x(X)}$. Daher ist $T_x(\phi)$ bijektiv.

Sei umgekehrt $T_x(\phi)$ stets bijektiv. Es reicht zu zeigen, dass $\phi^{-1} \circ f_\alpha$ für jede lokale Karte $f_\alpha : U_\alpha \to Y$ von Y eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung ist. Sei $x \in \phi^{-1}(f_\alpha(U_\alpha))$ und $f_\beta : U_\beta \to X$ eine lokale Karte von X an x. Die Mengen

$$U_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1}(\phi(f(U_\beta))) \quad \text{und} \quad U_{\beta\alpha} = f_\beta^{-1}(\phi^{-1}(f_\alpha(U_\alpha)))$$

sind offen mit Rand. Die Abbildungen

$$\phi_{\alpha\beta} = f_\alpha^{-1} \circ \phi \circ f_\beta : U_{\beta\alpha} \to U_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \phi_{\beta\alpha}^{-1} = f_\beta^{-1} \circ \phi^{-1} \circ f_\alpha : U_{\alpha\beta} \to U_{\beta\alpha}$$

sind wohldefiniert und zueinander invers. $\phi_{\alpha\beta}$ ist $\mathcal{C}^q$ und

$$D\phi_{\alpha\beta}(u) = Df_\beta(\phi_{\alpha\beta}(u))^{-1} \circ T_{f_\beta(u)}(\phi) \circ Df_\alpha(u)$$

ist für alle $u \in U_{\beta\alpha}$ invertierbar. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist $\phi_{\beta\alpha}^{-1}$ $\mathcal{C}^q$. Damit ist $\phi^{-1} \circ f_\alpha = f_\beta \circ \phi_{\beta\alpha}^{-1}$ $\mathcal{C}^q$ in einer Umgebung von x . Dies zeigt die Behauptung. □

2.3 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Definition 2.3.1. Sei $x \in X$ und $f : U \to X$, $f(u) = x$, eine reguläre Parametrisierung an x . Definiere die *Gramsche Determinante* bezüglich f durch $g(u) = \det(Df(u)^t Df(u))$. Die Eigenwerte der Matrix $G(u) = Df(u)^t Df(u)$ sind $\geqslant 0$ und $\operatorname{rk} G(u) = m$, also ist $g(u) > 0$.

Lemma 2.3.2. Seien g_γ die Gramschen Determinanten bezüglich der regulären Parametrisierungen ϕ_γ , $\gamma = \alpha, \beta$. Mit $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$ gilt

$$g_\beta = (\det D\phi_{\alpha\beta})^2 \cdot g_\alpha$$

und g_α , g_β sind der Klasse $\mathcal{C}^{q-1}$, wenn X der Klasse $\mathcal{C}^q$ ist.

Beweis. Es gilt

$$D\phi_\beta(u) = D\phi_\alpha(\phi_{\alpha\beta}(u)) D\phi_{\alpha\beta}(u) ,$$

also

$$g_\beta(u) = \det D\phi_{\alpha\beta}(u)^t \cdot \det D\phi_\alpha(\phi_{\alpha\beta}(u))^t D\phi_\alpha(\phi_{\alpha\beta}(u)) \cdot \det D\phi_{\alpha\beta}(u) = (\det D\phi_{\alpha\beta}(u))^2 \cdot g_\alpha(u) .$$

Die Differenzierbarkeit folgt aus der Definition. □

Theorem 2.3.3. Es gibt auf X genau ein Elementarintegral λ_X , so dass für jede lokale Parametrisierung $\phi : U \to X$ und jedes $\varphi \in \mathcal{C}_c(X)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset f(U)$ gilt

$$\int \varphi \, d\lambda_X = \int_U \varphi(\phi(u)) \sqrt{g(u)} \, d\lambda^m(u) ,$$

wobei g die Gramsche Determinante bzgl. ϕ sei. Dieses Elementarintegral heißt *Riemannsches Maß auf X*.[4]

Um dieses Theorem zu beweisen, benötigen wir einige Vorarbeiten.

[4]Obwohl diese Bezeichnung auf denselben Bernhard Riemann verweist, der auch das Riemannintegral auf $\mathbb{R}$ definiert hat, ist damit nicht gemeint, dass sich das Riemannsche Maß auf eine ähnliche Weise definieren ließe, wie das eindimensionale Riemannintegral. Vielmehr soll diese Begriffsbildung darauf hinweisen, dass λ_X von der Wahl einer 'Riemannschen Metrik', d.h. einem Skalarprodukt auf den Tangentialräumen $T_x(X)$, abhängt. Dieses Skalarprodukt ist bei Untermannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^n$ durch das Standardskalarprodukt festgelegt und in $x = \phi(u)$ durch die Matrix $G(u)$ gegeben. Der Zusammenhang zwischen λ_X und G ist dann, dass $g(u) = \det G(u)$ das Volumen eines Einheitswürfels in $T_x(X)$ bezüglich einer für das Skalarprodukt $G(u)$ orthonormalen Basis ist.

Lemma 2.3.4. Sei die Funktion $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\chi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & |x| < 1\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist χ unendlich oft differenzierbar und $\operatorname{supp}\chi = [-1,1]$. Es ist $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_k$, wobei $\chi_y(x) = \chi(x-y)$, $\mathcal{C}^\infty$ und überall > 0. Für die $\mathcal{C}^\infty$-Funktion $\psi(x) = f(x)^{-1} \cdot \chi$ gilt $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k = 1$.

Beweis. Dass χ unendlich oft differenzierbar ist, ist aus den Übungen der Analysis I bekannt. Es ist klar, dass $\chi(x) > 0$ ist für $x \in]-1,1[$, also folgt $\operatorname{supp}\chi = [-1,1]$. Da $\operatorname{supp}\chi_k \cap \operatorname{supp}\chi_\ell = \varnothing$ für $|k-\ell| > 2$, ist $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_k$ $\mathcal{C}^\infty$. Es ist $f > 0$, da $f \geqslant \chi_k > 0$ auf $]k-1, k+1[$. Es gilt $f_k = f$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, also

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k = f^{-1} \cdot \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_k = 1\,,$$

was zu zeigen war. □

Satz 2.3.5. Seien X eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Klasse $\mathcal{C}^q$, $K \subset X$ eine kompakte Teilmenge und $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es Funktionen $\varphi_\alpha \in \mathcal{C}^q_c(X)$, $0 \leqslant \varphi_\alpha \leqslant 1$, mit $\operatorname{supp}\varphi_\alpha \subset U_\alpha$, so dass folgende Bedingungen gelten:

1. Für alle $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U von x und eine endliche Teilmenge $A' \subset A$, so dass $\varphi_\alpha = 0$ auf U für alle $\alpha \notin A'$ und

2. Es gilt $\sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$ auf K.

Eine solche Familie (φ_α) heißt *der Überdeckung* (U_α) *untergeordnete* $\mathcal{C}^q$*-Teilung der Eins*.

Wir erinnern dazu an das folgende Lemma aus der Analysis II.

Lemma 2.3.6. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und (W_j) eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es ein $\lambda > 0$, so dass für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \cap K \neq \varnothing$ und $\operatorname{diam} A \leqslant \lambda$ gilt $A \subset W_j$ für ein j. Man sagt, λ sei eine *Lebesguezahl* der Überdeckung (W_j).

Beweis von Satz 2.3.5. Es gibt offene Mengen $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ mit $U_\alpha = X \cap V_\alpha$. Sei $\lambda > 0$ eine Lebesguezahl der Überdeckung (V_α) von K und $\varepsilon = \frac{\lambda}{2\sqrt{n}}$. Definiere

$$\phi_k(x) = \prod_{j=1}^n \psi\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - k_j\right) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}^n\,,\ x \in \mathbb{R}^n\,,$$

wobei ψ die Buckelfunktion aus Lemma 2.3.4 ist. Dann gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \phi_k = 1 \quad \text{und} \quad \operatorname{supp}\phi_k = k + [-\varepsilon,\varepsilon]^m\,,$$

also $\operatorname{diam}\operatorname{supp}\psi_k = \lambda$. Sei $I = \left\{k \in \mathbb{Z}^n \;\middle|\; \operatorname{supp}\psi_k \cap K \neq \varnothing\right\}$. Da K beschränkt ist, ist I endlich. Zu $k \in I$ gibt es α_k mit $\operatorname{supp}\psi_k \subset U_{\alpha_k}$. Definiere

$$\varphi_\alpha = \sum_{k\in I\,,\,\alpha_k=\alpha} \phi_k\,.$$

Dann gilt für $x \in \operatorname{supp} \phi_k$, dass $\varphi_\alpha(x) > 0$ nur für $\alpha = \alpha_k$. Weiter ist

$$\sum_\alpha \varphi_\alpha = \sum_{k \in I} \phi_k = 1 \quad \text{auf} \quad K\,.$$

Das ist die Behauptung, da die φ_α auf $\mathbb{R}^n$ der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ sind. □

Beweis von Theorem 2.3.3. Sei (V_α) eine offene Überdeckung von X mit regulären Parametrisierungen $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$. Für $\varphi \in \mathcal{C}_c(X)$ gibt es eine Teilung der Eins (φ_α), die der Überdeckung (V_α) von $\operatorname{supp} \varphi$ untergeordnet ist. Definiere

$$\lambda_X(\varphi) = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} (\varphi_\alpha \cdot \varphi) \circ \phi_\alpha \cdot \sqrt{g_\alpha}\, d\lambda^m\,,$$

wobei g_α die Gramsche Determinante bzgl. ϕ_α sei. Wenn $\varphi \geqslant 0$ ist, ist sicherlich $\lambda_X(\varphi) \geqslant 0$.

Sind eine weitere offene Überdeckung (V_β), weitere reguäre Parametrisierungen $\phi_\beta : U_\beta \to V_\beta$ und eine (V_β) untergeordnete Teilung der Eins gegeben, so stellt man zunächst fest, dass für $\psi \in \mathcal{C}_c(X)$ mit $\operatorname{supp} \psi \subset V_{\alpha\beta} = V_\alpha \cap V_\beta$ gilt wegen Theorem 1.8.2 und Lemma 2.3.2

$$\int_{U_\alpha} \psi \circ \phi_\alpha \cdot \sqrt{g_\alpha}\, d\lambda^m = \int_{U_\beta} \psi \circ \phi_\alpha \circ \phi_{\alpha\beta} \cdot |\det D\phi_{\alpha\beta}| \cdot \sqrt{g_\alpha \circ \phi_{\alpha\beta}}\, d\lambda^m = \int_{U_\beta} \psi \circ \phi_\beta \cdot \sqrt{g_\beta}\, d\lambda^m\,,$$

wobei $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$. Definiere $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \cdot \varphi_\beta$. Dann gilt auf $V_\alpha \cap \operatorname{supp} \varphi$

$$\sum_\beta \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \cdot \sum_\beta \varphi_\beta = \varphi_\alpha\,,$$

also ist $\varphi_{\alpha\beta}$ eine $(V_{\alpha\beta})$ untergeordnete Teilung der Eins. Es folgt $\operatorname{supp}(\varphi_{\alpha\beta} \cdot \varphi) \subset V_{\alpha\beta}$ und

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \int_{U_\alpha} (\varphi_\alpha \cdot \varphi) \circ \phi_\alpha \cdot \sqrt{g_\alpha}\, d\lambda^m &= \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\alpha} (\varphi_{\alpha\beta} \cdot \varphi) \circ \phi_\alpha \cdot \sqrt{g_\alpha}\, d\lambda^m \\ &= \sum_{\alpha,\beta} \int_{U_\beta} (\varphi_{\alpha\beta} \cdot \varphi) \circ \phi_\beta \cdot \sqrt{g_\beta}\, d\lambda^m = \sum_\beta \int_{U_\beta} (\varphi_\beta \cdot \varphi) \circ \phi_\beta \cdot \sqrt{g_\beta}\, d\lambda^m\end{aligned}$$

Damit ist die Definition von λ_X unabhängig von der Überdeckung, den Parametrisierungen und der Teilung der Eins.

Ist insbesondere $\operatorname{supp} \varphi \subset V$ mit einer regulären Parametrisierung $\phi : U \to V$, so ist eine V untergeordnete Teilung der Eins gerade eine Funktion $\psi \in \mathcal{C}_c^q(X)$ mit

$$\psi = 1 \quad \text{auf} \quad \operatorname{supp} \varphi \quad \text{und} \quad \operatorname{supp} \psi \subset V\,.$$

Es gilt

$$\lambda_X(\varphi) = \int_U (\psi \cdot \varphi) \circ \phi \cdot \sqrt{g}\, d\lambda^m = \int_U \varphi \circ \phi \cdot \sqrt{g}\, d\lambda^m\,,$$

wie gefordert. Dass λ_X linear ist, folgt nun auch leicht durch Betrachtung von Teilungen der Eins auf $\operatorname{supp} \varphi_1 \cup \operatorname{supp} \varphi_2$ für zwei Funktionen $\varphi_j \in \mathcal{C}_c(X)$, $j = 1, 2$.

Sei schließlich μ ein Elementarintegral auf X, das der Bedingung des Theorems genügt. Seien $\varphi \in \mathcal{C}_c(X)$ beliebig und V_α, $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ und φ_α wie zu Anfang. Dann gilt $\operatorname{supp}(\varphi_\alpha \cdot \varphi) \subset V_\alpha$,

also

$$\mu(\varphi) = \sum_\alpha \mu(\varphi_\alpha \cdot \varphi) = \sum_\alpha \int_{U_\alpha} (\varphi_\alpha \cdot \varphi) \circ \phi_\alpha \cdot \sqrt{g_\alpha}\, d\lambda^m = \lambda_X(\varphi) .$$

Das ist die Behauptung. □

Definition 2.3.7. Sind X eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand und $A \subset X$, so definiert man $\mathrm{vol}_m(A) = \lambda_X(A)$, das *m-dimensionale Volumen* von A. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der m-dimensionalen Untermannigfaltigkeit mit Rand X, in der A enthalten ist, aber dies zu zeigen ist leider jenseits der Methoden dieser Vorlesung. (Man kann zeigen, dass λ_X mit dem so genannten m-dimensionalen Hausdorffmaß von $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt und dieses hängt nur von der Metrik auf $\mathbb{R}^n$ ab.)

Beispiel 2.3.8. Die Einschränkung der Polarkoordinaten

$$\sigma_2 :]-\pi, \pi[\times]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2 : (s,t) \mapsto (\cos s \cos t, \sin s \cos t, \sin t)$$

ist eine reguläre Parametrisierung von $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2_1(0)$, deren Bild $\mathbb{S}^2 \setminus (0 \times \mathbb{S}^1)$ enthält. Da $\mathbb{S}^1$ ein 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist, ist das Komplement des Bildes von ϕ eine $\lambda_{\mathbb{S}^2}$-Nullmenge. Die Gramsche Determinante für σ_2 ist $g(s,t) = \cos^2 t$, also folgt

$$\mathrm{vol}_2(\mathbb{S}^2) = \lambda_{\mathbb{S}^2}(\mathbb{S}^2) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \, dt\, ds = 2\pi \cdot 2 \cdot \sin \tfrac{\pi}{2} = 4\pi .$$

Im Prinzip kann auch das $(n-1)$-dimensionale Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Einheitssphäre direkt berechnet werden. Wir werden jedoch gleich sehen, wie wir aus dem Wissen über das n-dimensionale Volumen der Einheitskugel hierauf schließen können.

Satz 2.3.9. Seien X, Y Untermannigfaltigkeiten, wobei höchstens eine mit Rand ist. Dann gilt für das Riemannsche Maß auf der Untermannigfaltigkeit mit Rand $X \times Y$, dass $\lambda_{X\times Y} = \lambda_X \otimes \lambda_Y$.

Beweis. Seien $\phi_X : U_X \to V_X \subset X$, $\phi_Y : U_Y \to V_Y \subset Y$ lokale reguläre Parametrisierungen von X bzw. Y. Dann ist $\phi = \phi_X \times \phi_Y : U = U_X \times U_Y \to V = V_X \times V_Y \subset X \times Y$ eine lokale reguläre Parametrisierung von $X \times Y$ mit

$$D\phi(u,v) = \begin{pmatrix} D\phi_X(u) & 0 \\ 0 & D\phi_Y(v) \end{pmatrix} ,$$

also der Gramschen Determinante

$$g(u,v) = \det D\phi(u,v)^t D\phi(u,v) = \begin{vmatrix} D\phi_X(u)^t D\phi_X(u) & 0 \\ 0 & D\phi_Y(v)^t D\phi_Y(v) \end{vmatrix} = g_X(u) \cdot g_Y(v) .$$

Für $\varphi \in \mathcal{C}_c(V)$ mit $\varphi(x,y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y)$ folgt

$$\begin{aligned} \int \varphi \, d\lambda_{X\times Y} &= \int_{U_X} \varphi_X(\phi_X(u)) \sqrt{g_X(u)}\, d\lambda^{n_X}(u) \cdot \int_{U_Y} \varphi_Y(\phi_Y(v)) \sqrt{g_Y(v)}\, d\lambda^{n_Y}(v) \\ &= \int \varphi \, d(\lambda_X \otimes \lambda_Y) . \end{aligned}$$

Aus dem Beweis von Lemma 1.7.5 folgt, dass die Gleichheit für alle $\varphi \in \mathcal{C}_c(V)$ gilt; aus Theorem 2.3.3 folgt die Behauptung. □

Satz 2.3.10. Sei $\phi : Y \to X$ ein Diffeomorphismus von Untermannigfaltigkeiten mit Rand der Klasse $\mathcal{C}^1$. Dann gilt

$$\int \varphi \, d\lambda_X = \int \varphi \circ \phi \cdot \sqrt{\det\big((T\phi)^t T\phi\big)} \, d\lambda_Y \,,$$

wobei $T\phi(y) = T_y(\phi) : T_y(Y) \to T_x(X)$.

Beweis. Es reicht nach Theorem 2.3.3, die Gleichung für $\operatorname{supp}\varphi$ im Bild einer regulären Parametrisierung zu zeigen. Sei f eine lokale reguläre Parametrisierungen von X. Dann ist $\tilde{f} = \phi^{-1} \circ f$ eine lokale reguläre Parametrisierung von Y. Für die Gramschen Determinanten g für f und $\tilde{g}$ für $\tilde{f}$ folgt

$$\begin{aligned} \tilde{g}(u) &= \det D\tilde{f}(u)^t D\tilde{f}(u) \\ &= \det\big(T_{\tilde{f}(u)}(\phi)^{-1,t} Df(u)^t Df(u) T_{\tilde{f}(u)}(\phi)^{-1}\big) = \det\big((T\phi)^t T\phi\big)(\tilde{f}(u))^{-1} \cdot g(u) \,. \end{aligned}$$

Somit für $\operatorname{supp}\varphi \subset f(U)$

$$\begin{aligned} \int \varphi \, d\lambda_X &= \int_U \varphi(f(u)) g(u) \, d\lambda^m(u) = \int_U (\varphi \circ \phi)(\tilde{f}(u)) \sqrt{\det\big((T\phi)^t T\phi\big)(\tilde{f}(u))} \cdot \sqrt{\tilde{g}(u)} \, d\lambda^m(u) \\ &= \int (\varphi \circ \phi) \cdot \sqrt{\det\big((T\phi)^t T\phi\big)} \, d\lambda_Y \,, \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Beispiel 2.3.11. Die Abbildung

$$\phi :]0, \infty[\times \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n : (r, x) \mapsto r \cdot x$$

ist beliebig oft differenzierbar und bijektiv. Um die lineare Abbildung $T_{(r,x)}(\phi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zu diskutieren, betrachten wir eingeschränkte Polarkoordinaten

$$\sigma_n :]-\pi, \pi[\times]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{S}^{n-1} : (t_2, \dots, t_n) \mapsto (\cos t_n \cdots \cos t_2, \cos t_n \cdots \cos t_3 \sin t_2, \dots, \sin t_n) \,.$$

Dann ist klar, dass $\phi \circ (\mathrm{id} \times \sigma_n) = \varphi_n$ die übliche Polarkoordinaten-Abbildung ist. Es folgt

$$\det(T_{(r,x)}(\phi)^t T_{(r,x)}(\phi)) = \frac{\det D\varphi_n(r,x)^2}{\det D\sigma_n(x)^2} = r^{2n-2} \,.$$

Da 0 eine λ^n-Nullmenge ist, folgt für jede λ^n-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\lambda^n(x) = \int_0^\infty \int f(r \cdot x) \, d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}}(x) \, r^{n-1} \, dr \,.$$

Es folgt

$$\mathrm{vol}_n(\mathbb{B}^n_R) = \int_0^R \mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \, r^{n-1} \, dr = \mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cdot \frac{R^n}{n}$$

und insbesondere

$$\mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}_R) = R^{n-1} \cdot \mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \quad \text{sowie} \quad \mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = n \cdot \mathrm{vol}_n(\mathbb{B}^n) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \,.$$

Um die Gramschen Determinanten zu berechnen, ist der folgende Satz manchmal nützlich.

Satz 2.3.12. Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times k}$ Matrizen mit den Zeilen $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$\det(A^t B) = \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} \det(a^t_{i_1}, \dots, a^t_{i_k}) \det(b^t_{i_1}, \dots, b^t_{i_k}) .$$

Insbesondere gilt für die Gramsche Determinante $g(u) = \det(D\phi(u)^t D\phi(u))$, dass

$$g(u) = \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_m\leqslant n} \det\bigl(\operatorname{grad} \phi_{i_1}(u), \dots, \operatorname{grad} \phi_{i_m}(u)\bigr)$$

Beweis. Beide Seiten der Gleichung sind multilinear in den Zeilen $b_1, \dots, b_n$. Man kann daher annehmen, dass die Spalten von B Vektoren der Standardbasis von $\mathbb{R}^n$ oder gleich 0 sind. Da $A^t e_j = a^t_j$, ist die Formel richtig, falls die Spalten von B gerade $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$, $1 \leqslant j_1, \dots, j_k \leqslant n$ und 0 sind, denn in diesem Fall gibt es höchstens eine nicht verschwindende Unterdeterminante von B . Der allgemeine Fall folgt nun also durch die Multilinearität. □

Beispiel 2.3.13. Sei X eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) der Klasse $\mathcal{C}^q$ und $x \in X$. Sei V eine offene Umgebung von x und h auf V wie in Theorem 2.2.1 (iii). Nach Vertauschung von Komponenten und Verkleinerung von V kann man annehmen, dass $\partial_n h(y) \neq 0$ für alle $y \in V$.

Nach dem Satz über die implizite Funktion aus Analysis II folgt, dass es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ein $\varepsilon > 0$ und eine $\mathcal{C}^q$-Funktion

$$f : U \to \mathbb{R} \quad \text{gibt, so dass} \quad h(u,t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = f(u) \quad \text{für alle } (u,t) \in \tilde{U} = U \times]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[.$$

D.h., $X \cap \tilde{U} = \bigl\{(u, f(u)) \bigm| u \in U\bigr\}$. Dann ist $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, $\phi(u) = (u, f(u))$, eine reguläre Parametrisierung von X an x . (Man sagt, dies sei eine Parametrisierung 'als Graph', weil X lokal als Graph einer Funktion dargestellt ist.) Es gilt nämlich

$$D\phi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \begin{pmatrix} 1_{n-1} \\ Df(x_1, \dots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Es folgt für die Gramsche Determinante bezüglich ϕ

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \det\bigl(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{n-1}, \operatorname{grad} f(x_1, \dots, x_{n-1})\bigr)^2 .$$

Man entwickelt die Summanden nach der letzten Spalte. Die sich ergebenden Determinanten haben untere Dreiecksform und mindestens eine Null auf der Diagonalen, wenn die aus

$$\det\bigl(e_1, \dots, e_{j-1}, e_{j+1}, \dots, e_{n-1}, \operatorname{grad} g(x_1, \dots, x_{n-1})\bigr)$$

gestrichene Zeile nicht die j-te Zeile ist. Es folgt

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \partial_j f(x_1, \dots, x_{n-1})^2 = 1 + \|\operatorname{grad} f(x_1, \dots, x_n)\|_2^2$$

und somit für alle $\varphi \in \mathcal{C}_c(X)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \tilde{U}$

$$\int \varphi \, d\lambda_X = \int_U \varphi(u, f(u)) \cdot \sqrt{1 + \|f(u)\|^2} \, d\lambda^{n-1}(u) \,.$$

2.4 Der Gaußsche Integralsatz

Definition 2.4.1. Ein *Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand* ist per Definition eine kompakte Untermannigfaltigkeit $K \subset X$ der Dimension n und der Klasse $\mathcal{C}^2$. Ein *$\mathcal{C}^1$-Vektorfeld v* auf einer Untermannigfaltigkeit X ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $v : X \to \mathbb{R}^n$, so dass $v(x) \in T_x(X)$ für alle $x \in X$. Aus den Definitionen ist klar, dass auf $X = K$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld v einfach eine Abbildung $K \to \mathbb{R}^n$ mit einer $\mathcal{C}^1$-Fortsetzung auf eine offene Umgebung von K ist.

Wir haben das folgende wichtige Theorem, das als *Gaußscher Integralsatz* bekannt ist.

Theorem 2.4.2. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand und $v : K \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld auf K. Dann gilt

$$\int_K \operatorname{div} v \, d\lambda^n = \int_{\partial K} (v(x)|n_x) \, d\lambda_{\partial K} \,.$$

Wir werden den Gaußschen Integralsatz später als Folgerung aus dem allgemeineren Stokesschen Integralsatz beweisen. Letzterer erfordert die Technik der Differentialformen. Wir diskutieren allerdings schon einige Anwendungen des Gaußschen Satzes.

Beispiel 2.4.3. Ein fester Körper K, modelliert durch ein Kompaktum in $\mathbb{R}^3$ mit $\mathcal{C}^2$-Rand, sei von einer Flüssigkeit konstanter Dichte $\varrho > 0$ umgeben, die den Raumbereich $\{x_3 \leqslant 0\}$ ausfülle. Auf die Oberfläche ∂K des Körpers wirkt im Punkt $x \in \partial K$ der Druck $\varrho x_3 \cdot n_x$ (der Druck ist nach innen gerichtet und proportional zur Tiefe). Die Auftriebskraft F entsteht durch Mittelung über die Oberfläche (d.h. Auftrieb entsteht durch Druckdifferenzen an verschiedenen Punkten der Oberfläche), d.h.

$$F = \int_{\partial K} \varrho x_3 \cdot n_x \, d\lambda_{\partial K}(x) \in \mathbb{R}^3 \,.$$

Für die Komponenten der Auftriebskraft folgt mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\begin{aligned} F_i &= \varrho \cdot \int (x_3 \cdot e_i : n_x) \, d\lambda_{\partial K}(x) = \varrho \cdot \int \operatorname{div}(x_3 \cdot e_i) \, d\lambda_K(x) \\ &= \varrho \cdot \int \frac{\partial x_3}{\partial x_i} \, d\lambda_K(x) = \begin{cases} \varrho \cdot \operatorname{vol}_3(K) & i = 3\,, \\ 0 & i \neq 3\,. \end{cases} \end{aligned}$$

D.h., Auftrieb entsteht nur in der Richtung x_3 und ist genau gleich dem Gewicht der durch den Körper verdrängten Flüssigkeit. (Physikalisch präzise ist ϱ nicht die Massendichte, sondern das Produkt der Massendichte mit der Gravitationsbeschleunigung.)

Beispiel 2.4.4. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand, so dass $0 \in A^\circ$ gilt. Bezeichne für $x \in \partial K$ mit $\alpha(x)$ den Winkel zwischen x und n_x. Dann gilt

$$\int \frac{\cos \alpha(x)}{\|x\|_2^{n-1}} \, d\lambda_{\partial A}(x) = \operatorname{vol}_{n-1}(\mathrm{S}^{n-1}) \,.$$

In der Tat: Es gilt

$$\cos\alpha(x) = \frac{(x : n_x)}{\|x\|_2} \quad \text{für alle } x \in \partial A\,.$$

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ mit $\mathbb{B}^n_\varepsilon \subset A^\circ$. Folglich ist $\partial A_\varepsilon = \partial A \cup \mathbb{S}^{n-1}_\varepsilon$, wobei $A_\varepsilon = \{x \in A \mid \|x\|_2 \geqslant \varepsilon\}$. Der äußere Normalenvektor an A_ε ist auf $\mathbb{S}^{n-1}_\varepsilon$ das Negative des äußeren Normalvektors an $\mathbb{B}^n_\varepsilon$. Sei $v(x) = \|x\|_2^{-n} \cdot x$. Es gilt

$$\frac{\partial_k v(x)}{\partial x_k} = \frac{\|x\|_2^2 - n x_k^2}{\|x\|_2^{n+2}}\,, \quad \text{also} \quad \operatorname{div} v(x) = 0\,.$$

Mit dem Satz von Gauß folgt

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\alpha(x)}{\|x\|_2^{n-1}}\, d\lambda_{\partial A}(x) &= \int (v(x) : n_x) d\lambda_{\partial A}(x) = \int (v(x) : n_x)\, d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}_\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int \frac{1}{\|x\|_2^n}\, d\lambda_{\mathbb{S}^{n-1}_\varepsilon} = \operatorname{vol}_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})\,,\end{aligned}$$

also die Behauptung.

Beispiel 2.4.5. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x \in U$, $v : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $K_j \subset U$ eine Folge von Kompakta mit $\mathcal{C}^2$-Rand, so dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $K_j \subset \mathbb{B}^n_\varepsilon(x)$ für alle $j \geqslant m$ gibt. Dann gilt

$$\operatorname{div} v(x) = \lim_j \frac{1}{\operatorname{vol}_n(K_j)} \cdot \int (v(x) : n_x)\, d\lambda_{\partial K_j}\,.$$

In der Tat: Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $r > 0$ mit

$$|\operatorname{div} v(x) - \operatorname{div} v(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{\operatorname{vol}_n(\mathbb{B}^n_\varepsilon)}$$

für alle $y \in U$, $\|x - y\| \leqslant r$. Es gibt $m \in \mathbb{N}$ mit $K_j \subset \mathbb{B}^n_r(x)$ für alle $j \geqslant m$. Aus dem Gaußschen Integralsatz folgt

$$\left|\operatorname{div} v(x) - \frac{1}{\operatorname{vol}_n(K_j)} \cdot \int (v(x) : n_x)\, d\lambda_{\partial K_j}\right| \leqslant \frac{1}{\operatorname{vol}_n(K_j)} \cdot \int_{K_j} |\operatorname{div}(x) - \operatorname{div}(y)|\, dy \leqslant \varepsilon\,.$$

Es folgt die Behauptung.

Ein bekanntes Korollar aus dem Gaußschen Integralsatz ist die folgende Greensche Formel.

Korollar 2.4.6. Seien $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand und $f, g : K \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$-Funktionen. Dann gilt

$$\int_K (f \cdot \Delta g - \Delta f \cdot g)\, d\lambda^n = \int_{\partial K} (f \cdot \partial_\nu g - \partial_\nu f \cdot g)\, d\lambda_{\partial K}$$

wobei $\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 f$ den (euklidischen) Laplaceoperator bezeichnet und $\partial_\nu f(x) = (\operatorname{grad} f(x) : n_x)$ die Ableitung in Normalenrichtung.

Beweis. Es gilt

$$\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad} g) = f \cdot \Delta g + (\operatorname{grad} f : \operatorname{grad} g)\,,$$

also folgt die Behauptung aus Theorem 2.4.2, angewandt auf $v = f \cdot \operatorname{grad} g - g \cdot \operatorname{grad} f$. □

Beispiel 2.4.7. Aus der Analysis III ist der Begriff der Greenschen Funktion für eindimensionale Randwertprobleme bekannt. Sind allgemein L ein linearer Differentialoperator auf $U = K^\circ$, wobei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand ist und B ein linearer Randwertoperator, so heißt G Greensche Funktion für das Randwertproblem

$$Lu = f\ ,\ Bu = g\ , \tag{$*$}$$

falls $\int_K \phi(y)\Delta_y G(x,y)\,dy = \phi(x)$ und $B_y G(x,y) = 0$. (Das Integral ist formal aufzufassen, um dies präzise zu machen, braucht man die Theorie der Distributionen, vgl. das Buch von O. Forster.)
Man nehme an, dass es eine G eine Greensche Funktion für $L = \Delta$ und gegebenes B gibt. Dann gilt für jede $\mathcal{C}^2$-Funktion u auf K

$$\phi(x) = \int_K G(x,y)\Delta\phi(y)\,dy + \int_{\partial K} (\partial_\nu \phi(y) G(x,y) - \phi(y)\partial_{\nu,y} G(x,y))\,d\lambda_{\partial K}(y)\ .$$

Daher ist das Randwertproblem für $L = \Delta$ in den folgenden Fällen eindeutig lösbar:

1. Dirichlet-Randwertbedingung: $Bu = u|\partial K$. In diesem Fall ist G also so zu wählen, dass $G(x,y) = 0$ ist, wenn $y \in \partial K$.

2. Neumann-Randwertbedingung: $Bu = \partial_\nu u|K$. In diesem Fall ist G also so zu wählen, dass $\partial_{\nu,y} G(x,y) = 0$, wenn $y \in \partial K$.

Weiterhin gilt: Falls u eine $\mathcal{C}^2$-Funktion mit $\Delta u = 0$ ist (solche Funktionen heißen *harmonisch*), ist u durch seine Ableitung in Normalenrichtung oder seine Werte auf dem Rand ∂K auf ganz K eindeutig bestimmt.
Eine schöne Diskussion der Grundzüge der Theorie des Dirichlet-Randwertproblems und der harmonischen Funktionen findet man in § 16 von O. Forsters Buch. In § 17 wird etwas Distributionentheorie mit Anwendungen auf den Laplace- und Wärmeleitungsoperator behandelt. Dies zeigt schön, wie die hier behandelte Integrationstheorie in der Theorie partieller Differentialgleichungen Anwendung findet und motiviert deren weiteres Studium. Wir werden in dieser Vorlesung leider keine Zeit finden, uns mit diesen Dingen zu beschäftigen.

3 Integration von Differentialformen

3.1 Differentialformen erster Ordnung

Definition 3.1.1. Sei X eine Untermannigfaltigkeit mit Rand. Bezeichnet für $x \in X$

$$T_x^*(X) = \{\phi : T_x(X) \to \mathbb{R} \mid \phi \text{ linear}\}$$

den Dualraum von $T_x(X)$, so ist $T_x^*(X) \cong \mathbb{R}^m$. Eine *Differentialform erster Ordnung* ist eine Abbildung

$$\omega : X \to \bigcup_{x \in X} T_x^*(X) \quad \text{mit} \quad \omega(x) \in T_x^*(X) \quad \text{für alle } x \in X\,,$$

wobei $T_x^*(X)$ der Dualraum von $T_x(X)$ ist. Das heißt, für jedes $x \in U$ ist $\omega(x)$ eine Linearform auf $T_x(X)$. Den Wert von $\omega(x)$ auf dem Vektor $v \in T_x(U)$ schreibt man $\omega(x)(v)$. Die Menge aller Differentialformen erster Ordnung auf U schreibt man $\Omega^1(X)$.

Offensichtlicherweise ist für $\omega \in \Omega^1(X)$ und eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ das Produkt $f \cdot \omega$, definiert durch

$$(f \cdot \omega)(x)(v) = f(x) \cdot \omega(x)(v) \quad \text{für alle } x \in X,\, v \in T_x(X)\,,$$

wieder eine Differentialform erster Ordnung auf X.

Ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion, so kann man eine Differentialform $df \in \Omega^1(X)$, das *Differential* von f, wie folgt definieren. Ist $x \in X$ und $\dot\gamma(0) \in T_x(X)$ ein Tangentialvektor ($\gamma : I \to U$, $\gamma(I) \subset X$, $\gamma(0) = x$), so definiert man

$$df(x)(\dot\gamma(0)) = (f \circ \gamma)'(0)\,.$$

Dann gilt $df(x)(v) = T_x(f)v$, so dass die Definition wirklich nur von $\dot\gamma(0)$ und nicht von γ abhängt. Ist $X = U$ eine offene Menge mit Rand, so ist $df(x)v = Df(x)v$.

Insbesondere gilt $d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg$. In der Tat:

$$d(f \cdot g)(x)(v) = T_x(f \cdot g)v = g(x) \cdot T_x(f)v + g(x) \cdot T_x(g)v = (g \cdot df + f \cdot dg)(x)(v)\,.$$

Ist $X = U$ eine offene Menge mit Rand, so sind die Differentialformen $dx_1, \dots, dx_n$ als die Differentiale der Koordinatenfunktionen $x_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : y \mapsto y_j$ definiert. Es gilt

$$dx_i(y)(e_j) = (x_i \circ \gamma_j)'(0) = \delta_{ij}\,, \quad \text{wobei} \quad \gamma_j(t) = y + t \cdot e_j\,.$$

Satz 3.1.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit Rand und $\omega \in \Omega^1(U)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $f_1, \dots, f_n : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j \cdot dx_j \quad \text{auf} \quad U\,.$$

Für $\omega = df$ ergibt sich

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot dx_j \,.$$

Beweis. Es gilt $e_j \in \mathbb{R}^n = T_x(U)$. Definiere f_j durch

$$f_j(x) = \omega(x)(e_j) \quad \text{für alle } j = 1, \ldots, n \,,\, x \in U \,.$$

Seien $u \in U$ und $v \in T_u U$. Dann gilt $v = \sum_{j=1}^n v_j \cdot e_j$, also

$$\omega(u)v = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot \omega(u)(e_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot f_j(u) = \sum_{j=1}^{n} f_j(u) \cdot dx_j(x)(v) = \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \cdot dx_j\right)(u)(v) \,.$$

Ist andererseits $\omega = \sum_{j=1}^n f_j \cdot dx_j$, so folgt

$$\omega(\sqcup)(e_i) = \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot dx_j(\sqcup)(e_i) = f_i \,,$$

also die erste Behauptung. Man rechnet nun

$$df(y)(e_j) = Df(y)e_j = \frac{\partial f(y)}{\partial x_j} \,,$$

woraus die zweite Behauptung folgt. □

Definition 3.1.3. Seien U eine offene Menge mit Rand und $\omega \in \Omega^1(U)$, $\omega = \sum_{j=1}^n f_j \cdot dx_j$. Dann heißt ω von der *Klasse* $\mathcal{C}^q$, falls dies für die Funktionen $f_1, \ldots, f_n$ der Fall ist.
Sei $\phi : Y \to X$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, wobei X, Y eine Untermannigfaltigkeiten mit Rand sind. Dann definiert man die *Zurückziehung* (oder den *Pullback*) durch

$$\phi^*\omega(y)(v) = \omega(\phi(y))\big(T_y(\phi)v\big) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^1(X) \,,\, y \in Y \,,\, v \in T_y(Y) \,.$$

Insbesondere definiert man für $U \subset X$ offen in X die *Einschränkung* durch $\omega|U = i^*\omega$, wobei $i : U \to X : x \mapsto x$ die Inklusionsabbildung sei.

Lemma 3.1.4. Seien $\phi : Z \to Y$ und $\psi : Y \to X$ $\mathcal{C}^1$-Abbildungen und $\omega \in \Omega^1(X)$. Dann gilt

$$\phi^*(\psi^*\omega) = (\psi \circ \phi)^*\omega \quad \text{und} \quad \mathrm{id}_U^*\,\omega = \omega \,.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi^*(\psi^*\omega)(y)(v) &= (\psi^*\omega)(\phi(y))\big(T_y(\phi)v\big) = \omega\big(\psi(\phi(y))\big)\big(T_{\phi(y)}(\psi)T_y(\phi)v\big) \\ &= \omega\big(\psi(\phi(y))\big)\big(T_y(\psi \circ \phi)v\big) = (\psi \circ \phi)^*\omega(y)(v) \end{aligned}$$

für alle $y \in Z$ und $v \in T_y(Z)$.
Weiter

$$(\mathrm{id}_U^*\,\omega)(y)(v) = \omega(\mathrm{id}_U(y))\big(T_y(\mathrm{id}_U)v\big) = \omega(y)(v) \,,$$

also folgt die Behauptung. □

Satz 3.1.5. Seien $\phi : Y \to X$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, $f : X \to \mathbb{R}$ der Klasse $\mathcal{C}^1$ und $\omega \in \Omega^1(X)$. Es gilt

$$\phi^*(f \cdot \omega) = (f \circ \phi) \cdot \phi^* \omega \quad \text{und} \quad \phi^*(df) = d(f \circ \phi) .$$

Folglich gilt für $X = U \subset \mathbb{R}^m$ und $Y = V \subset \mathbb{R}^k$ offene Mengen mit Rand und $\omega = \sum_{j=1}^n m_j \cdot dx_j$, dass

$$\phi^* \omega = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m f_i \circ \phi \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \cdot dx_j .$$

Insbesondere gilt: Ist ω der Klasse $\mathcal{C}^q$ und ϕ der Klasse $\mathcal{C}^{q+1}$, so ist $\phi^*\omega$ der Klasse $\mathcal{C}^q$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\phi^*(f \cdot \omega)(y)(v) &= (f \cdot \omega)(\phi(y))\big(T_y(\phi)v\big) = f(\phi(y)) \cdot \omega(\phi(y))\big(T_y(\phi)(v)\big) \\ &= f(\phi(y)) \cdot (\phi^*\omega(y))(v) = (f \circ \phi \cdot \phi^*\omega)(y)(v) .\end{aligned}$$

Weiterhin

$$\phi^*(df)(y)(v) = df(\phi(y))\big(T_y(\phi)v\big) = Df(\phi(y))D\phi(y)v = D(f \circ \phi)(y)v = d(f \circ \phi)(y)(v) .$$

Es folgt

$$\phi^* \omega = \sum_{i=1}^n f_i \circ \phi \cdot d(x_i \circ \phi) .$$

Nun ist

$$d(x_i \circ \phi)(y)(e_j) = D\phi_i(y)e_j = \frac{\partial \phi_i(y)}{\partial x_j} ,$$

also

$$d(x_i \circ \phi) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \cdot dx_j .$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Definition 3.1.6. Sei X eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Klasse $\mathcal{C}^{q+1}$. $\omega \in \Omega^1(X)$ von der Klasse $\mathcal{C}^q$, falls es für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung V und eine reguläre Parametrierung $f : U \to V \subset X$ der Klasse $\mathcal{C}^{q+1}$ an $x \in V$ gibt mit $f^*\omega = f^*(\omega|V)$ von der Klasse $\mathcal{C}^q$ in U . Es ist klar, dass diese Definition von der Wahl der Parametrierung unabhängig ist (Übung).

Beispiel 3.1.7. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Da I die Vereinigung von höchstens zwei offenen Mengen mit Rand ist, deren Schnitt eine offene Menge ist, ist jedes $\omega \in \Omega^1(I)$ der Form $\omega = f \cdot dx$ mit $f : I \to \mathbb{R}$. Falls f integrierbar ist sagt man, $\omega = f\,dx$ sei integrierbar. Man dann das Integral von ω definieren:

$$\int_I \omega = \int_I f(x)\,dx .$$

Dies erklärt übrigens auch die Notation dx .
Als Spezialfall der Definition erhält man: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion und $I = [a, b]$, so gilt

$$\int_I df = f(b) - f(a) .$$

Definition 3.1.8. Man kann die eben gemachte Definition ausdehnen. Seien $\omega \in \Omega^1(X)$ und

$\gamma : [a,b] \to X$ von Klasse $\mathcal{C}^1$, so dass $\gamma^*\omega$ integrierbar ist. Dann definiert man

$$\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} \gamma^*\omega = \int_a^b \omega(\gamma(x))(\dot\gamma(x))\,dx\,.$$

Wenn $X = U$ eine offene Menge mit Rand ist und $\omega = \sum_{j=1}^n f_j \cdot dx_j$, so ergibt sich

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(x))\gamma_j'(x)\,dx\,.$$

Satz 3.1.9. Seien $\phi : Y \to X$ und $\psi : [c,d] \to [a,b]$ $\mathcal{C}^1$-Abbildungen, wobei $\psi(c) = a$ und $\psi(d) = b$ sei. Es gilt

$$\int_\gamma \phi^*\omega = \int_{\phi\circ\gamma} \omega \quad \text{und} \quad \int_{\gamma\circ\psi} \omega = \int_\gamma \omega\,.$$

Falls $\psi(c) = b$ und $\psi(d) = a$ sind, gilt $\int_{\gamma\circ\psi}\omega = -\int_\gamma \omega$.

Beweis. Es gilt

$$\int_\gamma \phi^*\omega = \int_{[a,b]} \gamma^*\phi^*\omega = \int_{[a,b]} (\phi\circ\gamma)^*\omega = \int_{\phi\circ\gamma} \omega\,.$$

Weiterhin gilt mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\psi} \omega &= \int_c^d \omega(\gamma(\psi(x)))(\gamma\circ\psi)'(x)\,dx \\ &= \int_c^d \omega(\gamma(\psi(x)))\dot\gamma(\psi(x))\cdot\psi'(x)\,dx = \int_a^b \omega(\gamma(x))\dot\gamma(x)\,dx = \int_\gamma \omega\,,\end{aligned}$$

was zu zeigen war. Die letzte Aussage folgt ebenso. □

Bemerkung 3.1.10. Dies zeigt, dass das Integral $\int_\gamma \omega$ von der gewählten Orientierung der Kurve, nicht aber von der Parametrisierung abhängt. Insbesondere wird es im Folgenden stets reichen Kurven zu betrachten, die auf $[0,1]$ definiert sind.

Definition 3.1.11. Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to X$ heißt *stückweise* $\mathcal{C}^1$, falls es eine endliche Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ des Intervalls $[a,b]$ gibt, so dass $\gamma_j = \gamma|[x_j, x_{j+1}]$ für $0 \leqslant j < k$ allesamt $\mathcal{C}^1$ sind. Ist $\omega \in \Omega^1(X)$, so dass die $\gamma_j^*\omega$ integrierbar sind, so setzt man

$$\int_\gamma \omega = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\gamma_j} \omega\,.$$

Man sieht leicht ein, dass diese Definition nicht von der gewählten Unterteilung abhängt.

Satz 3.1.12. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion und $\gamma : [a,b] \to X$ stückweise $\mathcal{C}^1$. Dann gilt

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,.$$

Beweis. Sei zunächst γ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve. Dann gilt

$$\int_\gamma df = \int_{[a,b]} \gamma^*(df) = \int_{[a,b]} d(f\circ\gamma) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,.$$

Sei nun γ beliebig und $\gamma_j = \gamma|[x_j, x_{j+1}]$ seien $\mathcal{C}^1$-Kurven, wobei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. Es folgt

$$\int_\gamma df = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\gamma_j} df = \sum_{j=0}^{k-1} f(\gamma(x_{j+1})) - f(\gamma(x_j)) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) ,$$

d.h. die Behauptung. □

Bemerkung 3.1.13. Ist γ eine *geschlossene* Kurve, d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$, so zeigt der Satz, dass $\int_\gamma df = 0$ für alle $\mathcal{C}^1$-Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$. Falls diese Integrale nicht verschwinden, ist also $\omega \neq df$ für alle f . Betrachte etwa die Differentialform $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$, definiert durch

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} .$$

Weiter seien $n \in \mathbb{Z}$, $r > 0$ und $\gamma_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus 0$ die geschlossene Kurve

$$\gamma_n(t) = \big(r \cdot \cos(2\pi n t), r \cdot \sin(2\pi n t)\big) .$$

Dann gilt

$$\gamma_n^*(dx) = d(r \cdot \cos(2\pi n t)) = -2\pi r n \sin(2\pi n t)\, dt \quad \text{und} \quad \gamma_n^*(dy) = 2\pi r n \cos(2\pi n t)\, dt ,$$

also

$$\gamma_n^* \omega = \frac{2\pi r^2 n \cos^2(2\pi n t)\, dt + 2\pi r^2 n \sin^2(2\pi n t)\, dt}{r^2} = 2\pi n\, dt .$$

Es folgt

$$\int_{\gamma_n} \omega = 2\pi n \int_0^1 dt = 2\pi n .$$

Insbesondere ist für $n \neq 0$ das Integral $\neq 0$. Damit gibt es keine $\mathcal{C}^1$-Funktion f mit $df = \omega$. Wie wir in Kürze beweisen, charakterisiert das Verschwinden der Integrale $\int_\gamma \omega$ die Lösbarkeit der Gleichung $df = \omega$.

Satz 3.1.14. Sei X eine wegzusammenhängende Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dabei heißt ein metrischer Raum Z *wegzusammenhängend*, falls es zu $z_0, z_1 \in Z$ eine stetige Abbildung $\zeta : [0,1] \to Z$ gibt mit $\zeta(t) = z_t$, $t = 0,1$.
Sei $\omega \in \Omega^1(X)$ der Klasse $\mathcal{C}^0$. Dann gibt es eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ mit $df = \omega$ genau dann, wenn

$$\int_\gamma \omega = 0 \quad \text{für jede geschlossene stückweise } \mathcal{C}^1\text{-Kurve} \quad \gamma \text{ in X.}$$

Definition 3.1.15. Seien $\alpha : [0,1] \to X$ und $\beta : [0,1] \to X$ stückweise $\mathcal{C}^1$. Falls $\alpha(1) = \beta(0)$, d.h., β startet, wo α beginnt, definiert man die *Verknüpfung* $\alpha \odot \beta : [0,1] \to \mathcal{C}^1$ durch

$$(\alpha \odot \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} , \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 . \end{cases}$$

Es ist offensichtlich, dass $\alpha \odot \beta$ wieder stückweise $\mathcal{C}^1$ ist. Man definiert auch

$$\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t) \quad \text{für alle } \; t \in [0,1] .$$

Dann ist α^{-1} auch stückweise $\mathcal{C}^1$.
Aus der Definition von $\int_\gamma \omega$ ist sofort klar, dass $\int_{\alpha\odot\beta}\omega = \int_\alpha \omega + \int_\beta \omega$ und $\int_{\alpha^{-1}}\omega = -\int_\alpha \omega$.

Lemma 3.1.16. Seien $x_0, x_1 \in X$. Gibt es eine stetige Abbildung $\xi : [0,1] \to X$ mit $\xi(t) = x_t$, $t = 0,1$, so gibt es auch eine stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(t) = x_t$, $t = 0,1$.

Beweis. Für alle $t \in [0,1]$ gibt es eine reguläre Parametrisierung $f_t : U_t \to X$ an $\xi(t)$. Durch Verkleinerung der offenen Menge mit Rand U_t kann man annehmen, dass U_t der Schnitt einer offenen euklidischen Kugel mit einem geschlossenen Halbraum ist, d.h., dass U_t konvex ist. Da $\xi([0,1])$ kompakt ist und die $f_t(U_t)$, $t \in [0,1]$, eine offene Überdeckung bilden, gibt es $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1$, so dass mit $f_j = f_{t_j}$, $U_j = U_{t_j}$ und $V_j = f_j(U_j)$ gilt, dass $V_0, \ldots, V_m$ eine offene Überdeckung von $\xi([0,1])$ bilden.
Es gibt $y_{j+1} \in V_j \cap V_{j+1}$ für alle $0 \leqslant j < m$. Setze $y_0 = x_0$ und $y_{m+1} = x_1$. Für $0 \leqslant j \leqslant m$ fest gibt es $a_j, b_j \in U_j$ mit $f_j(a_j) = y_j$ und $f_j(b_j) = y_{j+1}$. Sei α_j die konvexe Verbindung von a_j zu b_j in U_j und setze $\beta_j = f_j \circ \alpha_j$. Dann gilt für $j < m$

$$\beta_j(1) = f_j(b_j) = y_{j+1} = f_{j+1}(a_{j+1}) = \beta_{j+1}(0)\,.$$

Folglich macht $\gamma = (\cdots(\beta_0 \odot \beta_1) \odot \beta_2 \cdots) \odot \beta_m$ Sinn. Diese Kurve ist stückweise $\mathcal{C}^1$ und es gilt $\gamma(0) = \beta_0(0) = x_0$ sowie $\gamma(1) = \beta_m(1) = x_1$. □

Beweis von Satz 3.1.14. Wir wissen bereits, dass die Bedingung notwendig ist. Falls die Bedingung erfüllt ist, wählen wir $x_0 \in X$ und definieren das gesuchte f durch

$$f(x) = \int_\gamma \omega\,, \quad \text{wobei } \gamma \text{ eine stückweise } \mathcal{C}^1\text{-Kurve mit} \quad \gamma(0) = x_0\,,\ \gamma(1) = x \text{ sei.}$$

Dass es eine solche Kurve gibt, folgt aus dem Lemma. Die Bedingung ist unabhängig von der Wahl von γ, denn, wenn δ eine weitere ist, gilt

$$\int_\gamma \omega - \int_\delta \omega = \int_{\gamma\odot\delta^{-1}} \omega = 0\,,$$

da $\gamma \odot \delta^{-1}$ geschlossen ist. Wir schreiben daher einfach $f(x) = \int_{x_0}^x \omega$.
Es gilt, dass f von Klasse $\mathcal{C}^1$ ist und dass $df = \omega$ dann und nur dann, wenn dies für alle lokalen Karten gilt. Sei $\varphi : U \to V \subset X$ eine reguläre Parametrisierung mit $\varphi(U) = V$. Dann gilt $\varphi^*(df) = d(f \circ \varphi)$ und

$$(f\circ\varphi)(u) = \int_{x_0}^{\varphi(u)} \omega = \int_{\varphi(u_0)}^{\varphi(u)} \omega + \int_{x_0}^{\varphi(u_0)} \omega = \int_{u_0}^{u} \varphi^*\omega + \int_{x_0}^{\varphi(u_0)} \omega \quad \text{für alle } u, u_0 \in U\,.$$

Da $dc = 0$ für alle Konstanten c, reicht es, $d\tilde{f} = \varphi^*\omega$ für $\tilde{f}(u) = \int_{u_0}^u \varphi^*\omega$ zu zeigen.
Daher reicht es anzunehmen, dass $X = U$ eine offene Menge mit Rand ist. Da sich ω lokal auf offene und wegzusammenhängende Umgebungen von Punkten $x \in X$ fortsetzen lässt, kann man annehmen, dass X ohne Rand ist.
Seien $x \in X$, $1 \leqslant j \leqslant m$ und $h \neq 0$. Für h klein ist die Kugel um x mit Radius $|h|$ in X enthalten. Es gilt

$$f(x + he_j) - f(x) = \int_x^{x+he_j} \omega$$

und der konvexe Weg $[x, x + he_j]$ liegt in X. Mit $\omega = \sum_{j=1}^m f_j\, dx_j$ ist

$$\int_x^{x+he_j} \omega = \int_0^1 f_j(x + the_j)\, dt \cdot h\,, \quad \text{da} \quad \int_{[x,x+hej]} f_i\, dx_i = 0 \quad \text{für alle } i \neq j\,.$$

Es folgt $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j$, also ist f $\mathcal{C}^1$ und $df = \omega$. □

Zur Eindeutigkeit von f mit $df = \omega$ gibt das folgende Lemma Auskunft.

Lemma 3.1.17. Sei X wegzusammenhängend und $df = 0$. Dann ist f konstant.

Beweis. Seien $x, y \in X$. Es gibt eine stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurve γ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Nach Satz 3.1.12 gilt

$$f(y) - f(x) = \int_\gamma df = 0\,.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Zwar haben wir die Lösbarkeit der Gleichung $df = \omega$ nun charakterisiert, aber die Bedingung $\int_\gamma \omega = 0$ für *alle* geschlossenen Kurven γ ist offensichtlich nicht leicht zu überprüfen. Eine alternative Charakterisierung wäre also wünschenswert.

Wir werden im weiteren Verlauf sehen, dass es eine algebraische Bedingung (Geschlossenheit) an ω gibt, die in jedem Fall für die Lösbärkeit von $df = \omega$ notwendig ist. Damit diese Bedingung hinreichend ist, sind geometrische Voraussetzungen an die Untermannigfaltigkeit X notwendig. (Kontrahierbarkeit, vgl. $\mathbb{R}^2$ versus $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.)

Um diese Fragen abschließend zu klären, werden wir zunächst Differentialformen höherer Ordnung betrachten. Diese erlauben es, auch für $\omega \in \Omega^1(X)$ ein Differential $d\omega$ zu definieren.

3.2 Die äußere Algebra

Definition 3.2.1. Sei im Folgenden V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $\dim V = m$. (Später wird $V = T_x(X)$ sein.)

Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine *alternierende k-Form* ist, wie aus der linearen Algebra bekannt, eine Abbildung $\omega : V^k \to \mathbb{R}$ mit

$$\omega(\ldots, \lambda u + \mu v, \cdots) = \lambda\omega(\ldots, u, \ldots) + \mu\omega(\ldots, v, \ldots)\,,\ \omega(\ldots, u, v, \ldots) = -\omega(\ldots, v, u, \ldots)$$

für alle $u, v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Die Menge

$$\wedge^k V^* = \{\omega : V^k \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ alternierende } k\text{-Form}\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Mit der Konvention $V^0 = \mathbb{R}$ erhält man $\wedge^0 V^* \cong \mathbb{R}$ (kanonisch) und $\wedge^1 V = V^*$, der Dualraum von V.

Für $\alpha \in \wedge^k V^*$ und $\beta \in \wedge^\ell V^*$ definiert man eine Abbildung $\alpha \wedge \beta : V^{k+\ell} \to \mathbb{R}$ durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \ldots, v_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma)\alpha\big(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\big)\beta\big(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+\ell)}\big)\,,$$

wobei $\mathfrak{S}_{k+\ell}$ die symmetrische Gruppe der Permutationen von $\{1, \ldots, k + \ell\}$ ist. $\alpha \wedge \beta$ heißt das *äußere Produkt* von α und β.

Theorem 3.2.2. Für $\alpha \in \wedge^k V^*$ und $\beta \in \wedge^\ell V^*$ ist $\alpha \wedge \beta \in \wedge^{k+\ell} V^*$. Die Operation $\wedge$ ist assoziativ und distributiv bzgl. der Vektorraumoperationen, d.h.

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) , \\ (\lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \beta) \wedge \gamma &= \lambda \cdot (\alpha \wedge \gamma) + \mu \cdot (\beta \wedge \gamma) , \\ \alpha \wedge (\lambda \cdot \beta + \mu \cdot \gamma) &= \lambda \cdot (\alpha \wedge \beta) + \mu \cdot (\alpha \wedge \gamma) . \end{aligned}$$

Weiterhin ist $\wedge$ graduiert kommutativ, d.h. $\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha$.

Beweis. Die Multilinearität von $\alpha \wedge \beta$ ist klar. Weiterhin gilt für alle $\tau \in \mathfrak{S}_{k+\ell}$

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k+\ell)}) &= \frac{1}{k!\ell!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\sigma) \alpha\big(v_{\tau\sigma(1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k)}\big) \beta\big(v_{\tau\sigma(k+1)}, \dots, v_{\tau\sigma(k+\ell)}\big) \\ &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\varrho \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \varepsilon(\tau^{-1}\varrho) \alpha\big(v_{\varrho(1)}, \dots, v_{\varrho(k)}\big) \beta\big(v_{\varrho(k+1)}, \dots, v_{\varrho(k+\ell)}\big) \\ &= \varepsilon(\tau) \cdot (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) . \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $\alpha \wedge \beta \in \wedge^{k+\ell} V^*$. Es gilt nach Definition und der eben bewiesenen Gleichung

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) &= (\beta \wedge \alpha)(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell}, v_1, \dots, v_k) \\ &= (-1)^k \cdot (\beta \wedge \alpha)(v_{k+1}, \dots, v_{k+\ell-1}, v_1, \dots, v_k, v_{k+\ell}) \\ &= \dots = (-1)^{k\ell} (\beta \wedge \alpha)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) . \end{aligned}$$

Die Assoziatvität folgt ähnlich wie die erste Gleichung (Substitution $\varrho = \sigma\tau$, definiere $\tau(j) = j$ für $j > k + \ell$):

$$\begin{aligned} &\big((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma\big)(v_1, \dots, v_{k+\ell+j}) \\ &\quad = \frac{1}{(k+\ell)! \cdot k! \cdot \ell! \cdot j!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell+j}, \tau \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \begin{aligned}[t] &\varepsilon(\sigma\tau) \alpha(v_{\sigma\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k)}) \\ &\cdot \beta(v_{\sigma\tau(k+1)}, \dots, v_{\sigma\tau(k+\ell)}) \gamma\big(v_{\sigma(k+\ell+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell+j)}\big) \end{aligned} \\ &\quad = \frac{1}{k!\ell!j!} \cdot \sum_{\varrho \in \mathfrak{S}_{k+\ell+j}} \varepsilon(\varrho) \alpha(v_{\varrho(1)}, \dots, v_{\varrho(k)}) \beta(v_{\varrho(k+1)}, \dots, v_{\varrho(k+\ell)}) \gamma\big(v_{\varrho(k+\ell+1)}, \dots, v_{\varrho(k+\ell+j)}\big) . \end{aligned}$$

Bezeichnet man die rechte Seite mit $\wedge(\alpha, \beta, \gamma)$, so folgt

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) &= (-1)^{k(\ell+j)} (\beta \wedge \gamma) \wedge \alpha = (-1)^{k(\ell+j)} \wedge (\beta, \gamma, \alpha) \\ &= (-1)^{k\ell} \wedge (\beta, \alpha, \gamma) = \wedge(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma . \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Korollar 3.2.3. Seien $\alpha_j \in \wedge^{k_j} V^*$, $j = 1, \dots, \ell$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_\ell)(v_1, \dots, v_{k_1+\dots+k_\ell}) \\ &\quad = \frac{1}{k_1! \cdots k_m!} \cdot \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k_1+\dots+k_\ell}} \begin{aligned}[t] &\varepsilon(\sigma) \alpha_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k_1)}) \\ &\cdot \alpha_2(v_{\sigma(k_1+1)}, \dots, v_{\sigma(k_2)}) \cdots \alpha_\ell\big(v_{\sigma(k_1+\dots+k_{\ell-1}+1)}, \dots, v_{\sigma(k_1+\dots+k_\ell)}\big) . \end{aligned} \end{aligned}$$

Bemerkung 3.2.4. Die im Theorem bewiesenen Gleichungen für das äußere Produkt, außer der graduierten Kommutativität, sind die Axiome einer *graduierten Algebra*. Genauer gesagt ist die direkte Summe $\wedge^\bullet V^* = \oplus_{k=0}^\infty \wedge^k V^*$ eine graduierte Algebra, die so genannte *äußere* oder *Grassmann-Algebra* von V^*.

Korollar 3.2.5. Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k \in V^*$ 1-Formen und $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ mit

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} .$$

Dann gilt

$$\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k = \det A \cdot \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_k &= \sum_{1\leqslant j_1,\ldots,j_k\leqslant n} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdot \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_k} \\
&= \sum_{1\leqslant j_1,\ldots,j_k\leqslant n\,,\, p\neq q \Rightarrow j_p\neq j_q} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdot \alpha_{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{j_k} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdot \alpha_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\sigma(k)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdot \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = \det A \cdot \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \,,
\end{aligned}$$

d.h. die Behauptung. □

Korollar 3.2.6. Sei $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von V^*. Dann bilden

$$v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_k} \,,\ 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant m$$

eine Basis von $\wedge^k V^*$. Insbesondere ist $\dim \wedge^k V^* = \binom{m}{k}$ und $\wedge^k V^* = 0$, wenn $k > m$.

Beweis. Es ist aus den Eigenschaften des äußeren Produkts sofort klar, dass diese Vektoren den Vektorraum $\wedge^k V^*$ erzeugen. Zur linearen Unabhängigkeit: Sei $u_1, \cdots, u_m$ die duale Basis von V, bestimmt durch die Gleichung $v_i(u_j) = \delta_{ij}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_k})(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_{j_1}(u_{i_{\sigma(1)}}) \cdots v_{j_k}(u_{i_{\sigma(k)}}) \\
&= \begin{cases} \varepsilon(\sigma) & \text{es gibt ein } \sigma \in \mathfrak{S}_k \text{ mit } i_{\sigma(p)} = j_p \text{ für alle } p = 1, \ldots, k\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Falls $j_1 < \cdots < j_k$ und $i_1 < \cdots < i_k$, ist die erste Bedingung äquivalent zu $\sigma = 1$ und der Gleichheit $(j_1, \ldots, j_k) = (i_1, \ldots, i_k)$. Sei nun $\omega = \sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m} a_{j_1,\ldots,j_k} \cdot v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_k}$. Dann gilt

$$\omega(u_{j_1}, \cdots, u_{j_k}) = a_{j_1,\ldots,j_k} \quad \text{für alle } 1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant m\,.$$

Folglich sind die Koeffizienten eindeutig und die $v_{j_1} \wedge \cdots \wedge v_{j_m}$ linear unabhängig. □

3.3 Differentialformen höherer Ordnung

Definition 3.3.1. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ im Folgenden wieder eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension m und $k \in \mathbb{N}$. Eine k-Form oder Differentialform der Ordnung k auf X ist eine Abbildung

$$\omega : X \to \bigcup_{x \in X} \wedge^k T_x^*(X) \quad \text{mit} \quad \omega(x) \in \wedge^k T_x^*(X) \quad \text{für alle } \ x \in X\,,$$

wobei $\wedge^k T_x^*(X) = \wedge^k T_x(X)^*$. Eine 1-Form ist also nichts anderes als eine Differentialform erster Ordnung, wie wir sie schon kennen. Eine 0-Form ist einfach eine Funktion, weil ja $\wedge^0 T_x^*(X) = \mathbb{R}$. Für die Menge der k-Formen auf X schreibt man $\Omega^k(X)$. Da $\wedge^k V^* = 0$ für $k > m = \dim V$, ist $\Omega^k(X) = 0$ für $k > m = \dim X$.

Das äußere Produkt lässt sich auch für $\alpha \in \Omega^k(X)$ und $\beta \in \Omega^\ell(X)$ definieren:

$$(\alpha \wedge \beta)(y) = \alpha(y) \wedge \beta(y) \quad \text{für alle } \ y \in X\,.$$

Dann ist $\alpha \wedge \beta \in \Omega^{k+\ell}(X)$ und die Rechenregeln für $\wedge$ bleiben gültig. Insbesondere kann man mit Funktionen (0-Formen) multiplizieren: $f \cdot \omega$ definiert man als $f \wedge \omega$. Für 1-Formen stimmt dies mit der bisherigen Definition überein. Es gilt

$$f \cdot (\alpha \wedge \beta) = (f \cdot \alpha) \wedge \beta = \alpha \wedge (f \cdot \beta) \quad \text{für alle } \ f : X \to \mathbb{R}\,, \alpha \in \Omega^k(X)\,, \beta \in \Omega^\ell(X)\,.$$

Wenn $\phi : Y \to X$ eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung ist, $q \geqslant 1$, definiert man $\phi^*\omega \in \Omega^k(Y)$ durch

$$\phi^*\omega(y)(v_1, \ldots, v_k) = \omega(\phi(y))\big(T_y(\phi)v_1, \ldots, T_y(\phi)v_k\big) \quad \text{für alle } \ y \in Y\,, v_1, \ldots, v_k \in T_y(Y)\,.$$

Dann gilt $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$, $\phi^* f = f \circ \phi$ und $(\psi \circ \phi)^*\omega = \phi^*\psi^*\omega$.

Lemma 3.3.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge mit Rand und $\omega \in \Omega^k(U)$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Funktionen $f_{j_1,\ldots,j_k}$ mit

$$\omega = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant m} f_{j_1,\ldots,j_k}\, dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}\,.$$

Wir verwenden hierfür die Kurzschreibweise $\omega = \sum_J f_J\, dx_J$, wobei $J = (j_1, \ldots, j_k)$.

Beweis. Für alle $u \in U$ bilden $dx_{j_1}(u) \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}(u)$, $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant m$, eine Basis von $\wedge^k T_x^*(U) = \wedge^k(\mathbb{R}^m)^*$. Damit gibt es für jedes $u \in U$ eindeutig bestimmte Zahlen $f_{j_1,\ldots,j_k}(u) \in \mathbb{R}$ mit

$$\omega(u) = \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant m} f_{j_1,\ldots,j_k}(u) \cdot dx_{j_1}(u) \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}(u)\,.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Bemerkung 3.3.3. Nicht immer ist die Darstellung in lokalen Koordinaten nützlich. So gilt etwa für $\omega = \sum_J f_J\, dx_J \in \Omega^k(U)$ und $\phi : V \to U$ der Klasse $\mathcal{C}^1$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \phi^*\omega &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant m} f_{j_1 \cdots j_K} \circ \phi \cdot \phi^*(dx_{j_1}) \wedge \cdots \wedge \phi^*(dx_{j_k}) \\ &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant m} \sum_{i_1,\ldots,i_k = 1}^{n} f_{j_1 \cdots j_m} \circ \phi \cdot \frac{\partial \phi_{j_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial \phi_{j_k}}{\partial x_{i_k}}\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k\,,\,1\leqslant j_1<\cdots<j_k\leqslant m} \varepsilon(\sigma)\cdot f_{j_1\cdots j_k}\circ\phi\cdot\frac{\partial\phi_{j_1}}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}}\cdots\frac{\partial\phi_{j_k}}{\partial x_{i_{\sigma(k)}}}\Big)\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\,.$$

Definition 3.3.4. Ist $U\subset\mathbb{R}^m$ eine offene Menge mit Rand, so heißt eine k-Form $\omega=\sum_J f_J\,dx_J\in\Omega^k(X)$ von Klasse $\mathcal{C}^q$, $q\geqslant 0$, falls dies für die f_J gilt. Eine k-Form $\omega\in\Omega^k(X)$ heißt von Klasse $\mathcal{C}^q$, falls es für jedes $x\in X$ eine reguläre Parametrisierung ϕ der Klasse $\mathcal{C}^{q+1}$ an x gibt, so dass $\phi^*\omega$ der Klasse $\mathcal{C}^q$ ist. Die Kettenregel für die Zurückziehung zeigt, dass diese Definition nicht von der Wahl lokaler Parametrisierungen abhängt. Aus der Definition ist auch klar, dass für $\phi: Y\to X$ der Klasse $\mathcal{C}^q$ und $\omega\in\Omega^k(X)$ der Klasse $\mathcal{C}^{q+1}$ die Form $\phi^*\omega\in\Omega^k(Y)$ der Klasse $\mathcal{C}^q$ ist.

Lemma 3.3.5. Seien $\omega\in\Omega^k(X)$ und $\beta\in\Omega^\ell(X)$ der Klasse $\mathcal{C}^q$. Dann gilt dies auch für $\alpha\wedge\beta$.

Beweis. Da $\phi^*(\alpha\wedge\beta)=\phi^*\alpha\wedge\phi^*\beta$, reicht es den Fall zu betrachten, dass $U=X$ eine offene Menge mit Rand ist. Dann gilt $\alpha=\sum_I f_I\,dx_I$ und $\beta=\sum_J g_J dx_J$. Es folgt

$$\alpha\wedge\beta=\sum_{I,J}(f_I\,dx_I)\wedge(g_J\,dx_J)=\sum_{I,J}f_Ig_J\,dx_I\wedge dx_J=\sum_K\Big(\sum_{I\cap J=\varnothing\,,\,I\cup J=K}\varepsilon\binom{I\,J}{K}f_Ig_J\Big)\cdot dx_K\,.$$

Daher ist $\alpha\wedge\beta$ der Klasse $\mathcal{C}^q$. □

Definition 3.3.6. Sei $U\subset\mathbb{R}^m$ eine offene Menge mit Rand und $\omega\in\Omega^k(X)$, $\omega=\sum_J f_j\,dx_J$, der Klasse $\mathcal{C}^q$, $q\geqslant 1$. Dann ist das *Differential* von ω

$$d\omega=\textstyle\sum_J df_J\wedge dx_J\in\Omega^{k+1}(X)\quad\text{der Klasse } \mathcal{C}^{q-1}\text{, nach Lemma 3.3.5.}$$

Für $k=0$ stimmt dies offenbar mit der bekannten Definition von df für $\mathcal{C}^1$-Funktionen $f:U\to\mathbb{R}$ überein. Es ist offensichtlich, dass d linear ist. Da $df=0$ ist, falls f kostant ist, folgt aus der Definition, dass $d(dx_J)=0$ für alle Multiindizes $J=(j_1,\ldots,j_k)$.

Beispiel 3.3.7. Sei $f=(f_1,\ldots,f_m): U\to\mathbb{R}^m$. Man betrachtet die $(m-1)$-Form

$$\omega=\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}f_j\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots dx_m\,,$$

wobei $\widehat{dx_j}$ heißt, dass der Faktor dx_j weggelassen wird. Da $\wedge^{m-1}T_u^*(U)=\wedge^{m-1}(\mathbb{R}^m)*$ die Dimension $\binom{m}{m-1}=m$ hat, bilden die Multilinearformen $dx_1(u)\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j(u)}\wedge\cdots\wedge dx_m(u)$ eine Basis und jede $(m-1)$-Form auf U ist von dieser Gestalt.

Es gilt

$$\begin{aligned} d\omega&=\sum_{j=1}^m(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^m\frac{\partial f_i}{\partial x_i}dx_i\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_j}\wedge\cdots\wedge dx_m\\ &=\Big(\sum_{j=1}^m\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\Big)\cdot dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m=\operatorname{div}f\cdot dx_1\wedge\cdots\wedge dx_m\,,\end{aligned}$$

d.h. das Differential entspricht für $(m-1)$-Formen der Divergenz von Vektorfeldern.

Beispiel 3.3.8. Sei $\omega\in\Omega^1(U)$ der Klasse $\mathcal{C}^1$, d.h $\omega=\sum_{j=1}^m f_j\,dx_j$ mit $f_j:U\to\mathbb{R}$ der Klasse $\mathcal{C}^1$. Dann gilt

$$d\omega=\sum_{i,j=1}^m\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,dx_i\wedge dx_j=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)\,dx_i\wedge dx_j\,.$$

Folglich ist ω genau dann geschlossen, wenn $d\omega = 0$ ist.

Satz 3.3.9. Seien $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^\ell(U)$ der Klasse $\mathcal{C}^1$ und $\omega \in \Omega^k(U)$, $\phi : V \to U$ der Klasse $\mathcal{C}^2$. Dann gilt

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta\,,\ d(d\omega) = 0 \quad \text{und} \quad \phi^* d\omega = d(\phi^*\omega)\,.$$

Beweis. Da beide Seiten der ersten Gleichung bilinear sind, reicht es, den Fall $\alpha = f\,dx_I$ und $\beta = g\,dx_J$ zu betrachten. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg\,dx_I \wedge dx_J) = d(fg) \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= (df \cdot g + f \cdot dg) \wedge dx_I \wedge dx_J = (df \wedge dx_I) \wedge (g\,dx_J) + f \cdot dg \wedge dx_I \wedge dx_J \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^k f \cdot dx_I \wedge dg \wedge dx_J = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta\,. \end{aligned}$$

Auch für die Gleichung $d(d\omega) = 0$ kann man sich auf den Fall $\omega = f\,dx_I$ zurückziehen. Dann gilt

$$d(d\omega) = d(df \wedge dx_I) = d(df) \wedge dx_I - df \wedge d(dx_I) = d(df) \wedge dx_I\,,$$

da $d(dx_I) = 0$. Es reicht also, die Aussage für 0-Formen $\omega = f$ zu beweisen. Es gilt

$$\begin{aligned} d(df) &= d\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx_j = \sum_{j=1}^m d(\partial_j f) \wedge dx_j \\ &= \sum_{i,j=1}^m \partial_i\partial_j f\,dx_i \wedge dx_j = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant m} \big(\partial_i\partial_j f - \partial_j\partial_i f\big)\,dx_i \wedge dx_j = 0\,, \end{aligned}$$

da f der Klasse $\mathcal{C}^2$ ist. Also gilt stets $d(d\omega) = 0$.
Für die letzte Gleichung betrachten wir o.B.d.A. wieder $\omega = f\,dx_J$. Die Gleichung ist für 0-Formen bereits bekannt. Es folgt

$$\begin{aligned} \phi^*(d\omega) &= \phi^*(df) \wedge \phi^*(dx_J) = d(\phi^* f) \wedge \phi^* dx_J \\ &= d(\phi^* f \wedge \phi^*(dx_J)) + \phi^* f \wedge d(\phi^*(dx_J)) = d(\phi^*\omega)\,, \end{aligned}$$

da

$$\phi^*(dx_J) = \phi^*(dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k}) = d(\phi^* x_{j_1}) \wedge \cdots \wedge d(\phi^* x_{j_k})$$

und folglich $d\phi^*(dx_J) = 0$. □

Definition 3.3.10. Der vorherige Satz erlaubt die Definition des Differentials auf einer Untermannigfaltigkeit. Sei dazu X eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Klasse $\mathcal{C}^2$ und $\omega \in \Omega^k(X)$ der Klasse $\mathcal{C}^1$. Dann ist die $(k+1)$-Form $d\omega \in \Omega^{k+1}(X)$ der Klasse $\mathcal{C}^0$ im Punkt $x \in X$ durch

$$d\omega(x) = (\phi^{-1,*} d\phi^*\omega)(x) \quad \text{definiert,}$$

wobei ϕ eine reguläre Parametrisierung der Klasse $\mathcal{C}^2$ an x ist.

Korollar 3.3.11. Seien $\alpha \in \Omega^k(X)$, $\beta \in \Omega^\ell(X)$ der Klasse $\mathcal{C}^1$ und $\omega \in \Omega^k(X)$, $\phi : Y \to X$ der Klasse $\mathcal{C}^2$. Das Differential $d\alpha$ ist wohldefiniert und es gilt: d ist linear,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta\,,\ d(d\omega) = 0 \quad \text{und} \quad d\phi^*\omega = d(\phi^*\omega)\,.$$

Beweis. Seien ϕ_1 und ϕ_2 reguläre Parametrisierungen der Klasse $\mathcal{C}^2$ an x. In einer Umgebung von x gilt

$$\phi_1^{-1,*} d\phi_1^* \alpha = \phi_2^{-1,*} (\phi_1^{-1} \circ \phi_2)^* d\phi_1^* \omega = \phi_2^{-1,*} d(\phi_1^{-1} \circ \phi_2)^* \phi_1^* \omega = \phi_2^{-1,*} d\phi_2^* \omega \,.$$

Damit ist $d\alpha$ wohldefiniert. Die Gleichungen für das Differential folgen aus den lokalen Versionen durch Zurückziehung. □

Bemerkung 3.3.12.

(i). Die Linearität und die Gleichung $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ sind die Axiome einer *graduierten Derivation*. Die Gleichung $d^2 = d \circ d = 0$ macht d zu einem *abstrakten Differential*. Die direkte Summe $\Omega^\bullet(X) = \oplus_{k=0}^{\infty} \Omega^{k,\infty}(X)$ der Differentialformen beliebiger Ordnung und der Differenzierbarkeitsklasse $\mathcal{C}^\infty$ wird damit zu einer *differenziellen graduierten Algebra*. Diese werden in der aktuellen Forschung intensiv benutzt und firmieren oft unter dem Kürzel DGA.

Man beachte weiter, dass d durch die drei Gleichungen im Korollar und die Definition des Differentials von 0-Formen eindeutig bestimmt ist.

(ii). Die Gleichung $d^2 = 0$ liefert auch die gesuchte notwendige algebraische Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $df = \omega$. Denn ist $df = \omega$ und ω der Klasse $\mathcal{C}^1$, so folgt $d\omega = d(df) = 0$. Falls $d\omega \neq 0$, ist die Gleichung also nicht lösbar.

Weiterhin ergibt sich durch die Definition des Differentials für Differentialformen beliebiger Ordnung eine natürliche Verallgemeinerung der Frage nach der Lösbarkeit der Gleichung $df = \omega$ für $\omega \in \Omega^1(X)$. Man kann nämlich die Gleichung $d\alpha = \beta$ für $\beta \in \Omega^k(X)$ für beliebiges k betrachten. Dies führt auf die folgenden Begriffsbildungen.

Definition 3.3.13. Eine k-Form $\omega \in \Omega^k(X)$ der Klasse $\mathcal{C}^1$ heißt *geschlossen*, falls $d\omega = 0$. Eine k-Form $\beta \in \Omega^k(X)$, $k \geqslant 1$, der Klasse $\mathcal{C}^0$ heißt *exakt*, falls es eine $(k-1)$-Form $\alpha \in \Omega^{k-1}(X)$ der Klasse $\mathcal{C}^1$ gibt mit $d\alpha = \beta$.
Um das Verhältnis von Geschlossenheit zu Exaktheit zu klären, müssen wir den Begriff der Homotopie einführen. Seien $f, g : Y \to X$ $\mathcal{C}^q$-Abbildungen. Eine *Homotopie* von f zu g ist eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung $H : [0,1] \times Y \to X$ mit

$$H_0(y) = f(y) \,,\; H_1(y) = g(y) \quad \text{für alle } \; y \in Y \,, \quad \text{wobei} \quad H_t(y) = H(t, y) \,.$$

Da $[0,1] \times Y$ keine Untermannigfaltigkeit mit Rand ist, wenn Y einen Rand hat, gilt es hier zu präzisieren, was unter 'Klasse $\mathcal{C}^q$' zu verstehen ist: Es soll eine Fortsetzung

$$\tilde{H} :]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times Y \to X$$

von H geben, die Klasse $\mathcal{C}^q$ auf der Untermannigfaltigkeit mit Rand $]-\varepsilon, \varepsilon[\times Y$ hat.
Eine Homotopie ist also eine 'Schar' von Abbildungen, die f mit g in q-mal differenzierbarer Weise verbindet. f und g heißen *homotop*, in Zeichen $f \simeq g$, falls es eine Homotopie von f zu g gibt. Die Untermannigfaltigkeit mit Rand X der Klasse $\mathcal{C}^q$ heißt *kontrahierbar* (oder *zusammenziehbar*), falls es eine Homotopie (der Klasse $\mathcal{C}^q$) zwischen id_X und einer konstanten Abbildung $X \to X$ gibt. D.h., es gibt eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung $H : [0,1] \times X \to X$ und ein $x_0 \in X$ mit

$$H(0, x) = x \quad \text{und} \quad H(1, x) = x_0 \quad \text{für alle } \; x \in X \,.$$

Theorem 3.3.14. Seien $f, g : Y \to X$ zwei $\mathcal{C}^2$-Abbildungen von Untermannigfaltigkeiten mit Rand der Klasse $\mathcal{C}^2$. Falls $f \simeq g$ und $\omega \in \Omega^k(X)$ eine geschlossene k-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ ist, so ist die k-Form $f^*\omega - g^*\omega$ exakt. Genauer gilt: Sind ω der Klasse $\mathcal{C}^q$ und f, g der Klasse $\mathcal{C}^{q+1}$, so findet man β der Klasse $\mathcal{C}^q$ mit $d\beta = f^*\omega - g^*\omega$.

Beweis. Sei H eine Homotopie der Klasse $\mathcal{C}^2$ von f zu g. Wir definieren zunächst eine k-Form $\alpha = H^*\omega \in \Omega^k(]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times Y)$. Es gilt $d\alpha = H^*(d\omega) = 0$. Sei $\alpha_t \in \Omega^{k-1}(Y)$ gegeben durch

$$\alpha_t(y)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \alpha(t, y)(1, v_1, \ldots, v_{k-1}) \quad \text{für alle } t \in [0,1],\, y \in Y,\, v_1, \ldots, v_{k-1} \in T_y(Y),$$

wobei $1 \in \mathbb{R} = T_t(]-\varepsilon, 1+\varepsilon[) \subset T_{(t,y)}(Y)$. Definiere weiter $\beta \in \Omega^{k-1}(Y)$ durch

$$\beta(y)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \int_0^1 \alpha_t(y)(v_1, \ldots, v_{k-1})\, dt\,.$$

Ist $\phi : U \to Y$ eine lokale reguläre Parametrisierung von Y, so gilt

$$\begin{aligned}\phi^*\beta(y)(v_1, \ldots, v_{k-1}) &= \beta(\phi(y))\big(T_y(\phi)v_1, \ldots, T_y(\phi)v_{k-1}\big)\\ &= \int_0^1 \alpha(t, \phi(y))\big(T_y(\phi)v_1, \ldots, T_y(\phi)v_{k-1}\big)\, dt = \int_0^1 (\mathrm{id} \times \phi)^*\alpha(t, y)\big(1, v_1, \ldots, v_{k-1}\big)\, dt\,.\end{aligned}$$

Bezeichnet man die Koordinaten von $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times U$ mit t und $x_1, \ldots, x_m$, so hat die Form k-Form $\tilde{\alpha} = (\mathrm{id} \times \phi)^*\alpha \in \Omega^k(]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times U)$ die Darstellung

$$\tilde{\alpha} = \sum_{\#I=k} f_I\, dx_I + \sum_{\#J=k-1} g_J\, dt \wedge dx_J\,.$$

Es gilt die Gleichheit von Tangentialvektoren $1 = \dot{\gamma}(0) \in T_{t,y}(]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times U)$ mit $\gamma(s) = (t+s, y)$. Da $x_j \circ \gamma$ konstant ist für $j = 1, \ldots, m$, folgt $dx_I(t, y)(1, v_1, \ldots, v_{k-1}) = 0$. Somit liefern die f_I keinen Beitrag zu $\phi^*\beta$ und es gilt

$$\phi^*\beta(y) = \sum_{\#J=k-1} \Big(\int_0^1 g_J(t, y)\, dt\Big)\, dx_J(y) \quad \text{für alle } y \in U\,.$$

Insbesondere ist β der Klasse $\mathcal{C}^1$.

Da $d\tilde{\alpha} = 0$, folgt mit $dt \wedge dt = 0$ und $dx_j \wedge dt = -dt \wedge dx_j$

$$0 = \sum_{\#I=k} \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_I}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_I + \sum_{\#I=k} \frac{\partial f_I}{\partial t}\, dt \wedge dx_I - \sum_{\#J=k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_J}{\partial x_j}\, dt \wedge dx_j \wedge dx_J$$

Da $dx_j \wedge dx_I$ und $dt \wedge dx_j \wedge dx_J$ für $j \notin I \cup J$ linear unabhängig sind, folgt

$$\sum_{\#I=k} \frac{\partial f_I}{\partial t}\, dx_I = \sum_{\#J=k-1} \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_J}{\partial x_j}\, dx_j \wedge dx_J\,.$$

Somit

$$d(\phi^*\beta)(y) = \sum_{\#J=k-1} \sum_{j=1}^m \int_0^1 \frac{\partial g_J(t, y)}{\partial x_j}\, dt \cdot dx_j \wedge dx_J = \sum_{\#I=k} \int_0^1 \frac{\partial f_I(t, y)}{\partial t}\, dt \cdot dx_I$$

$$= \sum_{\#I=k} (f_I(1,y) - f_I(0,y)) \cdot dx_I = (1 \times \mathrm{id})^* \tilde{\alpha}(y) - (0 \times \mathrm{id})^* \tilde{\alpha}(y)$$
$$= (1 \times \phi)^* H^* \omega(y) - (1 \times \phi)^* H^* \omega(y) = \phi^*(H_1^* \omega - H_0^* \omega)(y) = \phi^*(g^* \omega - f^* \omega)(y) \,.$$

Hierbei beachte man, dass $t \circ (i \times \mathrm{id})$ konstant ist ($i = 0, 1$), also die g_J keinen Beitrag zu $(i \times \phi)^* \tilde{\alpha}$ liefern. Da ϕ beliebig war und $\phi^*(d\beta) = d(\phi^* \beta)$, gilt also $d\beta = g^* \omega - f^* \omega$. Somit ist diese Form exakt, was zu zeigen war. □

Korollar 3.3.15. Seien $k \geqslant 1$ und X eine kontrahierbare $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist jede geschlossene k-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ exakt.

Beweis. Es gilt $\mathrm{id}_X \simeq x_0$, wobei x_0 die Konstante $X \to X : x \mapsto x_0$ bezeichne. Sei $\omega \in \Omega^k(X)$ eine geschlossene k-Form. Dann ist $\mathrm{id}_X^* \omega - x_0^* \omega$ exakt. Es gilt $\mathrm{id}_X^* \omega = \omega$ und da x_0 konstant ist, gilt $x_0^* \omega = 0$. Es folgt die Behauptung. □

Bemerkung 3.3.16. Das obige Korollar ist als das Lemma von Poincaré bekannt. Da jeder Punkt einer beliebigen $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit eine kontrahierbare offene Umgebung hat (das Bild unter einer regulären Parametrisierung des Schnitts einer offenen Kugel mit einem geschlossenen Halbraum), ist für jede geschlossene k-Form β, $k \geqslant 1$, der Klasse $\mathcal{C}^1$ die Gleichung $d\alpha = \beta$ *lokal* lösbar, aber im allgemeinen nicht *global*, siehe das folgende Beispiel.

Beispiel 3.3.17. Die 1-Form aus Bemerkung 3.1.13, $\omega = (x^2 + y^2)^{-1} \cdot (x\,dy - y\,dx)$, ist, wie wir gesehen haben, nicht exakt. Sie ist aber geschlossen, denn

$$d\omega = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2}\, dx \wedge dy - \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy \wedge dx = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx \wedge dy - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy \wedge dx = 0 \,.$$

Dies zeigt, dass die Konklusion des Poincarésche Lemmas im Falle nicht kontrahierbarer Untermannigfaltigkeiten im allgemeinen falsch ist.

Beispiel 3.3.18. Eine Folgerung aus Theorem 3.3.14 und der Existenz einer nicht-exakten geschlossenen 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ ist der *Brouwer'sche Fixpunktsatz*: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ hat einen Fixpunkt.

Definition 3.3.19. Sei X im Folgenden stets von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$. Die Abweichung von Exaktheit zu Geschlossenheit wird für X wie folgt gemessen. Für $k \geqslant 0$ betrachtet man die Menge der geschlossenen k-Formen,

$$Z^k(X) = \left\{ \omega \in \Omega^k(X) \;\middle|\; \omega \text{ von Klasse } \mathcal{C}^\infty \,, d\omega = 0 \right\} ,$$

sowie für $k \geqslant 1$ die Menge der exakten k-Formen,

$$B^k(X) = \left\{ \beta \in \Omega^k(X) \;\middle|\; \beta \text{ von Klasse } \mathcal{C}^\infty \,, \exists\, \alpha \in \Omega^{k-1}(X) \text{ von Klasse } \mathcal{C}^\infty \,, d\alpha = \beta \right\} .$$

Weiter setzt man $B^0(X) = 0$. Da $d \circ d = 0$, ist $B^k \subset Z^k$, und da d linear ist, sind beides Untervektorräume von $\Omega^k(X)$. Man definiert die k-te *de Rham-Cohomologie* als den Quotientenvektorraum

$$\mathrm{H}^k_{dR}(X) = Z^k(X) / B^k(X) \,.$$

D.h., die Elemente von $\mathrm{H}^k_{dR}(X)$ sind Äquivalenzklassen $[\alpha]$ von geschlossenen k-Formen, wobei

$[\alpha_1] = [\alpha_2]$ genau dann, wenn $\alpha_1 - \alpha_2$ exakt ist. Aus der Definition ist sofort klar, dass

$$\mathrm{H}^k_{dR}(X) = 0 \quad \text{für alle } \; k > m = \dim X \,.$$

Korollar 3.3.20. Sei X wegzusammenhängend. Dann ist $\mathrm{H}^0_{dR}(X) \cong \mathbb{R}$. Ist X kontrahierbar, so gilt $\mathrm{H}^k_{dR}(X) = 0$ für alle $k \geqslant 1$.

Beweis. Mit Lemma 3.1.17, folgt, dass $Z^0(X)$ genau aus den konstanten Funktionen besteht. Damit folgt die erste Aussage. Die zweite Aussage ergibt sich, weil nach Korollar 3.3.15 gilt, dass $B^k(X) = Z^k(X)$ ist für alle $k \geqslant 1$. □

Korollar 3.3.21. Seien $f, g : Y \to X$ und $h : Z \to X$ $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen. Dann induziert f lineare Abbildungen $\mathrm{H}^k(f) : \mathrm{H}^k_{dR}(X) \to \mathrm{H}^k_{dR}(Y)$ durch

$$\mathrm{H}^k(f)([\alpha]) = [f^*\alpha] \quad \text{für alle } \; [\alpha] \in \mathrm{H}^k(X) \,.$$

Es gilt $\mathrm{H}^k(f \circ h) = \mathrm{H}^k(h) \circ \mathrm{H}^k(f)$ und $\mathrm{H}^k(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathrm{H}^k_{dR}(X)}$. Ist $f \simeq g$, so gilt $\mathrm{H}^k(f) = \mathrm{H}^k(g)$.

Beweis. Zunächst ist zu zeigen, dass $\mathrm{H}^k(f)$ wohldefiniert ist. Falls $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, so dass für ein β gilt $\alpha_1 - \alpha_2 = d\beta$, so folgt $f^*\alpha_1 - f^*\alpha_2 = d(f^*\beta)$, also $[f^*\alpha_1] = [f^*\alpha_2]$. Damit ist $\mathrm{H}^k(f)$ wohldefiniert. Die Linearität ist klar, da schon f^* linear ist. Da $(f \circ h)^* = h^* f^*$, folgt die Rechenregel für $\mathrm{H}^k(f \circ h)$. Ebenso $\mathrm{H}^k(\mathrm{id}_X)([\alpha]) = [\mathrm{id}_X^* \alpha] = [\alpha]$.
Sind f und g homotop, so folgt mit Theorem 3.3.14, dass $f^*\alpha - g^*\alpha$ exakt ist, also

$$\mathrm{H}^k(f)([\alpha]) = [f^*\alpha] = [g^*\alpha] = \mathrm{H}^k(g)([\alpha]) \quad \text{für alle } \; [\alpha] \in \mathrm{H}^k(X) \,.$$

Dies war zu zeigen. □

Beispiel 3.3.22. Definiere Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \to \mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus 0$$

durch

$$f(x) = \frac{x}{\|x\|_2} \quad \text{und} \quad g(x) = x \,.$$

Dann gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$, aber $(g \circ f)(x) = \frac{x}{\|x\|_2}$. Es gibt jedoch eine Homotopie $H : g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus 0}$. In der Tat kann man $H : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \setminus 0 \to \mathbb{R}^2 \setminus 0$ definieren durch

$$H_t(x) = H(t,x) = \frac{x}{t + (1-t) \cdot \|x\|_2} \quad \text{für alle } \; t \in [0,1] \,, \, x \in \mathbb{R}^2 \setminus 0 \,.$$

Dann ist H der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ und $H_0 = g \circ f$, $H_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2 \setminus 0}$. Es folgt

$$\mathrm{H}^k(f) \circ \mathrm{H}^k(g) = \mathrm{H}^k(f \circ g) = \mathrm{id}_{\mathrm{H}^k_{dR}(\mathbb{S}^1)} \quad \text{und} \quad \mathrm{H}^k(g) \circ \mathrm{H}^k(f) = \mathrm{H}^k(g \circ f) = \mathrm{id}_{\mathrm{H}^k_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus 0)} \,.$$

Damit ist $\mathrm{H}^k_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \cong \mathrm{H}^k_{dR}(\mathbb{S}^1)$. Insbesondere

$$\mathrm{H}^k_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus 0) = 0 \quad \text{für alle } \; k > 1 \,,$$

so dass jede 2-Form der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ exakt ist. (Alle 2-Formen auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ sind geschlossen.) Weiterhin folgt $\mathrm{H}^1_{dR}(\mathbb{S}^1) \neq 0$, denn für die Form $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ aus Bemerkung 3.1.13 gilt

$0 \neq [\omega] \in \mathrm{H}^1_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$. Es gibt also eine nicht exakte 1-Form auf $\mathbb{S}^1$. (Alle 1-Formen auf $\mathbb{S}^1$ sind geschlossen.) Insbesondere ist $\mathbb{S}^1$ nicht kontrahierbar.

Beispiel 3.3.23. Man zeigt mit Hilfe der 'Mayer-Vietoris-Sequenz' für $n \geqslant 1$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{H}^k(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, n\ , \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere gibt es eine nicht exakte n-Form auf $\mathbb{S}^n$. Daraus folgt der allgemeine *Brouwer'sche Fixpunktsatz*: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ hat einen Fixpunkt.

3.4 Dichten, Orientierungen und Formen

Um später Differentialformen integrieren zu können, müssen wir zunächst ihre nahen Verwandten, die Dichten, einführen, zusammen mit den so genannten Orientierungen, die es erlauben, von Formen zu Dichten zu wechseln. Wie bei der Einführung von Formen machen wir dies erst in einem rein linear algebraischen Rahmen.

Definition 3.4.1. Sei V ein m-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Später ist dann wieder $V = T_x(X)$.) Für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $v = (v_1, \ldots, v_m)$ definiert man $A \cdot v \in V^m$ durch

$$A \cdot v = \left(\sum_{j=1}^m a_{1j} v_j, \ldots, \sum_{j=1}^m a_{mj} v_j \right) .$$

Eine *Dichte* ist eine Abbildung $\rho : V^m \to \mathbb{R}$, so dass für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$ gilt

$$\varrho(A \cdot v) = |\det A| \cdot \varrho(v) \quad \text{für alle } \ A \in \mathbb{R}^{m \times m}\ , \ v \in V^m\ .$$

Die Menge der Dichten auf V wird bezeichnet mit $|\wedge^m V^*|$. Der Grund hierfür wird sofort klar werden.

Lemma 3.4.2. Sei $\omega \in \wedge^m V^*$ eine m-Form. Dann ist $|\omega|$, definiert durch

$$|\omega|(v_1, \ldots, v_m) = |\omega(v_1, \ldots, v_m)| \quad \text{für alle } \ v_1, \ldots, v_m \in V\ ,$$

eine Dichte. Weiterhin ist $|\wedge^m V^*|$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 1 .

Beweis. Dass $|\wedge^m V^*|$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, ist trivial. Sei $b_1, \ldots, b_m$ eine Basis von V . Aus der Definition ist klar, dass $\varrho \in |\wedge^m V^*|$ durch seinen Wert $\varrho(b_1, \ldots, b_m)$ eindeutig bestimmt ist. Denn seien $v_1, \ldots, v_m \in V$. Dann gibt es Skalare $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, so dass

$$v_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_j \quad \text{für alle } \ i = 1, \ldots, m\ .$$

Setzt man $A = (a_{ij})$, so folgt $\varrho(v_1, \ldots, v_m) = \varrho(A \cdot (b_1, \ldots, b_m)) = |\det A| \cdot \varrho(b_1, \ldots, b_m)$. Damit ist $\dim|\wedge^m V^*| \leqslant 1$.
Sei nun $\omega \in \wedge^m V^*$. Dann ist $\omega(A \cdot v) = \det A \cdot \omega(v)$ für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $v \in V^m$. Folglich ist $|\omega|$ eine Dichte. Falls $\omega \neq 0$ ist, ist auch $|\omega| \neq 0$. Da $\dim \wedge^m V^* = \binom{m}{m} = 1$, folgt $\dim|\wedge^m V^*| \geqslant 1$, also die Behauptung. □

Definition 3.4.3. Sei $m = \dim V \geqslant 1$. Eine *Orientierung* von V ist eine *von der Nullabbildung verschiedene* Abbildung $\sigma : V^m \to \{\pm 1, 0\}$ mit der Eigenschaft

$$\sigma(A \cdot v) = \operatorname{sgn}\det A \cdot \sigma(v) \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{m \times m}, v \in V^m .$$

Dabei ist $\operatorname{sgn} x = |x|^{-1} \cdot x$ für $x \neq 0$ und $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Die Menge der Orientierungen von V wird mit $\operatorname{Or}(V)$ bezeichnet.
Für $m = \dim V = 0$ bezeichnet man die konstanten Abbildungen $\pm 1 : V^0 = \mathbb{R} \to \{\pm 1, 0\}$ als Orientierungen.

Lemma 3.4.4. Sei $\sigma \in \operatorname{Or}(V)$. Für $v = (v_1, \ldots, v_m) \in V^m$ gilt genau dann $\sigma(v) \neq 0$, wenn $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von V ist. Ist $m = \dim V \geqslant 1$ und $b = (b_1, \ldots, b_m) \in V^m$ eine (geordnete) Basis von V, so definiert man eine Orientierung σ_b durch

$$\sigma_b(A \cdot b) = \operatorname{sgn}\det A \quad \text{für alle } A \in \mathbb{R}^{m \times m} .$$

Jede Orientierung ist durch ihren Wert auf einer beliebigen, aber festen, geordneten Basis von V eindeutig bestimmt und unabhängig von $m = \dim V$ hat $\operatorname{Or}(V)$ genau zwei Elemente.

Beweis. Sei $b = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von V. Ist $v = (v_1, \ldots, v_m)$ linear abhängig, so gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $\operatorname{rk} A < m$ und $v = A \cdot b$. Es folgt $\sigma(v) = \sigma(A \cdot b) = \operatorname{sgn}\det A \cdot \sigma(b) = 0$. Wäre $\sigma(b) = 0$, so würde $\sigma(v) = 0$ für alle $v \in V^m$ folgen, da es für alle $v \in V^m$ eine Matrix A mit $v = A \cdot b$ gibt. Da σ nicht die Nullabbildung ist, ist $\sigma(b) \neq 0$.
Mit dem gleichen Argument ist σ durch seinen Wert $\sigma(b)$ eindeutig bestimmt. Ist τ eine weitere Orientierung, so gilt $\tau(b) = \pm\sigma(b)$, da ja $\sigma(b), \tau(b) \in \{\pm 1\}$. Folglich ist $\operatorname{Or}(V) = \{\sigma, -\sigma\}$.
Es bleibt zu zeigen, dass für $m = \dim V \geqslant 1$ die angegebene Formel eine Orientierung definiert. Zunächst beachte man, dass für alle $v \in V^m$ die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $A \cdot b = v$ eindeutig bestimmt ist, da sich die Komponenten von v in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basiselemente b_j darstellen lassen. Folglich ist σ_b als Abbildung wohldefiniert. Da $1 \cdot b = b$ für die Einheitmatrix 1, folgt $\sigma_b(b) = 1 \neq 0$. Weiterhin gilt für alle $A, B \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$\sigma_b(B \cdot A \cdot b) = \operatorname{sgn}\det(A \cdot B) = \operatorname{sgn}\det B \cdot \operatorname{sgn}\det A = \operatorname{sgn}\det B \cdot \sigma_b(A \cdot b) .$$

Daher ist σ_b und es folgt die Behauptung. □

Lemma 3.4.5. Sei $\sigma \in \operatorname{Or}(V)$. Dann ist die lineare Abbildung

$$\phi_\sigma : \wedge^m V^* \to |\wedge^m V^*| : \omega \mapsto \sigma \cdot \omega$$

ein Isomorphismus. Ist umgekehrt $\omega \in \wedge^m V^* \setminus 0$, so gibt es genau eine Orientierung $\sigma \in \operatorname{Or}(V)$ mit $\omega = \sigma \cdot |\omega|$.

Beweis. Sei $\omega \in \wedge^m V^*$. Dann gilt für $v \in V^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$

$$\phi_\sigma(A \cdot v) = \sigma(A \cdot v) \cdot \omega(A \cdot v) = \operatorname{sgn}\det A \cdot \det A \cdot \sigma(v) \cdot \omega(v) = |\det A| \cdot \phi_\sigma(v) .$$

Damit ist ϕ_σ wohldefiniert. Es ist klar, dass ϕ_σ linear ist, und sowohl $\wedge^m V^*$ als auch $|\wedge^m V^*|$ sind 1-dimensional, also reicht es zu zeigen, dass $\ker \phi_\sigma = 0$ ist.
Sei $\phi_\sigma(\omega) = 0$ und $b \in V^m$ eine Basis von V. Dann gilt $\sigma(b) \neq 0$ und $\sigma(b) \cdot \omega(b) = \phi_\sigma(\omega)(b) = 0$, also $\omega(b) = 0$. Da ω durch $\omega(b)$ eindeutig bestimmt ist, folgt $\omega = 0$. Damit ist $\ker \phi_\sigma = 0$ und

ϕ_σ folglich ein Isomorphismus.
Sei nun $\omega \in \wedge^m V^* \setminus 0$ und $b \in V^m$ eine orientierte Basis von V. Dann ist $\omega(b) \neq 0$, also $\varkappa = \operatorname{sgn}\omega(b) = \pm 1$. Ist σ eine Orientierung mit $\omega = \sigma \cdot |\omega|$, so folgt $\sigma(b) = \varkappa$. Die Orientierung σ ist durch $\sigma(b)$ eindeutig bestimmt, also folgt $\sigma = \varkappa \cdot \sigma_b$.
Bleibt zu zeigen, dass tatsächlich $\omega = \varkappa\sigma_b \cdot |\omega|$ gilt. Ist $v \in V^m$, so gibt es $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit $v = A \cdot b$. Es folgt

$$\begin{aligned}\omega(v) &= \det A \cdot \omega(b) = \det A \cdot \operatorname{sgn}\omega(b) \cdot |\omega(b)| \\ &= \operatorname{sgn}\det A \cdot \varkappa \cdot \sigma_b(b) \cdot |\det A| \cdot |\omega(b)| = \varkappa\sigma_b(v) \cdot |\omega(v)|\,,\end{aligned}$$

d.h. die Behauptung. □

3.5 Integration von Differentialformen

Definition 3.5.1. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension m und der Klasse $\mathcal{C}^q$, $q \geqslant 1$. Eine *Dichte* auf X ist eine Abbildung

$$\varrho : X \to \bigcup_{x\in X} |\wedge^m T_x^*(X)| \quad \text{mit} \quad \varrho(x) \in |\wedge^m T_x^*(X)| \quad \text{für alle } x \in X\,.$$

D.h., für alle $x \in X$ ist $\varrho(x)$ eine Dichte auf $T_x(X)$. Die Menge der Dichten auf X wird mit $|\Omega|^m(X)$ bezeichnet. Ist $\omega \in \Omega^m(X)$ eine m-Form, so definiert man durch $|\omega|(x) = |\omega(x)|$ für alle $x \in X$ eine Dichte auf X.
Ist $\phi : Y \to X$ eine $\mathcal{C}^q$-Abbildung (Y eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $\dim Y = \dim X = m$ und der Klasse $\mathcal{C}^q$), so definiert man die Dichte $\phi^*\omega \in |\Omega|^m(Y)$ durch

$$\phi^*\omega(y)(v_1, \ldots, v_m) = \omega(\phi(y))\big(T_x(\phi)v_1, \ldots, T_x(\phi)v_m\big)\,.$$

Lemma 3.5.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge mit Rand und $\varrho \in |\Omega|^m(U)$. Dann gibt es genau eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit

$$\varrho = f \cdot |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m|\,.$$

Beweis. Für alle $u \in U$ ist $(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m)(u)$ eine Basis von $\wedge^m T_x^*(U)$. Die Behauptung folgt aus Lemma 3.4.2. □

Definition 3.5.3. Sei U eine m-dimensionale offene Menge mit Rand und $\varrho \in |\Omega|^m(U)$. Dann ist $\varrho = f\,|dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m|$ für ein eindeutig bestimmtes $f : U \to \mathbb{R}$. Man sagt, ϱ sei integrierbar über die messbare Menge $A \subset U$ bzw. stetig, falls dies für f gilt. Ist ϱ integrierbar über $A \subset U$, so definiert man

$$\int_A \varrho = \int_A f(x)\, d\lambda_U(x)\,.$$

Satz 3.5.4. Seien $\phi : V \to U$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus offener Mengen mit Rand und $B \subset V$, $A \subset U$ messbare Mengen mit $\phi(B) = A$. Genau dann ist $\varrho \in |\Omega|^m(U)$ integrierbar über A, wenn $\phi^*\varrho$ integrierbar über B ist. In diesem Fall gilt

$$\int_B \phi^*\varrho = \int_A \varrho\,.$$

Genau dann ist ϕ stetig, wenn dies für $\phi^*\varrho$ gilt.

Beweis. Es gilt mit der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_m$

$$\phi^*\varrho(y)(e_1, \ldots, e_m) = \varrho(\phi(y))(D\phi(y)e_1, \ldots, D\phi(y)e_m) = |\det D\phi(y)| \cdot f(\phi(y)) ,$$

also

$$\phi^*\varrho = |\det D\phi| \cdot f \circ \phi \, |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m| .$$

Die Behauptung folgt nun aus der Transformationsformel (Theorem 1.8.2). □

Der obige Satz ist der Grund, warum es natürlicher ist Dichten zu integrieren als Funktionen. Genauer gesagt erlaubt der Satz eine kanonische (von Wahlen unabhängige) Definition des Integrals von Dichten auf einer Untermannigfaltigkeit.

Definition 3.5.5. Sei X eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension m. Man sagt, eine Dichte $\varrho \in |\Omega|^m(X)$ sei stetig, wenn es an jedem Punkt $x \in X$ eine reguläre Parametrisierung der Klasse $\mathcal{C}^{q+1}$ gibt, so dass $\phi^*\varrho$ der Klasse $\mathcal{C}^q$ ist. Nach dem obigen Satz sind diese Begriffe wohldefiniert, unabhängig von der Wahl lokaler regulärer Parametrisierungen.
Der *Träger* von ϱ ist definiert als der Abschluss der Menge aller Punkte $x \in X$ mit $\varrho(x) \neq 0$,

$$\operatorname{supp} \varrho = \overline{\{x \in X \mid \varrho(x) \neq 0\}} .$$

Ist ϱ stetig und mit kompaktem Träger, so definiert man

$$\int_X \varrho = \sum\nolimits_\alpha \int_{U_\alpha} \phi_\alpha^*(\varphi_\alpha \cdot \varrho) ,$$

wenn $\phi_\alpha : U_\alpha \to X$ eine endliche Familie von regulären Parametrisierungen der Klasse $\mathcal{C}^1$ ist, deren Bilder $\phi_\alpha(U_\alpha)$ $\operatorname{supp} \varrho$ überdecken und (φ_α) eine $\mathcal{C}^1$-Teilung der Eins ist, die dieser Überdeckung untergeordnet ist.

Satz 3.5.6. Das Integral stetiger Dichten mit kompaktem Träger ist wohldefiniert, unabhängig von der Wahl regulärer Parametrisierungen und von Teilungen der Eins. Ist $\phi : Y \to X$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und $\varrho \in |\Omega|^m(X)$ eine stetige Dichte mit kompaktem Träger, so gilt

$$\int_Y \phi^*\varrho = \int_X \varrho .$$

Beweis. Der Beweis ist der gleiche wie für die Wohldefiniertheit des Riemannschen Maßes auf X und wird deswegen nicht ausgeführt. □

Definition 3.5.7. Sei X eine Untermannigfaltigkeit mit Rand. Eine *Orientierung* von X ist eine Abbildung

$$\sigma : X \to \bigcup_{x \in X} \operatorname{Or}(T_x(X)) \quad \text{mit} \quad \sigma(x) \in \operatorname{Or}(T_x(X)) \quad \text{für alle } x \in X .$$

Die Menge aller Orientierungen auf X wird mit $\operatorname{Or}(X)$ bezeichnet. Ist $\phi : Y \to X$ eine $\mathcal{C}^1$-Immersion von m-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten mit Rand, so definiert man die Zurückziehung $\phi^*\sigma \in \operatorname{Or}(Y)$ durch

$$\phi^*\sigma(y)(v_1, \ldots, v_m) = \sigma(\phi(y))\big(T_y(\phi)v_1, \ldots, T_y(\phi)v_m\big) .$$

Sei U eine m-dimensionale offene Menge mit Rand. Dann gibt es wegen Lemma 3.4.5 eine eindeutig bestimmte Orientierung σ_U^+ mit

$$\sigma_U^+ \cdot |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m| = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad \text{auf} \quad U\,,$$

nämlich $\sigma_U^+(u) = \sigma_{e_1,\ldots,e_n}$ für alle $u \in U$. Eine Immersion $\phi : V \to U$ von m-dimensionalen offenen Mengen mit Rand heißt *orientierungstreu*, falls $\phi^*\sigma_U^+ = \sigma_V^+$. Es ist klar, dass ϕ genau dann orientierungstreu ist, wenn $\det D\phi(v) > 0$ für alle $v \in V$ gilt.

Eine Orientierung $\sigma \in X$ heißt *stetig*, falls es eine Überdeckung (V_α) von X und reguläre $\mathcal{C}^1$-Parametrisierungen $\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ gibt, so dass $\phi_\alpha^*\sigma = \sigma_{U_\alpha}^+$ für alle α und $\det D\phi_{\alpha\beta} > 0$ für alle α, β, wobei $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\beta$. Man sagt auch, dass die ϕ_α *orientierungstreu* seien, bzw. dass (V_α, ϕ_α) ein *orientierter Atlas* sei. Ist σ eine stetige Orientierung auf X, so heißt (X, σ) *orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand*. Falls X eine stetige Orientierung besitzt, heißt X *orientierbar*.

Aufgrund von Lemma 3.4.5 ist X orientierbar, falls es eine *nirgends verschwindende* m-Form ω auf X der Klasse $\mathcal{C}^0$ gibt. Dies ist sogar äquivalent zur Orientierbarkeit, wie man mit Teilungen der Eins sieht.

Jede n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand von $\mathbb{R}^n$ ist mit der Einschränkung der Standardorientierung $\sigma^+ = \sigma_{\mathbb{R}^n}^+$ orientiert. Ist die Dimension der Untermannigfaltigkeit $< n$, so ist die Orientierbarkeit nicht immer gegeben.

Satz 3.5.8. Sei X eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Klasse $\mathcal{C}^1$ und $\sigma \in \mathrm{Or}(X)$ eine stetige Orientierung. Dann ist durch

$$\sigma_{\partial X}(x)(v_1, \ldots, v_{m-1}) = \sigma(x)(n_x, v_1, \ldots, v_{m-1}) \quad \text{für alle } x \in \partial X\,,\ v_1, \ldots, v_{m-1} \in T_x(\partial X)$$

eine stetige Orientierung $\sigma_{\partial X}$ auf ∂X definiert.

Lemma 3.5.9. Sei $\phi : U \to V$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, wobei $U, V \subset]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$ offen sind. Falls $\det D\phi > 0$ auf U, gilt für den induzierten $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\bar\phi : \partial U \to \partial V$ ebenfalls $\det D\bar\phi > 0$.

Beweis. Es gilt $\phi(\partial U) \subset \partial V$, also $\phi_j(0, x_2, \ldots, x_m) = 0$ für alle $j \geqslant 2$. Es folgt

$$D\phi(x) = \begin{pmatrix} \partial_1\phi_1(x) & 0 \\ * & D\bar\phi(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det D\phi(x) = \partial_1\phi_1(x) \cdot \det D\bar\phi(x)\,.$$

Weiter ist $\phi_1(x) \leqslant 0$ für alle $x \in U$, also folgt

$$\partial_1\phi_1(x) = \lim_{h \to 0-} \frac{\phi_1(h, x_2, \ldots, x_m)}{h} \geqslant 0\,.$$

Es folgt die Behauptung. □

Beweis von Satz 3.5.8. Da $T_x(X) = \mathbb{R} \cdot n_x \oplus T_x(\partial X)$ für alle $x \in \partial X$, ist $n_x, v_1, \ldots, v_{m-1}$ genau dann eine Basis von $T_x(X)$, wenn $v_1, \ldots, v_{m-1}$ eine Basis von $T_x(\partial X)$ ist. Damit ist $\sigma_{\partial X}(x)$ nicht die Nullabbildung. Ist $A \in \mathbb{R}^{(m-1)\times(m-1)}$, so gilt für

$$\tilde A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\,, \quad \text{dass} \quad \det \tilde A = \det A$$

(Entwicklung nach der ersten Zeile). Es folgt

$$\sigma_{\partial X}(x)\big(A\cdot(v_1,\dots,v_{m-1})\big) = \sigma(x)\big(\tilde{A}\cdot(n_x,v_1,\dots,v_{m-1})\big) = \operatorname{sgn}\det A\cdot\sigma_{\partial X}(x)(v_1,\dots,v_{m-1})\,.$$

Damit ist $\sigma_{\partial X}$ eine Orientierung.

Sei (V_α,ϕ_α) ein orientierter Atlas von X, wobei $U_\alpha = \phi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \subset]-\infty,0]\times\mathbb{R}^{m-1}$ offen sei. Dass man dies annehmen kann, folgt aus Bemerkung 2.1.3. (Hier ist $\det A = 1 > 0$ für $A\in SO(n)$ zu beachten!) Man definiert $\tilde{U}_\alpha = U_\alpha\cap(0\times\mathbb{R}^{m-1})$ wann immer diese Menge $\neq\varnothing$ ist, $\tilde{V}_\alpha = \partial X\cap V_\alpha$ und $\tilde{\phi}_\alpha = \phi_\alpha|\tilde{U}_\alpha : \tilde{U}_\alpha\to\tilde{V}_\alpha$.

Seien $x\in\partial X$ und $y\in\partial U_\alpha$ mit $\phi_\alpha(y) = x$. Es gilt $n_x = c\cdot D\phi_\alpha(y)e_1$ für ein $c>0$. Somit folgt

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_\alpha^*\sigma_{\partial X}(y)(e_2,\dots,e_m) &= \sigma(x)\big(n_x, D\phi_\alpha(y)e_2,\dots,D\phi_\alpha(y)e_m\big)\\ &= \phi_\alpha^*\sigma(x)(e_1,\dots,e_m) = \sigma^+_{U_\alpha}(y)(e_1,\dots,e_m) = 1 = \sigma^+_{\tilde{U}_\alpha}(y)(e_2,\dots,e_m)\,.\end{aligned}$$

Es gilt also $\tilde{\phi}_\alpha^*\sigma_{\partial X} = \sigma^+_{\tilde{U}_\alpha}$ für alle α. Nach Voraussetzung gilt $\det D\phi_{\alpha\beta} > 0$ für alle α,β. Nach dem Lemma ist $\det D\tilde{\phi}_{\alpha\beta} > 0$ und da $\tilde{\phi}_{\alpha\beta} = \tilde{\phi}_\alpha^{-1}\circ\tilde{\phi}_\beta$, folgt, dass $\sigma_{\partial X}$ eine stetige Orientierung auf ∂X ist. □

Nach dem gleichen Prinzip zeigt man den folgenden Satz.

Satz 3.5.10. Sei $X\subset\mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche, d.h. eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $n-1$. Dann ist X genau dann orientierbar, wenn es ein 'stetiges Einheitsnormalenfeld' gibt, d.h. eine $\mathcal{C}^0$-Abbildung $\nu : X\to\mathbb{R}^n$ mit

$$\nu(x)\perp T_x(X) \quad\text{und}\quad \|\nu(x)\|_2 = 1 \quad\text{für alle } x\in X\,.$$

Beweis. Ist ν ein stetiges Einheitsnormalenfeld auf X, so definiert man $\sigma\in\mathrm{Or}(X)$ durch

$$\sigma(x)(v_1,\dots,v_{n-1}) = \operatorname{sgn}\det(\nu(x),v_1,\dots,v_{n-1}) \quad\text{für alle } x\in X,\ v_1,\dots,v_{n-1}\in T_x(X)\,. \qquad (*)$$

Die regulären Parametrisierungen $\phi : U\to X$ mit $\phi^*\sigma = \sigma_U^+$ bilden eine orientierten Atlas nach dem Lemma.

Sei umgekehrt σ eine Orientierung von X. Es ist $T_x(X)^\perp$ eindimensional, also gibt es genau einen Einheitsvektor $\nu(x)\in T_x(X)^\perp$ mit $(*)$. Ist $U\subset\mathbb{R}^n$ offen mit $X\cap U = \{h = 0\}$, wobei $h : U\to\mathbb{R}$ eine Submersion ist, so ist $\operatorname{grad} h\perp T_x(X)$. In man h durch $-h$ ersetzt, kann man $\nu(x) = \|\operatorname{grad} h(x)\|^{-1}\cdot\operatorname{grad} h(x)$ annehmen. Ist ϕ eine reguläre Parametrisierung von X an x mit $\phi^*\sigma = \sigma_V^+$, so sind

$$\sigma(\phi(y))(D\phi(y)e_1,\dots,D\phi(y)e_{n-1}) \quad\text{und}\quad \operatorname{sgn}\det(\operatorname{grad} h(\phi(y)), D\phi(y)e_1,\dots,D\phi(y)e_{n-1})$$

lokal konstant. Es folgt, dass $\nu = \|\operatorname{grad} h\|^{-1}\cdot\operatorname{grad} h$ in einer Umgebung von x, also ist ν stetig. Dies zeigt die Behauptung. □

Beispiel 3.5.11. Mit dem obigen Satz kann man zeigen, dass das Möbiusband eine nicht orientierbare (Hyper-) Fläche in $\mathbb{R}^3$ ist.

Der *Separationssatz von Jordan–Brouwer* besagt, dass jede *kompakte* Hyperfläche ohne Rand von $\mathbb{R}^n$ der Rand eines Kompaktums mit $\mathcal{C}^2$-Rand ist und folglich orientierbar.

Definition 3.5.12. Sei (X,σ) eine orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension m. Für alle $\omega \in \Omega^m(X)$ der Klasse $\mathcal{C}^0$, für die der *Träger*

$$\operatorname{supp}\omega = \overline{\{x \in X \mid \omega(x) \neq 0\}} \subset X$$

kompakt ist, ist $\sigma \cdot \omega$ eine stetige Dichte mit kompaktem Träger und man definiert

$$\int_{(X,\sigma)} \omega = \int_X \sigma \cdot \omega .$$

Zur Abkürzung schreibt man stattdessen auch $\int_X \omega$, obwohl der Wert des Integrals von der Orientierung abhängt.

Ist etwa $X \subset \mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand (z.B. eine offene Menge mit Rand), so ist X mit der Einschränkung σ der Standardorientierung von $\mathbb{R}^n$ orientiert. Ist dann $\omega = f\, dx_1 \wedge \cdots dx_n$ $\mathcal{C}^0$ mit kompaktem Träger, so gilt $\sigma \cdot \omega = f\, |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n|$, also

$$\int_X \omega = \int_{(X,\sigma)} \omega = \int_X f\, d\lambda^n .$$

Eine $\mathcal{C}^1$-Immersion $\phi : Y \to X$ zwischen den orientierten Untermannigfaltigkeiten mit Rand (Y,τ) und (X,σ) der Dimension m heißt *orientierungstreu*, falls $\phi^*\sigma = \tau$.

Satz 3.5.13. Seien (Y,τ) und (X,σ) orientierte Untermannigfaltigkeiten mit Rand der Dimension m und $\phi : Y \to X$ ein $\mathcal{C}^q$-Diffeomorphismus. Dann gilt

$$\int_Y \phi^*\omega = \pm \int_X \omega \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^m(X) \quad \text{der Klasse } C^0 \text{ und mit kompaktem Träger,}$$

wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob ϕ orientierungstreu ist oder orientierungsumkehrend. (Natürlich könnte ϕ weder das eine noch das andere sein, wenn Y nicht wegzusammenhängend ist.)

Beweis. Es gilt $\tau = \pm\phi^*\sigma$, also

$$\tau \cdot \phi^*\omega = \pm\phi^*(\sigma \cdot \omega) .$$

Die Behauptung folgt aus Satz 3.5.6. □

3.6 Der Stokessche Integralsatz

Definition 3.6.1. Für die Menge der k-Formen von Klasse $\mathcal{C}^q$ auf X schreiben wir $\Omega^{k,q}(X)$. Für die Menge diejeniger davon mit kompaktem Träger schreiben wir $\Omega^{k,q}_c(X)$.

Der folgende Satz ist als Stokesscher Integralsatz bekannt.

Theorem 3.6.2. Sei X eine orientierte Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension m und der Klasse $\mathcal{C}^2$. Für alle $\omega \in \Omega^{m-1,1}_c(X)$ gilt

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega .$$

Lemma 3.6.3. Seien $m \geqslant 1$, $H = H_{e_1,0} =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{m-1}$ und $\omega \in \Omega_c^{m-1,1}(H)$. Dann gilt

$$\int_H d\omega = \int_{\partial H} \omega \, .$$

Dabei ist ω auf der rechten Seite als die Einschränkung $\omega|\partial H$ zu verstehen.

Beweis. Da ω eine $(m-1)$-Form ist, gibt es $f_j : H \to \mathbb{R}$ von Klasse $\mathcal{C}^1$ mit

$$\omega = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} f_j \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_m \, .$$

Da die Einschränkungen der Formen $dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_m$ auf ∂H für $j \geqslant 2$ verschwinden (da x_1 auf ∂H konstant ist), ist

$$\omega|\partial H = f_1(0, \sqcup) \cdot dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \, .$$

Weiter gilt

$$d\omega = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \, .$$

Es folgt, da die f_j kompakten Träger haben, mit dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung, dass

$$\begin{aligned}
\int_H d\omega &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_1} \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_m \\
&\quad + \sum_{j=2}^{m} \int_{-\infty}^{0} \int_{\mathbb{R}^{m-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_j(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_j} \, dx_j \, dx_2 \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_m \, dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f_1(0, x_2, \ldots, x_m) \, dx_2 \cdots dx_m = \int_{\partial H} \omega \, ,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Lemma 3.6.4. Sei $U \subset H_{x,a}$ offen und $\omega \in \Omega_c^{k,q}(U)$. Die Fortsetzung ω^0 von ω auf $H_{x,a}$ durch 0 liegt in $\Omega_c^{k,q}(H_{x,a})$. Genauer gesagt gibt es sogar eine Form $\tilde{\omega} \in \Omega_c^{k,q}(\mathbb{R}^m)$ mit $\tilde{\omega}|H_{x,a} = \omega^0$.

Beweis. Sei $K \subset U \subset H_{x,a}$ der kompakte Träger von ω. Es gilt $\omega = \sum_J f_J \, dx_J$. Nach Definition gibt es für jeden Punkt $x \in K$ eine offene Umgebung U_x von x und $\mathcal{C}^q$-Funktionen $\tilde{f}_J^x : U_x \to \mathbb{R}$ mit $f_J^x|U_x \cap U = f_J|U_x \cap U$. Da K kompakt ist, gibt es $x_0, \ldots, x_\ell \in K$, s.d. $U_j = U_{x_j}$ eine Überdeckung von K bilden. Es gibt weiterhin eine $\mathcal{C}^\infty$-Teilung der Eins $(\varphi_j)_{0 \leqslant j \leqslant \ell}$, die der Überdeckung $(U_j)_{0 \leqslant j \leqslant \ell}$ angepasst ist. Definiere für alle $x \in \mathbb{R}^m$

$$\tilde{f}_J^j(x) = \begin{cases} \varphi_j(x) \cdot \tilde{f}_J^{x_j}(x) & x \in U_j \, , \\ 0 & x \notin U_j \, . \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f}_J = \sum_{j=0}^{\ell} \tilde{f}_J^j$ eine $\mathcal{C}^q$-Funktion auf $\mathbb{R}^m$ mit $\tilde{f}_J|U_j \cap U = f_J|U_j \cap U$. Mit $\tilde{\omega} = \sum_J \tilde{f}_J \, dx_J$ folgt die Behauptung, denn nach Voraussetzung gilt für $y \in U \setminus K$, dass $f_J(y) = 0$ und man foglich annehmen kann, dass $f_J^x(y) = 0$ ist für alle $y \in U_x \setminus K$. □

Lemma 3.6.5. Sei U eine m-dimensionale offene Menge mit Rand und $\omega \in \Omega_c^{m-1,1}(U)$. Dann gilt

$$\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega \,.$$

Beweis. Aus Bemerkung 2.1.3 folgt, dass man bis auf einen orientierungserhaltenden affinen Diffeomorphismus annehmen kann, dass U offen in $H_{e_1,0}$ ist. Die Fortsetzung von ω durch 0 auf H ist nach Lemma 3.6.4 eine Form in $\Omega_c^{m-1,1}(H)$. Da $\partial U = U \cap \partial H$, folgt die Behauptung aus Lemma 3.6.3. □

Beweis von Theorem 3.6.2. Da jeder Punkt des Trägers von ω eine offene Umgebung U_α besitzt, die im Bild einer orientierungstreuen regulären Parametrisierung liegt, gibt es eine endliche Überdeckung des Trägers mit solchen U_α. Nach Wahl einer $\mathcal{C}^\infty$-Teilung der Eins kann man annehmen, dass der Träger von ω vollständig in einem U_α liegt.
Sei also U eine m-dimensionale offene Menge mit Rand und $\phi : U \to U_\alpha$ eine orientierungstreue reguläre Parametrisierung. Dann ist induziert ϕ eine orientierungstreue reguläre Parametrisierung von $\partial U_\alpha = \partial X \cap U_\alpha$. Es folgt mit Lemma 3.6.4

$$\int_X d\omega = \int_{U_\alpha} d\omega = \int_U \phi^* d\omega = \int_U d(\phi^*\omega) = \int_{\partial U} \phi^*\omega = \int_{\partial U_\alpha} \omega = \int_{\partial X} \omega \,.$$

Das ist die Behauptung. □

Als Folgerung aus dem Stokesschen Integralsatz können wir nun den Gaußschen Integralsatz beweisen.

Beweis von Theorem 2.4.2. Das Kompaktum K mit $\mathcal{C}^2$-Rand ist eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension n und erhält durch Einschränkung der Standardorientierung $\sigma^+ = \sigma^+_{\mathbb{R}^n}$ von $\mathbb{R}^n$ eine stetige Orientierung. Betrachte die $(n-1)$-Form $\omega = \sum_{j=1}^n v_j \, dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n$, wobei v_j die Komponenten des Vektorfelds v seien. Dann ist $\omega \in \Omega_c^{n-1,1}(K)$ mit

$$d\omega = \operatorname{div}(v) \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

und insbesondere

$$\int \operatorname{div}(v) \, d\lambda_K = \int_K d\omega \,.$$

Es reicht also zu zeigen, dass

$$\int \langle v(x), n_x \rangle \, d\lambda_{\partial K}(x) = \int_{\partial K} \omega \,.$$

Durch Betrachtung einer Teilung der Eins reicht es anzunehmen, dass $\operatorname{supp} v \subset V \cap \partial K$, wobei $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und Definitionsbereich einer $\mathcal{C}^2$-Funktion $k : V \to \mathbb{R}$ mit $V \cap K = \{k \leqslant 0\}$ und $\operatorname{grad} k(x) \neq 0$ für alle $x \in V$ ist.
Wie in Beispiel 2.3.13 kann man durch Vertauschung der Komponenten und Verkleinung von V annehmen, dass $\varkappa = \operatorname{sgn} \partial_n k(x)$ konstant und $\neq 0$ ist. Es gibt eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine $\mathcal{C}^2$-Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, so dass $\partial K \cap (U \times]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[= \{(u, f(u)) \mid u \in U\}$. Damit ist $\phi : U \to \mathbb{R}^n$, $\phi(u) = (u, f(u))$, eine lokale reguläre $\mathcal{C}^2$-Parametrisierung von ∂K. Aus $k \circ \phi = 0$ folgt

$$\partial_j k(\phi(x)) + \partial_n k(\phi(x)) \cdot \partial_j f(x) = 0 \quad \text{für alle } \; j = 1, \ldots, n-1 \,,$$

also
$$\begin{pmatrix} -\operatorname{grad} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\partial_n k(\phi(x))} \cdot \operatorname{grad} k(\phi(x)) \quad \text{für alle } \; x \in U \,.$$
Es folgt an $y = \phi(x)$
$$n_y = \frac{\varkappa}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f(x)\|_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\operatorname{grad} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} \,.$$
Die Karte ϕ verändert die Orientierung um den Faktor
$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\det(n_y, D\phi(x)) &= \varkappa \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} -\operatorname{grad} g(x) & 1_{n-1} \\ 1 & Dg(x) \end{vmatrix} \\ &= \varkappa(-1)^{n-1} \cdot \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 1_{n-1} & -\operatorname{grad} g(x) \\ Dg(x) & 1 \end{vmatrix} = \varkappa \cdot (-1)^{n-1} \,, \end{aligned}$$
also gilt
$$\int_{\partial K} \omega = \varkappa(-1)^{n-1} \cdot \int_U \phi^* \omega \,.$$
Es gilt $x_j \circ \phi = x_j$ für alle $j = 1, \ldots, n-1$ und $x_n \circ \phi = g$. Damit ist
$$\phi^*(dx_j) = \begin{cases} dx_j & j < n \,, \\ df = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx_j & j = n \,, \end{cases}$$
und
$$\phi^*((-1)^{j-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n) = \begin{cases} (-1)^n \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} & j < n \,, \\ (-1)^{n-1}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1} & j = n \,. \end{cases}$$
Somit
$$\begin{aligned} \int_{\partial K} \omega &= -\varkappa \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \int_U v_j \circ \phi \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx_1 \cdots dx_{n-1} + \varkappa \cdot \int_U v_n \circ \phi \, dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ &= \int_U \langle v(\phi(x)), n_{\phi(x)} \rangle \cdot \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} g(x)\|_2^2}\, dx_1 \cdots dx_{n-1} = \int \langle v(x), n_x \rangle \, d\lambda_{\partial K}(x) \,, \end{aligned}$$
nach Beispiel 2.3.13. □

3.7 Anwendungen des Stokesschen Satzes: Abbildungsgrad

Definition 3.7.1. Eine *geschlossene Untermannigfaltigkeit* ist eine kompakte Untermannigfaltigkeit X der Klasse $\mathcal{C}^2$ mit $\partial X = \varnothing$.

Satz 3.7.2. Seien X, Y geschlossene orientierte Untermannigfaltigkeiten, wobei X der Dimension m sei. Sind $f, g : X \to Y$ homotope $\mathcal{C}^2$-Abbildungen und $\omega \in \Omega^m(Y)$ eine geschlossene m-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$, so gilt
$$\int_X f^* \omega = \int_X g^* \omega \,.$$

Lemma 3.7.3. Sei X eine geschlossene orientierte Untermannigfaltigkeit der Dimension m und $\omega \in \Omega^{m-1,1}(X)$. Es gilt $\int_X d\omega = 0$. Inbesondere induziert $\int_X$ eine Linearform $\mathrm{H}^m_{dR}(X) \to \mathbb{R}$, wenn X Klasse $\mathcal{C}^\infty$ hat.

Beweis. Es gilt $\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega = 0$, da $\partial X = \varnothing$. □

Beweis von Satz 3.7.2. Die Form $f^*\omega - g^*\omega$ ist exakt nach Theorem 3.3.14, also folgt die Behauptung aus dem Lemma. □

Beispiel 3.7.4. Sei $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ die bekannte nicht-exakte geschlossene 1-Form auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ und der gleiche Buchstabe bezeichne ihre Einschränkung auf $\mathbb{S}^1$. Da $\int_{\mathbb{S}^1} \omega = 2\pi$ und eine 1-Form α auf $\mathbb{S}^1$ nach Satz 3.1.14 genau dann exakt ist, wenn $\int_{\mathbb{S}^1} \alpha = 0$, induziert $\int_{\mathbb{S}^1}$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^1_{dR}(\mathbb{S}^1) \to \mathbb{R}\,.$$

Die von $[(2\pi)^{-1}\omega]$ erzeugte Untergruppe $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1;\mathbb{Z})$ ist vermöge $\int_{\mathbb{S}^1}$ isomorph zu $\mathbb{Z}$.
Da $\mathrm{H}^n_{dR}(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$ ist und es n-Formen auf $\mathbb{S}^n$ mit nicht-verschwindendem Integral gibt, gibt es eindeutig bestimmte Klasse $c \in \mathrm{H}^n_{dR}(\mathbb{S}^n)$ mit $\int_{\mathbb{S}^n} c = 1$. Die von c erzeugte Untergruppe von $\mathrm{H}^n_{dR}(\mathbb{S}^n)$ wird mit $\mathrm{H}^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z})$ bezeichnet und ist vermöge $\int_{\mathbb{S}^n}$ isomorph zu $\mathbb{Z}$.

Definition 3.7.5. Sei $f : X \to Y$ eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung geschlossener orientierter Untermannigfaltigkeiten der Dimension m. Ist $y \in f(X) \subset Y$ mit $\operatorname{rk} T_x(f) = m$ für alle $x \in X$ mit $y = f(x)$, so heißt y *regulärer Wert* von f. Man definiert den *Index* (oder die *Selbstschnittzahl*) von f an y durch die (endliche) Summe

$$I(f,y) = \sum_{f(x)=y} \sigma_{xy}\,, \quad \text{wobei} \quad \sigma_{xy} = \begin{cases} +1 & T_x(f) : T_x(X) \to T_y(Y) \text{ orientierungtreu,} \\ -1 & T_x(f) : T_x(X) \to T_y(Y) \text{ orientierungsumkehrend.} \end{cases}$$

Die Summe ist endlich, da $f^{-1}(y)$ kompakt ist und wegen des Satzes über die Umkehrfunktion diskret, also endlich. Bildlich gesprochen zählt $I(f,y)$, wie oft (mit der Orientierung gweichtet) die Abbildung f den Wert y durchläuft.

Satz 3.7.6. Sei $f : X \to Y$ und y ein regulärer Wert von f. Es gibt eine Umgebung V von y, so dass $I(f,y) = I(f,z)$ für alle $z \in V$ und

$$\int_X f^*\omega = I(f,y) \cdot \int_Y \omega$$

für jede m-Form $\omega \in \Omega^{m,1}(Y)$ mit $\operatorname{supp}\omega \subset V$.

Beweis. Für alle $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt es eine offene Umgebung $U_x \subset X$ von X, s.d. $f|U_x : U_x \to f(U_x)$ ein Diffeomorphismus ist. Da X kompakt ist, gibt es nur endlich viele solche Punkte. Setze $V = \bigcap_{f(x)=y} f(U_x)$. Dann sind alle $z \in V$ reguläre Werte. Es folgt sofort

$$\int_X f^*\omega = \sum_{f(x)=y} \int_{U_x \cap f^{-1}(V)} f^*\omega = \sum_{f(x)=y} \sigma_{xy} \cdot \int_V \omega = I(f,y) \cdot \int_Y \omega\,.$$

Aus der Formel folgt, dass $I(f,z)$ nicht von der Wahl von $z \in V$ abhängt. □

Korollar 3.7.7. Seien $f,g : X \to Y$ $\mathcal{C}^2$-Abbildungen orientierter geschlossener m-Untermannigfaltigkeiten und y ein gemeinsamer regulärer Wert. Sind f und g homotop, so gilt $I(f,y) = I(g,y)$.

Beweis. Sei V eine offene Umbebung von y wie in Satz 3.7.6. Es gibt eine m-Form $\omega \in \Omega^{m,1}(Y)$ mit $\operatorname{supp}\omega \subset V$ und $\int_X \omega \neq 0$.

$$I(f,y) \cdot \int_X \omega = \int_Y f^*\omega = \int_Y g^*\omega = I(g,y) \cdot \int_X \omega \,,$$

also folgt die Behauptung. □

Definition 3.7.8. Das obige Korollar erlaubt die folgende Definition: Ist $f : X \to Y$ eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung orientierter geschlossener m-Untermannigfaltigkeiten, wobei Y wegzusammenhängend sei. Ist $y \in Y$, so setzt man $I(f,y) = I(g,y)$, wobei g irgendeine zu f homotope Abbildung ist, die y als regulären Wert hat. Die Definition ist von der Wahl von g unabhängig, da Homotopie eine Äquivalenzrelation ist (was wir allerdings nicht bewiesen haben). Da f reguläre Werte besitzt, folgt die Existenz eines solchen g aus dem Isotopielemma (s.u.).
Wegen Satz 3.7.6 ist die Funktion $I_f : y \mapsto I(f,y) : Y \to \mathbb{Z}$ lokal konstant. Folglich ist I_f entlang jedes stetigen Weges konstant. Da Y wegzusammenhängend ist, sind alle bis auf eine dieser Mengen nicht leer und I_f ist konstant. Man kann also den *(Abbildungs-) Grad* von f definieren durch $\deg(f) = I(f,y)$, wobei $y \in Y$ beliebig ist. Intuitiv gesprochen zählt der Grad, wieviele Urbilder ein Wert von f hat.

Lemma 3.7.9. Sei Y eine wegzusammenhängende $\mathcal{C}^q$-Untermannigfaltigkeit (ohne Rand). Zu $y, z \in Y$ gibt es eine $\mathcal{C}^q$-Homotopie $H : Y \times [0,1] \to Y$, so dass $H_0 = \mathrm{id}_Y$, $H_1(y) = z$ und H_t ein Diffeomorphismus ist für alle t. Man kann annehmen, dass außerhalb einer kompakten Umgebung von y gilt $H_t = \mathrm{id}_Y$.

Beweis. Zwei Punkte $y, z \in Y$ seien äquivalent, wenn die Bedingung des Lemmas für sie erfüllt ist. Man sieht leicht ein, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklassen dieser Relation bilden eine Überdeckung von Y. Daher ist man fertig, sobald klar ist, dass die Äquivalenzklassen offen sind. (Denn dann sind die Äquivalenzklassen auch abgeschlossen. Ist γ ein stetiger Weg in X, so sei

$$t = \sup\big\{s \in [0,1] \;\big|\; \gamma(s) \sim \gamma(0)\big\} \,.$$

Dann ist $t > 0$, da die Äquivalenzklasse von $\gamma(0)$ offen ist. Da sie abgeschlossen ist, ist aber $\gamma(t) \sim \gamma(0)$. Wäre $t < 1$, so gäbe es (wieder Offenheit) $t < s \leqslant 1$ mit $\gamma(s) \sim \gamma(0)$. Widerspruch! Also ist $t = 1$ und $\gamma(1) \sim \gamma(0)$. Da Y wegzusammenhängend ist, sind alle Punkte von Y zueinander äquivalent.)
Um dies zu zeigen, kann man annehmen, dass z in einer kleinen Umgebung U_1 von y liegt. Durch Wahl einer Umgebung U_2 von U_1 und Konstruktion von H derart, dass $H_t = \mathrm{id}_Y$ auf $U_2 \setminus U_1$, reicht es H auf U_2 zu konstruieren, da man außerhalb $H_t = \mathrm{id}_Y$ setzen kann. Durch Anwendung lokaler regulärer Parametrisierungen kann man also annehmen, dass $U_2 = \mathbb{R}^k$, $y = 0$ und $z \in \mathbb{R} \times 0_{\mathbb{R}^{m-1}}$.
Sei $\psi : \mathbb{R} \to [0,1]$ $\mathcal{C}^\infty$ mit $\psi = 1$ auf einer Umgebung von 0 und Träger in $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Setze

$$H_t(x_1, \ldots, x_m) = \big(x_1 + t\psi(x_1) \cdots \psi(x_m) z_1, x_2, \ldots, x_n\big) \,.$$

Es ist H_t bijektiv und man rechnet leicht nach, dass $\det H_t'(x) = 1 + t \cdot \psi'(x_1)\psi(x_2) \cdots \psi(x_m) z_1$. Für $|z_1|$ hinreichend klein ist dies für alle $t \in [0,1]$ von Null verschieden, also H_t ein Diffeomorphismus. Dies zeigt, dass jeder Punkt in Y eine Umgebung von äquivalenten Punkten besitzt und folglich die Behauptung. □

Mit dem Lemma ist der Grad einer Abbildung wohldefiniert und es folgt auch das folgende als *Gradformel* bekannte Theorem.

Theorem 3.7.10. Sei $f : X \to Y$ eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung von orientierten geschlossenen m-Untermannigfaltigkeiten, wobei Y zusammenhängend sei. Dann gilt

$$\int_X f^*\omega = \deg(f) \cdot \int_X \omega \quad \text{für alle } \omega \in \Omega^{m,1}(X)\,.$$

Beweis. Sei $y \in Y$ regulärer Wert von f und V eine Umgebung wie in Satz 3.7.6. Für jedes $z \in Y$ gibt es nach dem Isotopielemma einen Diffeomorphismus $h : Y \to Y$ mit $h(y) = z$ und $h \simeq \mathrm{id}_Y$. Da Y kompakt ist, gibt es eine endliche Familie $h_1, \ldots, h_k$ solcher Diffeomorphismen, so dass $h_j(V)$, $j = 1, \ldots, k$, eine Überdeckung von Y bildet. Sei $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ eine dieser Überdeckung untergeordnete Teilung der Eins. Es gilt

$$\begin{aligned}\deg f \cdot \int_Y \omega &= \sum_{j=1}^k \deg f \cdot \int_Y \varphi_j \cdot \omega = \sum_{j=1}^k \deg f \cdot \int_Y h_j^*(\varphi_j \cdot \omega)\\ &= \sum_{j=1}^k \int_X (h_j \circ f)^* h_j^*(\varphi_j \cdot \omega)\end{aligned}$$

Da $h_j \cong \mathrm{id}_Y$, folgt $h_j \circ f \cong f$, also mit Satz 3.7.2:

$$= \sum_{j=1}^k \int_X f^*(\varphi_j \cdot \omega) = \int_X f^*\omega\,.$$

Dies ist die Behauptung. □

Lemma 3.7.11. Seien X, Y Untermannigfaltigkeiten der Klasse $\mathcal{C}^2$, $Y = \partial Z$, wobei Z eine $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $\dim Z = m+1$ sei. Ist $\omega \in \Omega_c^{m,1}(X)$ geschlossen und $f : Y \to X$ eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung, die sich auf Z zu einer $\mathcal{C}^2$-Abbildung $\tilde{f} : Z \to X$ fortsetzen lässt, so gilt

$$\int_Y f^*\omega = 0\,.$$

Beweis. Mit Stokes folgt

$$\int_Y f^*\omega = \int_Z d\tilde{f}^*\omega = \int_Z \tilde{f}^* d\omega = 0\,,$$

also die Behauptung. □

Satz 3.7.12. Sei $f : Y \to X$ eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung von geschlossenen orientierten Untermannigfaltigkeiten der Dimension m, wobei X wegzusammenhängend sei. Ist $Y = \partial Z$, wobei Z eine $(m+1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit Rand sei, auf die sich f zu einer $\mathcal{C}^2$-Abbildung $\tilde{f} : Z \to X$ fortsetzen lasse, so folgt

$$\deg f = 0\,.$$

Beweis. Jede m-Form $\omega \in \Omega^{m,1}(X)$ ist geschlossen, da $\dim X = m$ ist. Aus Lemma 3.7.11 und der Gradformel folgt

$$\deg f \cdot \int_X \omega = \int_Y f^*\omega = 0\,,$$

also die Behauptung. □

Korollar 3.7.13. Sei $K \subset \mathbb{C}$ ein Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand und $p(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, $n \geqslant 1$, ein nicht konstantes Polynom, so dass $p \neq 0$ auf ∂K sei. Dann gilt für

$$f = \frac{f}{|f|} : \partial K \to \mathbb{S}^1 = \big\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \big\} ,$$

dass $\deg f$ die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit) ist, die das Polynom p im Inneren K° von K hat.

Beweis. Seien $z_1, \ldots, z_k$ die Nullstellen von p in K°, ohne Vielfachheit. Man wähle geschlossene Kreisscheiben B_i um z_i mit $B_i \subset K^\circ$ und $B_i \cap B_j = \varnothing$ für alle $i \neq j$. Dann ist

$$L = K \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B_j \quad \text{ein Kompaktum mit } \mathcal{C}^2\text{-Rand} \quad \partial L = \partial K \cup \bigcup_{j=1}^{k} \partial B_j$$

und $\sigma_{\partial L} | \partial B_i = -\sigma_{\partial B_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Da p keine Nullstellen in L hat, ist f auf L fortsetzbar und nach Satz 3.7.12 folgt $\deg f | \partial L = 0$. Aus der Gradformel (oder auch aus der Definition des Abbildungsgrads) folgt

$$\deg f | \partial K - \sum_{j=1}^{k} \deg f | \partial B_i = \deg f | \partial L .$$

Es reicht also zu zeigen, dass für jedes $i = 1, \ldots, k$ gilt: $\deg f | \partial B_i$ ist genau die Vielfachheit der Nullstelle z_i.

Schreibe dazu $p(z) = (z - z_i)^m q(z)$ mit $q(z_i) \neq 0$. Da z_i die einzige Nullstelle von p auf B_i ist, gilt $q \neq 0$ auf B_i. Man kann daher für alle $t \in [0,1]$ und $z \in \partial B_i$ definieren:

$$H_t(z) = \frac{(z - z_i)^m \cdot h_t(z)}{r^m \cdot |h_t(z)|} \quad \text{wobei} \quad h_t(z) = q\big(tz + (1-t) z_i\big)$$

und r der Radius von B_i sei. Dann gilt $H_0 = \frac{p}{|p|} = f$ und

$$H_1(z) = (z - z_i)^m \cdot \frac{q(z_i)}{r^m |q(z_i)|} = c \cdot (z - z_i)^m .$$

Die Zahl $1 \in \mathbb{S}^1$ ist ein regulärer Wert von $H_1 : \partial B_i \to \mathbb{S}^1$ und

$$H_1^{-1}(1) = \big\{ z_i + c^{-1/m} e^{2\pi i k/m} \mid k = 0, \ldots, m-1 \big\} ,$$

$c^{1/m}$ eine beliebige m-te Wurzel von c, hat genau m Elemente. Da DH_1 bis auf eine Streckung eine Rotation und folglich orientierungstreu ist, folgt

$$\deg f | B_i = \deg H_0 = \deg H_1 = m ,$$

also die Behauptung. □

Korollar 3.7.14. Sei p ein komplexes Polynom vom Grad $n \geqslant 1$. Dann hat p genau n Nullstellen (mit Vielfachheit) in $\mathbb{C}$.

Beweis. O.B.d.A. ist $p(z) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$. Für großes $R > 0$ gilt für alle $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geqslant R$, und

$t \in [0,1]$, dass

$$H_t(z) = z^n + t \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \neq 0 \,.$$

Damit ist

$$\deg \frac{p}{|p|} = \deg \frac{z^n}{|z^n|} = n \quad \text{auf} \quad |z| = R \,.$$

Nach Korollar 3.7.14 hat p genau n Nullstellen mit Vielfachheit in $|z| < R$ und keine in $|z| \geqslant R$, also folgt die Behauptung. □

3.8 Anwendungen des Stokesschen Satzes: Elektromagnetismus

Wir betrachten im folgenden als Anwendung der erlernten mathematischen Methoden die Maxwellgleichungen für das elektromagnetische Feld im freien Raum. Alle physikalischen Konstanten (wie die Dielelektritätskostante und die Lichtgeschwindigkeit) werden auf den Wert 1 gesetzt und alle Faktoren von 4π ignoriert.

Definition 3.8.1. Seien E, B, J zeitabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$, d.h. $\mathcal{C}^\infty$-Abbildungen $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, und ϱ ein zeitabhängiges Skalar auf $\mathbb{R}^3$, d.h. eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $\varrho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man sagt, das Tupel (E, B, J, ϱ) erfülle die *Maxwellgleichungen* auf $\mathbb{R}^3$, falls die folgenden Gleichungen gelten:

$$\operatorname{div} E = \varrho \qquad \text{(Gauß'sches Gesetz)} \qquad \text{(a)}$$

$$\operatorname{div} B = 0 \qquad \text{(keine magnetischen Monopole/Quellen)} \qquad \text{(b)}$$

$$\operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \qquad \text{(Faraday'sches Induktionsgesetz)} \qquad \text{(c)}$$

$$\operatorname{rot} B - \frac{\partial E}{\partial t} = J \qquad \text{(Ampère'sches Gesetz)} \qquad \text{(d)}$$

Die Größen E, B, J, ϱ werden wie folgt bezeichnet und interpretiert:

Symbol	Name	Interpretation
E	elektrische Feldstärke	$F = q \cdot E$ ist die Kraft, die auf eine Ladung q im Raum ausgeübt wird
B	magnetische Flussdichte	von bewegten elektrischen Ladungen erzeugter magnetischer Fluss pro Flächenstück, durch das er hindurchfließt; der magnetische Fluss ist das Verhältnis von magnetischer Spannung zu magnetischem Widerstand
J	(freie) elektrische Stromdichte	Verhältnis von Stromstärke zu der Fläche, durch die der Strom fließt
ϱ	(freie) Raumladungsdichte	räumliche Verteilung von Ladung

Um die Maxwellschen Gleichungen zu interpretieren, ist die Integralform der Gleichungen nützlicher. Dazu formulieren wir den klassischen Stokesschen Integralsatz.
Man erinnere sich hierfür an die folgenden Notationen aus der Übung, wobei auf $\mathbb{R}^4$ die Koor-

dinaten x, y, z, t betrachten werden:

$$d\vec{s} = (dx, dy, dz) \qquad \text{(vektorielles Streckenelement)}$$
$$d\vec{S} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy) \qquad \text{(vektorielles Flächenelement)}$$
$$dV = dx \wedge dy \wedge dz \qquad \text{(vektorielles Volumenelement)}$$

Für das Riemannsche Maß auf eine ein-, zwei- bzw. dreidimensionalen Untermannigfaltigkeit (mit oder ohne Rand) von $\mathbb{R}^3$ benutzt man die Notationen ds, dS, dV. (Man beachte, dass das $\int_X f \cdot |dx \wedge dy \wedge dz| = \int_X f(x)\, d\lambda_X(x)$ ist für jede dreidimensionale Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^3$.)

Satz 3.8.2. Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Fläche mit $\mathcal{C}^2$-Rand, d.h. eine kompakte zweidimensionale $\mathcal{C}^2$-Untermannigfaltigkeit mit Rand, orientiert durch ein stetiges Einheitsnormalenfeld $\nu = \nu_A : A \to \mathbb{R}^3$, d.h.

$$\|\nu(x)\| = 1 \quad \text{und} \quad \nu(x) \perp T_x(A) \quad \text{für alle } x \in A\,.$$

Mit $n : \partial A \to \mathbb{R}^3$ sei das äußere Normalenfeld auf dem Rand bezeichnet. Sei $\tau = \tau_A : \partial A \to \mathbb{R}^3$ ein positiv orientiertes Einheitstangentenfeld, d.h.

$$\|\tau(x)\| = 1\,, \quad \tau(x) \in T_x(\partial A) = \langle \nu(x), n_x\rangle^\perp \quad \text{und} \quad \det(\nu(x), n_x, \tau(x)) > 0 \quad \text{für alle } x \in \partial A\,.$$

Dann gilt für alle $\mathcal{C}^2$-Abbildungen $f : A \to \mathbb{R}^3$, dass

$$\int_{\partial A} \langle f, \tau\rangle\, ds = \int_A \langle \operatorname{rot} f, \nu\rangle\, dS\,.$$

Beweis. Sei $\omega = \langle f, d\vec{s}\rangle$. Dann gilt

$$d\omega = \langle \operatorname{rot} f, d\vec{S}\rangle = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{j-1} (\operatorname{rot} f)_j\, dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_j} \cdots dx_3\,,$$

also

$$\int_{\partial A} \langle f, d\vec{s}\rangle = \int_A \langle \operatorname{rot} f, d\vec{S}\rangle$$

nach dem Satz von Stokes und $\int_A \langle \operatorname{rot} f, d\vec{S}\rangle = \int_A \langle \operatorname{rot} f, \nu\rangle\, dS$ nach dem Beweis des Satzes von Gauß. Auf ähnliche Weise wie dort zeigt man $\int_{\partial A} \langle f, d\vec{s}\rangle = \int_{\partial A} \langle f, \tau\rangle\, ds$. (Dies ist einfach das Integral einer 1-Form über disjunkte Vereinigungen geschlossener Kurven!) □

Bemerkung 3.8.3. Nun kann man die Maxwellgleichungen in Integralform bringen und interpretieren.

Gleichung (a) ist nach dem Gauß'schen Integralsatz äquivalent zu

$$\int_{\partial K} \langle E, n\rangle\, dS = \int_K \varrho\, dV$$

für alle Kompakta mit $\mathcal{C}^2$-Rand K. D.h., der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist gleich der Ladung im Inneren.

Gleichung (b) ist nach dem Gauß'schen Integralsatz äquivalent zu

$$\int_{\partial K} \langle B, n\rangle \, dS = 0$$

für alle Kompakta mit $\mathcal{C}^2$-Rand K. D.h., es gibt keinen magnetischen Fluss aus einer geschlossenen Fläche heraus.
Gleichung (c) ist nach dem klassischen Stokes'schen Integralsatz äquivalent zu

$$\int_{\partial A} \langle E, \tau\rangle \, ds = -\frac{d}{dt} \int_A \langle B, \nu\rangle \, dS$$

für alle orientierten kompakten Flächen mit $\mathcal{C}^2$-Rand A. D.h., die um die Schleife ∂A herum induzierte Spannung ist gleich derm Negativen der Veränderung des magnetischen Flusses durch das Inneren der Schleife.
Gleichung (d) ist nach dem klassischen Stokes'schen Integralsatz äquivalent zu

$$\int_{\partial A} \langle B, \tau\rangle \, ds = \frac{d}{dt} \int_A \langle E, \nu\rangle \, dS + \int_A \langle J, \nu\rangle \, dS$$

für alle orientierten kompakten Flächen mit $\mathcal{C}^2$-Rand A. D.h., die magnetische Potenzialdifferenz um die Schleife ist gleich der Summe der Veränderung des elektrischen Flusses durch das Innere mit dem Strom durch das Innere. Insbesondere ist für konstantes E die magnetische Potenzialdifferenz um die Schleife gleich dem Strom durch ihr Inneres.

Definition 3.8.4. In der speziellen Relativitätstheorie betrachtet man die *Minkowski-Metrik* g, d.i. die symmetrische nicht ausgeartete Bilinearform g auf $\mathbb{R}^4$, definiert durch

$$g(u, v) = u^t \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} v \quad \text{für alle } \; u, v \in \mathbb{R}^4 .$$

Dies ist eine Form vom Index $\operatorname{ind} g = 1$.
Die Lorentztransformationen, die die Beobachterwechsel in der speziellen Relativitätstheorie beschreiben, bilden die *Lorentz-* oder *Poincarégruppe*

$$\mathcal{L} = \mathrm{SO}(3,1) = \left\{ h \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R}) \;\middle|\; \det h > 0 \,,\, g(hu, hv) = g(u, v) \text{ für alle } \; u, v \in \mathbb{R}^4 \right\} .$$

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass die Maxwellgleichungen invariant unter dem Beobachterwechsel in der speziellen Relativitätstheorie sind, d.h. unter den $h \in \mathcal{L}$. Dafür muss man die Maxwellgleichungen statt mit zeitabhängigen Vektorfeldern im Raum mit einer Differentialform auf der 'Raumzeit' $\mathbb{R}^4$ schreiben. Wir benötigen dazu den Hodge-Sternoperator, den wir sogleich einführen werden.

Satz 3.8.5. Sei V ein m-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, g eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V und $\sigma \in \mathrm{Or}(V)$. Dann gibt es genau einen linearen Isomorphismus

$$* : \wedge^k V^* \to \wedge^{m-k} V^* ,$$

der die folgende Bedingung erfüllt: Es gilt

$$*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = c_1 \cdots c_k \cdot e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_m$$

für jede Basis $v_1, \ldots, v_m$ von V mit dualer Basis $e_1, \ldots, e_m$ von V^*, so dass $v_1, \ldots, v_m$ g-orthonormal ist, d.h.

$$g(v_i, v_j) = c_i \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j\,,$$

wobei $c_i = \pm 1$, und positiv orientiert bzgl. σ, d.h. $\sigma(v_1, \ldots, v_m) = 1$.
Dann heißt $*$ Hodge-Sternoperator und hat die folgenden Eigenschaften:

1. Ist $\mathrm{vol}_g = *(1)$ (beachte $1 \in \mathbb{R} = \wedge^0 V^*$), so wird durch $\alpha \wedge *\beta = g(\alpha, \beta) \cdot \mathrm{vol}_g$ für alle $\alpha, \beta \in \wedge^k V^*$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform g auf $\wedge^k V^*$ erklärt.
2. Es gilt $** = (-1)^{\mathrm{ind}\, g + k(n-k)}$ auf $\wedge^k V^*$, wobei $\mathrm{ind}\, g = \#\{i \mid c_i = -1\}$ der Index von g ist.

Beispiel 3.8.6. Es ist offensichtlich, wie sich $*$ nun auf Differentialformen auf einer offenen Menge mit Rand in $V = \mathbb{R}^m$ fortsetzt.
Sei $V = \mathbb{R}^4$ und betrachte für g die Minkowski-Metrik und für σ die Standardorientierung. Punktweise bilden dx, dy, dz, dt die duale Basis zur Standardbasis $e_1, \ldots, e_4$. Die Standardbasis ist g-orthnormal mit $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ und $c_4 = -1$ und positiv orientiert. Es gilt $\mathrm{ind}\, g = 1$.
Es folgt für $k = 0$: $** = -1$ und

$$\mathrm{vol}_g = *(1) = dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt\,.$$

Für $k = 1$ ist $** = 1$ und

$$*dx = dy \wedge dz \wedge dt\,,\ *dy = -dx \wedge dz \wedge dt = dz \wedge dx \wedge dt\,,\ *dz = dx \wedge dy \wedge dt\,,\ *dt = dx \wedge dy \wedge dz\,,$$

zusammenfassend also $*d\vec{s} = d\vec{S} \wedge dt$, $*dt = dV$.
Für $k = 2$ ist $** = -1$ und

$$*(dx \wedge dy) = dz \wedge dt\,,\ *(dx \wedge dz) = -dy \wedge dt\,,\ *(dx \wedge dt) = -dy \wedge dz\,.$$

Es folgt $*d\vec{S} = d\vec{s} \wedge dt$, $*(d\vec{s} \wedge dt) = -d\vec{S}$.
Damit ist $*$ auf den Differentialformen von $\mathbb{R}^4$ schon eindeutig bestimmt.

Satz 3.8.7.

(i). Sind E, B zeitabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$, so gibt es genau eine 2-Form $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ mit

$$\langle E, d\vec{s}\rangle = -i_{\partial_t} F \quad \text{und} \quad \langle B, d\vec{s}\rangle = -i_{\partial_t} *F\,.$$

Dabei ist für alle $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^4)$ und alle Vektorfelder $v : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die Form $i_v\omega \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^4)$ definiert durch

$$(i_v\omega)(p)(v_1, \ldots, v_{k-1}) = \omega(p)(v(p), v_1, \ldots, v_{k-1})$$

und mit ∂_t bezeichnet man das konstante Vektorfeld $v(x, y, z, t) = e_4$.
F heißt Faraday-2-Form. Für F und $*F$ gilt

$$F = \langle B, d\vec{S}\rangle + \langle E, d\vec{s}\rangle \wedge dt \quad \text{und} \quad *F = \langle B, d\vec{s}\rangle \wedge dt - \langle E, d\vec{S}\rangle\,.$$

(ii). Ist J ein zeitabhängiges Vektorfeld auf $\mathbb{R}^4$ und ϱ ein zeitabhängiges Skalar, so gibt es genau eine 1-Form $j \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ mit

$$\varrho = -i_{\partial_t} j \quad \text{und} \quad \langle J, d\vec{S}\rangle = i_{\partial_t} {*j} \, .$$

j heißt Quellen-1-Form. Es gilt

$$j = \langle J, d\vec{s}\rangle - \varrho \, dt \, .$$

Beweis von (i). Seien $F_i = (F_{i1}, F_{i2}, F_{i3})$, $i = 1, 2$, gegeben mit

$$F = \langle F_1, d\vec{S}\rangle + \langle F_2, d\vec{s}\rangle \wedge dt \, .$$

Dann folgt $*F = \langle F_1, d\vec{s}\rangle \wedge dt - \langle F_2, d\vec{S}\rangle$, sowie

$$-i_{\partial_t} F = \langle F_2, d\vec{s}\rangle \quad \text{und} \quad - i_{\partial_t} {*F} = \langle F_1, d\vec{s}\rangle \, .$$

Damit folgt $F_1 = E$ und $F_2 = B$.

Beweis von (ii). Sei $j = j_1 \, dx + j_2 \, dy + j_3 \, dz + j_4 \, dt$. Dann gilt $i_{\partial_t} j = j_4 = -\varrho$. Weiterhin ist $*j = \langle (j_1, j_2, j_3), d\vec{S}\rangle \wedge dt - \varrho \, dV$, also $i_{\partial_t} {*j} = \langle (j_1, j_2, j_3), d\vec{S}\rangle$. Es folgt $j = \langle J, d\vec{s}\rangle - \varrho \, dt$. — □

Theorem 3.8.8. Seien E, B, J zeitabhängige Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$, ϱ ein zeitabhängiges Skalar auf $\mathbb{R}^3$. Dann erfüllen (E, B, J, ϱ) die Maxwellgleichungen genau dann, wenn für die zugehörige Faraday-2-Form F und die Quellen-1-Form j gilt

$$dF = 0 \quad \text{und} \quad {*d{*F}} = j \, .$$

Letzteres nennen wir die Maxwellgleichungen für (F, j) .

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} dF &= d\langle B, d\vec{S}\rangle + d\big(\langle E, d\vec{s}\rangle \wedge dt\big) = \operatorname{div} B \, dV + dt \wedge \Big\langle \frac{\partial B}{\partial t}, d\vec{S}\Big\rangle + d\langle E, d\vec{s}\rangle \wedge dt \\ &= \operatorname{div} B \, dV + \Big\langle \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t}, d\vec{S}\Big\rangle \wedge dt \, . \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Rollen von E und B folgt

$$d{*F} = -\operatorname{div} E \, dV + \Big\langle \operatorname{rot} B - \frac{\partial E}{\partial t}, d\vec{S}\Big\rangle \wedge dt \, ,$$

also

$${*d{*F}} = -\operatorname{div} E \, dt + \Big\langle \operatorname{rot} B - \frac{\partial E}{\partial t}, d\vec{s}\Big\rangle \, .$$

Somit ist $dF = 0$ genau dann, wenn die Gleichungen (b) und (c) gelten, und ${*d{*F}} = j$ genau dann, wenn die Gleichungen (a) und (d) gelten. Der erstere Gleichungssatz wird deswegen auch der *homogene*, der letztere als der *inhomogene* Teil der Maxwellgleichungen bezeichnet. — □

Die Umformulierung der Maxwellgleichungen hat viele Konsequenzen. Wir formulieren einige unmittelbare als Korollare.

Korollar 3.8.9. Die Maxwellgleichungen sind Lorentz-invariant. D.h., für alle $\varphi \in \mathcal{L}$ und $F' = \varphi^* F$, $j' = \varphi^* j$ gilt: Genau dann erfüllen (F, j) die Maxwellgleichungen, wenn dies für (F', j') gilt.

Lemma 3.8.10. Sei V ein orientierter $\mathbb{R}$-Vektorraum und g eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform. Ist $A : V \to V$ ein g-orthogonaler linearer Automorphismus, d.h.

$$g(Au, Av) = g(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in V\ ,$$

so gilt $*(A^*\omega) = \pm A^*(*\omega)$ für alle $\omega \in \wedge^k V^*$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob A orientierungstreu oder orientierungsumkehrend ist.

Beweis. Sei $e_1, \dots, e_m$ dual zu der positiv orientierten g-Orthonormalbasis $v_1, \dots, v_m$ von V. Dann ist $g(Av_i, Av_j) = g(v_i, v_j) = c_i\delta_{ij}$, also $Av_1, \dots, Av_m$ eine g-Orthonormalbasis mit dualer Basis $A^*e_1, \dots, A^*e_m$. Ist $\varepsilon = \sigma(Av_1, \dots, Av_m)$, so folgt

$$\begin{aligned} *A^*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) &= *(A^*e_1 \wedge \cdots \wedge A^*e_k) \\ &= \varepsilon c_1 \cdots c_k \cdot A^*e_{k+1} \wedge \cdots \wedge A^*e_m = \varepsilon A^*(*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k))\ . \end{aligned}$$

□

Beweis von Korollar 3.8.9. Es reicht eine Implikation zu beweisen, da mit φ auch $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}$ ist. Es gilt

$$d\varphi^*F = \varphi^*dF \quad \text{und} \quad *d*\varphi^*F = \varphi^*(*d*F)\ ,$$

also folgt die Behauptung. □

Korollar 3.8.11. Sei K ein Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand. Erfüllen (E, B, J, ϱ) die inhomogene Maxwellgleichung, so gilt für $Q = \int_K \varrho\, dV$ die so genannte 'Stetigkeits-Gleichung'

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\partial K} \langle J, \nu \rangle\, dS\ ,$$

d.h. der Stromfluss aus der geschlossenen Fläche K ist gleich der Veränderungsrate der Gesamtladung im Inneren.

Beweis. Übung. □

Korollar 3.8.12. Seien Formen (F, j) gegeben, die die inhomogene Maxwellgleichung erfüllen. Dann gilt die *Ladungserhaltung*: Für jede geschlossene (orientierte) Hyperfläche $M \subset \mathbb{R}^4$ gilt für die Gesamtladungsveränderung

$$\int_M *j = 0\ .$$

(Die 3-Form $*j$ beschreibt den raumzeitlichen Ladungsfluss.)

Beweis. Es gilt mit Stokes

$$\int_M *j = \int_M d*F = 0\ ,$$

da M randlos ist. □

3.8.1 Elektromagnetisches Potenzial und Wellengleichung

3.8.13. Da $\mathbb{R}^4$ kontrahierbar ist, ist nach dem Poincaréschen Lemma die Gleichung $dF = 0$ äquivalent zu $F = dG$ für eine 1-Form $G \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$. G wird als *elektromagnetisches Potenzial* bezeichnet. G ist natürlich nicht eindeutig, sondern nur eindeutig bis auf Transformationen der Form $G \mapsto G + df$ für eine Funktion f. Dies bezeichnet man als *Eichfreiheit*.

Ist $F = dG$, so sind die homogenen Maxwellgleichungen erfüllt und die inhomogenen sind äquivalent zu $\delta dG = j$, wobei $\delta = *d*$.
Schreibt man $G = \langle A, d\vec{s}\rangle + \phi\, dt$, so heißen A und ϕ respektive magnetisches und elektrisches Potenzial. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\delta dG &= *d*\big(\langle \operatorname{rot} A, d\vec{S}\rangle - \langle \partial_t A, d\vec{s}\rangle \wedge dt + \langle \operatorname{grad}\phi, d\vec{s}\rangle \wedge dt\big)\\ &= *d\big(\langle \operatorname{rot} A, d\vec{s}\rangle \wedge dt + \langle \partial_t A, d\vec{S}\rangle - \langle \operatorname{grad}\phi, d\vec{S}\rangle\big)\\ &*\big(\operatorname{rot}\operatorname{rot} A\big) d\vec{S} \wedge dt + \operatorname{div}\partial_t A\, dV + \langle \partial_t^2 A, d\vec{S}\rangle \wedge dt - \Delta\phi\, dV - \langle \partial_t \operatorname{grad}\phi, d\vec{S}\rangle \wedge dt\\ &= \langle \operatorname{rot}\operatorname{rot} A + \partial_t^2 A - \partial_t \operatorname{grad}\phi, d\vec{s}\rangle + (\operatorname{div}\partial_t A - \Delta\phi)\, dt\end{aligned}$$

wobei $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ der Laplaceoperator ist.
Auf den ersten Blick ist die Gleichung $\delta dG = 0$ also unübersichtlich. Man betrachtet auch

$$\begin{aligned}d\delta G &= d*d\big(\langle A, d\vec{S}\rangle \wedge dt + \phi\, dV\big) = d*\big(\operatorname{div} A\, dV \wedge dt - \partial_t\phi\, dV \wedge dt\big)\\ &= d(-\operatorname{div} A + \partial_t\phi) = \langle \operatorname{grad}(-\operatorname{div} A + \partial_t\phi), d\vec{s}\rangle + \partial_t(-\operatorname{div} A + \partial_t\phi)\, dt\,.\end{aligned}$$

Da $\operatorname{rot}\operatorname{rot} A = \operatorname{grad}\operatorname{div} A - \Delta A$ (wobei Δ komponentenweise angewandt wird, ergibt sich

$$(d\delta + \delta d)G = -\Box G = \langle -\Box A, d\vec{s}\rangle - \Box\phi\, dt\,,$$

wobei $\Box = \Delta - \partial_t^2$ der *Wellenoperator* ist, komponentenweise angewandt. ($d\delta + \delta d$ heißt Laplace–de Rham-Operator für die Metrik g.)
Ist also $\delta G = 0$, so ist die Maxwellgleichung zu der (inhomogenen) *Wellengleichung* äquivalent,

$$\Box A = (\Delta - \partial_t^2)A = -J\,,\ \Box\phi = (\Delta - \partial_t^2)\phi = \varrho\,.$$

Ist $G = G_0 + df$, wobei G_0 ein elektromagnetisches Potenzial ist, so ist $\delta G = 0$ äquivalent zu $\Box f = \delta df = -\delta G_0$. Somit ist das Lösen der Maxwellgleichungen äquivalent zur Lösung von fünf inhomogenen Wellengleichungen.

3.8.2 Maxwellgleichung im Vakuum

3.8.14. Der Spezialfall der Maxwellgleichungen im *Vakuum*, d.h. $J = 0$ und $\varrho = 0$, führt auf das Studium der homogenen Wellengleichung

$$\Box u = (\Delta - \partial_t^2)u = 0$$

für eine gesuchte Funktion u auf $\mathbb{R}^4$.
Für den Spezialfall, dass u nur von t und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängt (sphärische Welle), gibt es Lösungen der Form

$$u(r,t) = \frac{\varphi(r-t)}{r} + \frac{\psi(r+t)}{r}$$

für beliebige Funktionen φ und ψ. Ist etwa $\psi = 0$, so verhält sich die Lösung u wie eine kugelsymmetrische Wellenfront: Es gibt ein gewisses Abklingverhalten, abgesehen von dem das Verhalten von u im Abstand $r = r_0$ zur Punktquelle der Welle ($r = 0$) im Abstand $r = r_1$ nach einem gewissen Zeitversatz das gleiche ist.

Allgemein hat für gegebene Anfangsbedingungen $u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)$ und $\partial_t u(x,y,z,0) = \psi(x,y,z)$ die Wellengleichung in $t > 0$ die eindeutige Lösung

$$u(x,y,z,t) = tM_t(\varphi)(x,y,z) + \partial_t\big(tM_t(\psi)(x,y,z)\big)\ ,$$

wobei

$$M_r(f)(x,y,z) = \frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r^2(x,y,z)} f\,dS$$

der sphärische Mittelwert von f ist.
Insbesondere hängt der Wert von u an der Stelle (x_0,y_0,z_0,t_0) nur ab von dem Verhalten der Anfangswerte φ und ψ auf

$$\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = t_0^2\right\}\ .$$

Dies ist der Schnitt des *Rückwärts-Lichtkegels*

$$\Gamma^-(x_0,y_0,z_0,t_0) = \left\{(x,y,z,t) \;\middle|\; t_0 \geqslant t\,,\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - (t-t_0)^2 \leqslant 0\right\}$$

mit $\{t = 0\}$. Jede von Anfangsbedingungen φ und ψ mit kompakten Träger in $\{t = 0\}$ ausgelöste Welle hat eine vordere und hintere Wellenfront und verhält sich in jedem Punkt der Wellenfront wie eine Kugelwelle (*Huygens'sches Prinzip*).

3.8.3 Statischer Fall

3.8.15. Man betrachte den Fall, dass das elektromagnische Feld statisch ist, d.h. zeitunabhängig ist. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass für ein gegebenes Potenzial $G = \langle A, d\vec{s}\rangle + \phi\,dt$ die Maxwellgleichungen äquivalent sind zu den (inhomogenen) Laplacegleichungen

$$\Delta A = -J\ ,\ \Delta\phi = \varrho\ .$$

Satz 3.8.16. Seien ϱ und J zeitunabhängig und mit kompaktem Träger in $\mathbb{R}^3$. Falls E und B im Unendlichen verschwinden, sind die Lösungen der statischen Maxwellgleichungen eindeutig bestimmt und gegeben durch die Newtonpotenziale

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\cdot\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\varrho(u,v,w)}{\|(x,y,z)-(u,v,w)\|}\,dV(u,v,w)$$

und

$$A(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\int_{\mathbb{R}^3}\frac{J(u,v,w)}{\|(x,y,z)-(u,v,w)\|}\,dV(u,v,w)\ .$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz, da wir für die Eindeutigkeit auf den Satz von Liouville für harmonische Funktionen zurückgreifen müssen, den wir aber nur für holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ (in der Übung) bewiesen haben.
Offenbar reicht es, die Aussage für ϕ zu beweisen. Mit dem Lebesgueschen Differenzierbarkeitssatz und partieller Integration folgt

$$\Delta\phi(x) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\Delta\varrho(y)}{\|x-y\|}\,dV(y)\ .$$

Sei $g(y) = \|x-y\|^{-1}$. Man rechnet nach, dass

$$\operatorname{grad} g(y) = \frac{x-y}{\|x-y\|^3} \quad \text{und} \quad \Delta g = 0\,.$$

Seien $R > r > 0$ derart, dass $\mathbb{S}^2_R(x) \cap \operatorname{supp} \varrho = \varnothing$. Mit der von $U_{R,r} = \mathbb{B}^3_R(x) \setminus \mathbb{B}^3_r(x)^\circ$ induzierten Randorientierung gilt $n_y = \frac{x-y}{r}$ für $y \in \mathbb{S}^2_r(x)$. Aus der Greenschen Formel Korollar 2.4.6 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\int_{U_{R,r}} \Delta\rho(y) f(y)\, dV(y) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2_r(x)} \big(f(y)\partial_\nu \varrho(y) - \varrho(y)\partial_\nu f(y)\big)\, dS(y) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2_r(x)} \left(\frac{(\operatorname{grad}\varrho(y)|x-y)}{r^2} - \frac{\varrho(y) r^2}{r^4}\right) dS(y) \\
&= \frac{1}{4\pi r^2}\int_{\mathbb{S}^2_r(x)} \big((\operatorname{grad}\varrho(y)|x-y) - \varrho(y)\big)\, dS(y)\,.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\left|\frac{1}{4\pi r^2}\int_{\mathbb{S}^2_r(x)} (\operatorname{grad}\varrho(y)|x-y)\, dS(y)\right| \leqslant r \cdot \sup\nolimits_{\|x-y\|=r} \|\operatorname{grad}\varrho(y)\| \to 0 \qquad (r \to 0+)$$

und

$$\varrho(x) = \lim\nolimits_{r\to 0+} \frac{1}{4\pi r}\int_{\mathbb{S}^2_r(x)} \varrho(y)\, dS(y)\,,$$

also ist $\Delta\phi = \varrho$.

Um die Eindeutigkeit von $F = dG$ zu sehen, reicht es, aus $\varrho = 0$ zu schließen, dass ϕ konstant ist. Die partiellen Ableitungen $\partial_i\phi$ sind harmonisch ($\Delta\partial_i\phi = 0$) und verschwinden im Unendlichen, da $E = \operatorname{grad}\phi$ nach Voraussetzung im Unendlichen verschwindet. Der Satz von Liouville für harmonische Funktionen impliziert dann, dass $\operatorname{grad}\phi$ konstant ist. Da er im Unendlichen verschwindet, folgt $\operatorname{grad}\phi = 0$. Somit muss aber ϕ konstant sein. □

4 Übungsaufgaben und Lösungen

4.1 Übungsaufgaben

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1.1
Sei (X, d) ein lokal kompakter metrischer Raum und $Y \subset X$. Zeigen Sie: Y ist mit der von X induzierten Metrik lokal kompakt genau dann, wenn es eine offene Menge $U \subset X$ und eine abgeschlossene Menge $A \subset X$ gibt, so dass $Y = A \cap U$. (Man sagt in diesem Fall, Y sei *lokal abgeschlossen*.)
Hinweis: Man beweise, dass für $y \in Y$ und $r > 0$ derart, dass $B_{2r}^{Y}(y)$ kompakt ist, gilt, dass

$$B_r^{Y\circ}(y) = \overline{Y} \cap B_r^{X\circ}(y) \, .$$

Aufgabe 1.2
Es sei X ein metrischer Raum. Zeigen Sie:

(a). Sei X lokal kompakt und $f : X \to [0, \infty]$ eine beliebige Funktion. Genau dann ist die Menge $\{f > 0\} = f^{-1}]0, \infty]$ in einem σ-kompakten Teilraum von X enthalten, wenn es $g_k \in \mathcal{C}_c(X)$, $g_k \geqslant 0$, gibt mit $f \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} g_k$.

(b). Ist jede abgeschlossene Kugel in X kompakt, so ist X σ-kompakt.

(c). Ist X diskret, d.h. für alle $x \in X$ gibt es $r > 0$ mit $B_r(x) = \{x\}$, so ist X genau dann σ-kompakt, wenn abzählbar.

(d). Sei X σ-kompakt und $Y \subset X$ abgeschlossen. Ist Y als metrischer Raum mit der induzierten Metrik σ-kompakt? Beweisen oder widerlegen Sie dies!

(e). Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}$ keine überabzählbare diskrete Teilmenge enthält.

(f). Sei X lokal kompakt und separabel. Zeigen Sie, dass jede offene Teilmenge $U \subset X$ σ-kompakt ist.

Aufgabe 1.3
Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Metrik nicht lokal kompakt ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine Folge rationaler Zahlen, die gegen eine irrationale Zahl konvergiert. Überlegen Sie sich, dass *alle* metrischen Kugeln in $\mathbb{Q}$ kompakt wären, wenn $\mathbb{Q}$ lokal kompakt wäre.

Aufgabenblatt 2

Aufgabe 2.1
Sei $\varrho : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ stetig und λ_ϱ das Riemann-Stieltjes-Elementarintegral.

(a). Sei (x_k) eine endliche oder unendliche Folge reeller Zahlen und $f \in \mathcal{F}(X)$ durch $f(x) = \sum_k \delta_{x_k x}$ definiert. Zeigen Sie, dass f λ_ϱ-integrierbar ist mit $\|f\|_1 = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie den "$\frac{\varepsilon}{2^k}$-Trick" aus dem Beweis von Satz 1.1.12 (ii).

(b). Seien $a \geqslant b$ reelle Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$1_{]a,b[}\,,\; 1_{]a,b]}\,,\; 1_{[a,b[}\,,\; 1_{[a,b]} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda_\varrho)$$

λ_ϱ-integrierbar sind mit

$$\int 1_{]a,b[}\, d\lambda_\varrho = \int 1_{]a,b]}\, d\lambda_\varrho = \int 1_{[a,b[}\, d\lambda_\varrho = \int 1_{[a,b]}\, d\lambda_\varrho = \int_a^b \varrho(x)\, dx\,.$$

Aufgabe 2.2
Seien $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \log\Big(\frac{1}{1-x}\Big) & 0 < x < 1\,, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot \log(1+x) & 0 < x < 1\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie durch Reihenentwicklung, dass f und g λ-integrierbar sind mit

$$\int f\, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \,\Big(= \frac{\pi^2}{6}\Big) \quad \text{und} \quad \int g\, d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \,\Big(= \frac{\pi^2}{12}\Big)\,.$$

Aufgabe 2.3
Zeigen Sie, dass für $x > 0$ das Integral $\Gamma(x) = \int_{[0,\infty[} t^{x-1} e^{-t}\, d\lambda(t)$ wohldefiniert ist, und dass gilt

$$\Gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{k! \cdot k^x}{x(x+1)\cdots(x+k)}\,.$$

Hinweis: Man betrachte die Funktionenfolge $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \geqslant 1$,

$$f_k(t) = \begin{cases} t^{x-1} \cdot \Big(1 - \frac{t}{k}\Big)^k & 0 < t < k\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1

(a). Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(t) = \Big(\int_0^t e^{-x^2}\, dx\Big)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}\, dx\,,$$

konstant ist. Folgern Sie, dass die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{-x^2}$ λ-integrierbar ist mit

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, d\lambda(x) = \sqrt{\pi}\,.$$

(b). Zeigen Sie, dass für $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$ die Funktionen

$$f_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,,\ f_t(x) = e^{-e^{2it}x^2}$$

λ-integrierbar sind und dass die Funktion

$$F : \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\to \mathbb{C}\,,\ F(t) = \int_{\mathbb{R}} f_t(x)\, d\lambda(x)$$

das AWP

$$F' = -i \cdot F\,,\ F(0) = \sqrt{\pi} \quad \text{löst.}$$

Folgern Sie $F(t) = \sqrt{\pi} \cdot e^{-it}$.

(c). Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses aus (ii) die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(ax^2)\, d\lambda(x) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \sin(ax^2)\, d\lambda(x) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 3.2
Beweisen oder widerlegen Sie jede der sechs möglichen Implikationen zwischen den folgenden drei Aussagen für eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a). f ist λ-fast überall stetig.

(b). Es gibt eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f = g$ λ-fast überall.

(c). Es gibt eine λ-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$, so dass die Einschränkung $f|(\mathbb{R} \setminus N)$ stetig ist.

Aufgabe 3.3
Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei

$$1_{a,b} = \begin{cases} 1_{[a,b[} & a \leqslant b\,, \\ -1_{[b,a[} & a > b\,. \end{cases}$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $1_{[a,b]} \cdot f$ integrierbar sei für alle $a < b$. Man definiert

$$F(x) = \int 1_{0,x} \cdot f\, d\lambda\,.$$

Zeigen Sie: Es gilt $\int 1_{a,b} f\, d\lambda = F(b) - F(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und falls f im Punkte $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, ist F in x differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$.

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 4.1
Ziel dieser Aufgabe ist es, eine nicht integrierbare (und folglich nicht messbare) Teilmenge von $[0,1]$ zu konstruieren.

(a). Zeigen Sie: Jede Nebenklasse $[x] = x + \mathbb{Q} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ hat einen Repräsentanten in $[0,1]$.

(b). Folgern Sie, dass es eine Menge $R \subset [0,1]$ gibt, so dass die Einschränkung der kanonischen Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q} : x \mapsto [x]$ bijektiv ist. (D.h. R ist ein Repräsentantensystem.)

(c). Zeigen Sie: Für die Menge R gilt

$$[0,1] \subset R + \mathbb{Q} \cap [-1,1] \subset [-1,2] .$$

(d). Führen Sie die Annahme, R sei λ-integrierbar, zum Widerspruch.

Hinweis: Es gilt $\lambda(R+q) = \lambda(R)$ für alle $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Wenden Sie Satz 1.3.9 an, um $\lambda(R + \mathbb{Q} \cap [-1,1])$ zu berechnen.

Aufgabe 4.2
Benutzen Sie den Satz von Fubini (Theorem 1.7.2) um zu zeigen, dass

$$\lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} .$$

Hinweise:

(a). Beweisen und verwenden Sie, dass $\int_0^\infty e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

(b). Um die Integrierbarkeit von $\sin x \cdot e^{-xy}$ zu zeigen, schätzen Sie für $x \in [0,1]$ und $x \in [1,r]$ unterschiedlich ab.

(c). Um $\int_0^r \sin x \cdot e^{-xy}\, dx$ zu berechnen, betrachten Sie $e^{(i-y)\cdot x}$.

(d). Beachten Sie, dass $\frac{\sin x}{x}$ nicht über ganz $[0,\infty[$ λ-integrierbar ist!

Aufgabe 4.3
Man betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & (x,y) = (0,0) \text{ oder } (x,y) \notin]-1,1[^2 . \end{cases}$$

Zeigen Sie: Die sukzessiven Integrale von f existieren und stimmen überein, aber die Funktion f ist nicht $\lambda^2 = \lambda \otimes \lambda$-integrierbar.

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 5.1
Seien $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Sei P das von den Vektoren (v_j) aufgespannte Parallelotop,

$$P = \left\{ x = \sum_{j=1}^{n} t_j \cdot v_j \;\middle|\; t_j \in [0,1] \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n \right\}.$$

Zeigen Sie: Das Maß (also das n-dimensionale Volumen) von P ist

$$\lambda(P) = |\det(v_1, \dots, v_n)|.$$

Hinweis: Stellen Sie P als lineares Bild von $[0,1]^n$ dar und wenden Sie die Transformationsformel an.

Aufgabe 5.2
Die 'Polarkoordinaten-Abbildung'

$$\varphi :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\times]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[^{n-2} \to \mathbb{R}^n \setminus (]-\infty,0] \times 0 \times \mathbb{R}^{n-2})$$
$$\varphi(r, t_2, \dots, t_n) = r \cdot \big(\cos t_n \cdots \cos t_2, \cos t_n \cdots \cos t_3 \cdot \sin t_2, \cos t_n \cdots \cos t_4 \cdot \sin t_3, \dots, \sin t_n\big)$$

ist ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, deren Komplement eine Nullmenge ist. Es gilt

$$\det \varphi(r, t_2, \dots, t_n) = r^{n-1} \cdot \cos^{n-2} t_n \cdot \cos^{n-3} t_{n-1} \cdots \cos t_3.$$

Ziel der Aufgabe ist es zu zeigen, dass das Maß der abgeschlossenen Kugel mit Radius $r > 0$, $\mathbb{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leqslant r\}$ gerade

$$\lambda^n(\mathbb{B}_r) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\big(\frac{n}{2}+1\big)} \cdot r^n \quad \text{ist, insbesondere} \quad \lambda^2(\mathbb{B}_r) = \pi \cdot r^2.$$

Dabei ist Γ die bekannte Funktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$ $(x > 0)$.

(a). Zeigen Sie mit der Transformationsformel, dass

$$\lambda^n(\mathbb{B}_r) = \frac{2^{n-1}\pi r^n}{n} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} \int_0^{\pi/2} \sin^j t\, dt.$$

(b). Zeigen Sie, dass die Zahlen $A_j = \int_0^{\pi/2} \sin^j t\, dt$ der Rekursionsgleichung

$$A_0 = \frac{\pi}{2}, \; A_1 = 1 \quad \text{und} \quad A_{j+2} = \frac{\frac{j}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{j}{2}+1} \cdot A_j \quad \text{genügen.}$$

(c). Folgern Sie mit Hilfe der Gleichungen $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, dass $A_j = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{j+2}{2}\right)}$.

(d). Schließen Sie nun auf die Formel für $\lambda^n(\mathbb{B}_r)$.

Aufgabe 5.3
Die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-x}\,dt$ ist wegen $\Gamma(n+1) = n!$ eine Verallgemeinerung der Fakultätfunktion. Für $p, q > 0$ führt man die Eulersche Betafunktion

$$B(p,q) = \int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{q-1}\,ds \quad \text{ein.}$$

Zeigen Sie, dass

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad \text{für alle } \; p, q > 0\,.$$

(Diese Gleichung bedeutet, dass B eine Verallgemeinerung der Binomialkoeffizienten ist.)
Hinweise:

(a). Verwenden Sie die Substitutionen $r = \sqrt{t}$ und $s = \sin^2\theta$, um das Produkt $\frac{1}{4}B(p,q)\Gamma(p+q)$ als ein Doppelintegral zu schreiben.

(b). Wenden Sie die Transformationsformel mit der Polarkoordinaten-Abbildung

$$\varphi :]0,\infty[\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \text{an.}$$

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 6.1
Es seien $0 < r < R$ und K der Kugelring

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r \leqslant \|x\|_2 \leqslant R \right\}.$$

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_K \frac{d\lambda^3(x)}{\|x - x_0\|_2}\,.$$

Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\|x_0\|_2 < r$, $r \leqslant \|x_0\|_2 \leqslant R$ und $\|x_0\|_2 > R$.

Aufgabe 6.2
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite symmetrische Matrix.

(a). Zeigen Sie, dass $A = B^2$ für eine weitere positiv definite symmetrische Matrix.

(b). Berechnen Sie das n-dimensionale Volumen (d.h. das Maß bzgl. λ^n) des Ellipsoids

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; (x : Ax) \leqslant 1 \right\}.$$

(c). Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x:Ax)}\,dx\,.$$

Aufgabe 6.3
Sei $0 < r < R$. Der Volltorus T kommt durch Rotation der Kreisscheibe

$$K = \{(u,0,v) \mid (u-R)^2 + v^2 \leqslant r^2\}$$

um die z-Achse zustande, d.h.

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}, 0, z) \in K\} .$$

Berechnen sie $\lambda^3(T)$.
Hinweis: Wandeln Sie die räumlichen Polarkoordinaten geeignet ab.

Aufgabenblatt 7

Aufgabe 7.1
Zeigen Sie, dass der Volltorus $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}, 0, z) \in K\}$ aus der 6. Präsenzaufgabe, wobei $K = \{(x,0,y) \mid x^2 + (y-R)^2 \leqslant r^2\}$ und $0 < r < R$, eine Untermannigfaltigkeit mit Rand ist. Bestimmen Sie die Dimension $\dim T$, den Rand ∂T, sowie die Tangentialräume $T_x(T)$, $x \in T$, und $T_x(\partial T)$, $x \in \partial T$.

Aufgabe 7.2
Die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x,y,z) = x^2 + xy - y - z \quad \text{und} \quad g(x,y,z) = 2x^2 + 3xy - 2y - 3z .$$

Zeigen Sie, dass

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = g(x,y,z) = 0\}$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ von $\mathbb{R}^3$ ist und dass die Abbildung

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (t, t^2, t^3)$$

an jedem Punkt von X eine reguläre Parametrisierung (der Klasse $\mathcal{C}^\infty$) ist. Bestimmen Sie für alle $x \in C$ den Tangentialraum $T_x(C)$.

Aufgabe 7.3

(a). Sei

$$\mathbb{T}^2 = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1 = z^2 + w^2\}$$

das direkte Produkt von zwei Kreislinien. Zeigen Sie, dass $\mathbb{T}^2$ eine UMF der Dimension 2 ist.

(b). Finden Sie eine stetig differenzierbare Bijektion $\partial T \to \mathbb{T}^2$, wobei T der Volltorus sei. (Man kann zeigen, dass die Abbildung ein Diffeomorphismus ist.)

Aufgabenblatt 8

Aufgabe 8.1
Seien X und Y zwei Untermannigfaltigkeiten mit Rand der Klasse $\mathcal{C}^q$, wobei der Rand $\partial Y = \varnothing$ ist. Zeigen Sie: $X \times Y$ ist eine Untermannigfaltigkeit mit Rand $\partial X \times Y$ der Klasse $\mathcal{C}^q$ und der Dimension $\dim X + \dim Y$, sowie, dass für alle $(x,y) \in X \times Y$ gilt

$$T_{(x,y)}(X \times Y) = T_x(X) \oplus T_y(Y) \ .$$

(Die Aussage ist falsch, wenn X und Y beide einen nicht-verschwindenden Rand besitzen!)

Aufgabe 8.2
Sei $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 = z^2 < 1\right\}$. Zeigen Sie, dass K eine Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist und berechnen Sie das 2-dimensionale Volumen von K.

Aufgabe 8.3
Sei T der bekannte Volltorus

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-R)^2 + y^2 + z^2 = r^2\right\}$$

mit den Radien $0 < r < R$. Berechnen Sie die Oberfläche $\mathrm{vol}_2(\partial T)$ auf zwei verschiedene Weisen: **erstens** durch das Studium der lokalen regulären Parametrisierung

$$\phi :]-\pi,\pi[^2 \to \mathbb{R}^2 : (s,t) \mapsto \big((R + r\cos t)\cos s, (R + r\cos t)\sin s, r\sin t\big) \ ,$$

zweitens unter Verwendung des Diffeomorphismus $\varphi : \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \partial T$, $\varphi(u,v,x,y) = \big((R+rx)u, (R+rx)v, ry\big)$. Man beachte dabei

$$\mathbb{T}^2 = \left\{(u,v,x,y) \in \mathbb{R}^4 \mid u^2 + v^2 = 1 = x^2 + y^2\right\}$$

und

$$\partial T = \left\{(xu, xv, y) \mid (x-R)^2 + y^2 = r \ , \ u^2 + v^2 = 1\right\} \ .$$

Anleitung zum zweiten Teil:

(a). Sei $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : (u,v,x,y) \mapsto ((R+rx)u, (R+rx)v, ry)$. Man bestimme

$$A = D\tilde{\varphi}(u,v,x,y)^t D\tilde{\varphi}(u,v,x,y) \quad \text{für alle } \ (u,v,x,y) \in \mathbb{T}^2$$

als 4×4-Matrix.

(b). Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums

$$V = T_{(u,v,x,y)}(\mathbb{T}^2) \subset \mathbb{R}^4 \ ,$$

am besten eine, die aus Eigenvektoren des Endomorphismus $A|V$ besteht.

(c). Berechnen Sie die Determinante des Endomorphismus $A|V : V \to V$.

(d). Es gilt $T_{(u,v,x,y)}(\varphi)^t T_{(u,v,x,y)}(\varphi) = A|V$. Berechnen Sie damit das zweidimensionale Volumen von ∂T.

Aufgabenblatt 9

Aufgabe 9.1
Sei $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. E stelle das elektrische Feld (elektrischer Fluss in Ortsabhängigkeit) dar. Der Zusammenhang zur Ladungsdichte (Ladung in Abhängigkeit vom Ort) $\varrho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist $\operatorname{div} E = \varrho$. Nun beschreibe ϱ die Ladungsverteilung einer homogen geladenen Kugelschale vom Radius R, d.h. $\|E\|$ ist rotationssymmetrisch, $E(x)$ ist für $x \neq 0$ proportional zur äuSSeren Normalen eine Kugel mit Radius $\|x\|$ an x und es gibt $\varepsilon > 0$, so dass $\varrho(x) = 0$ falls $|\|x\| - R| \geqslant \varepsilon$.

(a). Zeigen Sie, dass das elektrische Feld im Inneren der Kugelschale hinreichend weit vom Rand verschwindet.

(b). Zeigen Sie, dass für das elektrische Feld außerhalb einer Umgebung der Kugelschale gilt:

$$E(x) = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \frac{x}{r} ,$$

wobei $r = \|x\|$, $Q = Q(R + \varepsilon)$ die Gesamtladung der Kugelschale ist und

$$Q(r) = \int_{\mathbb{B}^3_r(0)} \rho \, d\lambda^3 .$$

D.h., außerhalb der Kugelschale verhält sich das elektrische Feld wie nach Coulombschem Gesetz bei einer Punktladung.

Aufgabe 9.2

(a). Es seien X eine Untermannigfaltigkeit mit Rand und $f : X \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion auf X. Zeigen Sie: für jede $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : [a, b] \to X$ gilt

$$\int_\gamma df = \int_{[a,b]} \gamma^*(df) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) .$$

(b). Es sei ω die Differentialform auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, gegeben durch

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} .$$

Weiterhin seien $r > 0$, $n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \setminus 0$ die Kurve

$$\gamma_n(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi nt) \\ \sin(2\pi nt) \end{pmatrix} .$$

Bestimmen Sie $\gamma_n^*\omega$ und $\int_{\gamma_n} \omega = \int_{[0,1]} \gamma_n^*\omega$.

(c). Folgern Sie, dass es keine $\mathcal{C}^1$-Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \to \mathbb{R}$ mit $df = \omega$ gibt.

Aufgabe 9.3
Sei $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die Kurve $\alpha(t) = \left(e^{t \sin t}, t^2 - 2\pi t, \cos \frac{t}{2}\right)$. Berechnen Sie das Integral $\int_\alpha \omega$ für die Differentialformen erster Ordnung $\omega = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ und $\omega = z\,dy$ auf $\mathbb{R}^3$. Dabei bezeichnen x, y, z die Koordinatenfunktionen auf $\mathbb{R}^3$.

Aufgabenblatt 10

Aufgabe 10.1
Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen mit Rand und *sternförmig* bzgl. des Nullpunktes, d.h.

$$x \in U\,,\; s \in [0,1] \;\Rightarrow\; s \cdot x \in U\,.$$

Sei $\omega \in \Omega^1(U)$, $\omega = \sum_{j=1}^m f_j\,dx_j$, der Klasse $\mathcal{C}^1$ und *geschlossen*, d.h.

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \text{für alle } i, j = 1, \ldots, m\,.$$

Zeigen Sie: ω ist *exakt*, d.h., es gibt $f : U \to \mathbb{R}$, stetig differenzierbar, so dass $df = \omega$.

Anleitung:

(a). Man zeige $\int_\gamma \omega = 0$ für alle geschlossenen stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurven γ.

(b). Dazu beweise man $\frac{d}{ds} \int_{\gamma_s} f = 0$, wobei $\gamma_s(t) = s\gamma(t)$.

(c). In (b) nehme man zunächst an, dass γ $\mathcal{C}^1$ ist und zeige durch partielle Integration

$$\int_0^1 f_i(s\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)\,dt = -\sum_{j=1}^m \int_0^1 \frac{\partial f_i(s\gamma(t))}{\partial x_j} \cdot s\dot{\gamma}_j(t)\gamma_i(t)\,dt\,.$$

Überzeugen Sie sich anschließend davon, dass dies auch für stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurven γ richtig ist.

Aufgabe 10.2
Sei $U \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ offen. Unter einer *komplexwertigen Differentialform erster Ordnung* versteht man eine Summe $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ mit $\omega_j \in \Omega^1(U)$. Wenn $f : U \to \mathbb{C}$ $\mathcal{C}^1$ ist, definiert man $df = d(\operatorname{Re} f) + i d(\operatorname{Im} f)$. Insbesondere ist für $z = x + iy$ das Differential $dz = dx + idy$ definiert.
Eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph*, falls $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$. Zeigen Sie:

(a). f ist genau dann holomorph, wenn $df = g\,dz$ für ein stetiges $g : U \to \mathbb{C}$, genau dann, wenn $f\,dz$ geschlossen ist.

(b). Sind $f, g : U \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist $f \cdot g$ holomorph. Ist $f \neq 0$ überall und holomorph, so ist auch $1/f$ holomorph.

(c). Ist U sternförmig bezüglich des Nullpunktes, so ist $\int_\gamma f\,dz = 0$ für alle geschlossenen stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurven γ.

Aufgabe 10.3
Sei $p(z) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ mit $a_j \in \mathbb{C}$ und $n \geqslant 1$ ein nicht-konstantes Polynom.
Beweisen Sie den *Fundamentalsatz der Algebra*: Das Polynom p hat eine komplexe Nullstelle.
Anleitung:

(a). Nehmen Sie an, dass $p(z) \neq 0$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$. Folgern Sie: $\int_\gamma f\,dz = 0$ für $f(z) = \frac{z^{n-1}}{p(z)}$ und für alle geschlossenen $\mathcal{C}^1$-Kurven γ in $\mathbb{C}$.

(b). Zeigen Sie $\int_\gamma f\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,dt$ für alle $\mathcal{C}^1$-Kurven $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$. (Dabei ist f sogar eine beliebige stetige Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.)

(c). Betrachten Sie für $r > 0$ die Kurve $\gamma_1(t) = re^{2\pi i t} = (r\cos 2\pi t, r \sin 2\pi t)$. Lassen Sie $r \to \infty$ laufen und folgern Sie, dass $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_1} f\,dz = 2\pi i$ ist.

Aufgabenblatt 11

Aufgabe 11.1
In $\mathbb{R}^3$ führt man die folgenden Notationen ein:

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= (dx, dy, dz) \quad \text{(‘vektorielles Streckenelement’)} \\ d\vec{S} &= (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy) \quad \text{(‘vektorielles Flächenelement’)} \\ dV &= dx \wedge dy \wedge dz \quad \text{(‘Volumenelement’)} \end{aligned}$$

D.h., es gilt $d\vec{s} \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)^3$, $d\vec{S} \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)^3$ und $dV \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$. Seien $U \subset \mathbb{R}^3$ offen mit Rand, $f : U \to \mathbb{R}$ und $u, v, w : U \to \mathbb{R}^3$ der Klasse $\mathcal{C}^1$.

(a). Zeigen Sie, dass

$$df = \operatorname{grad} f \bullet d\vec{s}\,, \ d(v \bullet d\vec{s}) = \operatorname{rot} v \bullet d\vec{S} \quad \text{und} \quad d(v \bullet d\vec{S}) = \operatorname{div} v \cdot dV\,.$$

Dabei bezeichnet $\bullet$ das Standardskalarprodukt,

$$(f_1, f_2, f_3) \bullet (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{j=1}^{3} f_j \cdot \omega_j\,,$$

und

$$\operatorname{rot} v = \Big(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\Big)\,.$$

(b). Zeigen Sie, dass

$$\begin{gathered} (u \bullet d\vec{s}) \wedge (v \bullet d\vec{s}) = (u \times v) \bullet d\vec{S}\,,\ (u \bullet d\vec{s}) \wedge (v \bullet d\vec{S}) = (u \bullet v) \cdot dV \\ \text{und} \quad (u \bullet d\vec{s}) \wedge (v \bullet d\vec{s}) \wedge (w \bullet d\vec{s}) = \det(u, v, w) \cdot dV\,. \end{gathered}$$

Aufgabe 11.2
In $\mathbb{R}^3$ sei die 2-Form ω gegeben durch $\omega = 2xz\,dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)\,dx \wedge dy$. Zeigen Sie, dass $d\omega = 0$ ist und finden Sie $\eta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ mit $d\eta = \omega$.

Hinweis: Machen Sie einen geeigneten Ansatz für η_2 ($\eta = \eta_1\,dx + \eta_2\,dy + \eta_3\,dz$).

Aufgabe 11.3
Sei $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ eine $\mathcal{C}^1$-Selbstabbildung der Einheitskreisscheibe in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie den *Brouwer'schen Fixpunktsatz*: f besitzt einen Fixpunkt.
Anleitung:

(a). Nehmen Sie an, dass f keinen Fixpunkt hat und betrachten Sie

$$H(t,x) = x - tf(x) \quad \text{für alle } \; x \in \mathbb{B}\,,\; t \in [0,1]\,.$$

(b). Folgern Sie zur Herleitung eines Widerspruchs, dass

$$\omega = (x^2 + y^2)^{-1}(y\,dx - x\,dy) \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus 0)$$

exakt ist.

Können Sie die obige Aussage in dem Fall, dass f nur als stetig vorausgesetzt wird, aus der Aussage für stetig differenzierbares f herleiten?
Hinweis: Nehmen Sie auch hier zunächst an, dass f keinen Fixpunkt hat.

Aufgabenblatt 12

Aufgabe 12.1
Sei X eine UMF mit Rand. Betrachten Sie die Abbildungen $f : X \times \mathbb{R}^n \to X$, $f(x,y) = x$, und $g : X \to X \times \mathbb{R}^n$, $g(x) = (x,0)$.

(a). Zeigen Sie, dass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{X \times \mathbb{R}^n}$.

(b). Folgern Sie, dass $\mathrm{H}^k_{dR}(X \times \mathbb{R}^n) \cong \mathrm{H}^k_{dR}(X)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 12.2
Seien X eine UMF mit Rand der Klasse $\mathcal{C}^\infty$, (U_1, U_2) eine offene Überdeckung von X und $k \geqslant 0$. Betrachten Sie die linearen Abbildungen

$$\Omega^{k,\infty}(X) \xrightarrow{\phi} \Omega^{k,\infty}(U_1) \times \Omega^{k,\infty}(U_2) \xrightarrow{\psi} \Omega^{k,\infty}(U_1 \cap U_2)\,,$$

gegeben durch $\phi(\omega) = \big(\omega|U_1, \omega|U_2\big)$ und $\psi(\alpha,\beta) = \alpha|U_1 \cap U_2 - \beta|U_1 \cap U_2$. (Dabei steht $\omega|U$ für die Einschränkung von ω und $\Omega^{k,\infty}$ für Formen der Klasse $\mathcal{C}^\infty$.)

(a). Zeigen Sie, dass ϕ injektiv und ψ surjektiv ist, sowie, dass $\ker\psi = \mathrm{bild}\,\phi$.

Hinweis: Zur Surjektivität von ψ betrachten Sie eine (U_1, U_2) untergeordnete Teilung der Eins, d.h. $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen φ_j, $\operatorname{supp}\varphi_j \subset U_j$, $1 = \varphi_1 + \varphi_2$.

(b). Zeigen Sie, dass ϕ und ψ lineare Abbildungen

$$\mathrm{H}^k_{dR}(X) \xrightarrow{\phi_k} \mathrm{H}^k_{dR}(U_1) \times \mathrm{H}^k_{dR}(U_2) \xrightarrow{\psi_k} H^k(U_1 \cap U_2)$$

induzieren, für die $\ker \psi_k = \operatorname{bild} \phi_k$ gilt.

(c). Man definiert für $k \geqslant 1$

$$\delta_{k-1} : \mathrm{H}^{k-1}_{dR}(U_1 \cap U_2) \to \mathrm{H}^k_{dR}(X) \quad \text{durch} \quad \delta_{k-1}([\alpha]) = [\beta]\,,$$

wobei $\phi(\beta) = (d\alpha_1, d\alpha_2)$ mit $\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha$. Zeigen Sie, dass δ_{k-1} wohldefiniert und linear ist mit

$$\ker \delta_{k-1} = \operatorname{bild} \psi_{k-1} \quad \text{und} \quad \operatorname{bild} \delta_{k-1} = \ker \phi_k\,.$$

(d). Sei $X = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-dimensionale Einheitssphäre und sei eine offene Überdeckung von $\mathbb{S}^n$ gegeben durch

$$U_1 = \left\{x \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; x_{n+1} > -\tfrac{1}{2}\right\} \quad \text{und} \quad U_2 = \left\{x \in \mathbb{S}^n \;\middle|\; x_{n+1} < \tfrac{1}{2}\right\}.$$

Dann ist $U_1 \cap U_2$ diffeomorph zu $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass für alle $n \geqslant 1$

$$\mathrm{H}^k_{dR}(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, n\,, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Interpretieren Sie diese Aussage im Hinblick auf die Exaktheit geschlossener Differentialformen auf $\mathbb{S}^n$.

Aufgabenblatt 13

Aufgabe 13.1
Seien $R > r > 0$. Das Innere des Volltorus lässt sich wie folgt darstellen:

$$T^\circ = \left\{\Phi(\varrho, s, t) \;\middle|\; -r < \varrho < r\,,\, -\pi \leqslant s \leqslant \pi\,,\, -\tfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

mit $\Phi(\varrho, s, t) = \big((R + \varrho\cos s)\cos t, (R + \varrho\cos s)\sin t, \varrho \sin s\big)^t$. Das *Möbiusband* ist die Fläche (d.h. zweidimensionale Untermannigfaltigkeit) $M = T^\circ \cap \left\{s = \frac{t}{2}\right\}$.

(a). Zeigen Sie für $x = \Phi(0, \frac{s}{2}, s)$, dass $T_x(M)^\perp = \mathbb{R} \cdot v_s$, wobei

$$v_s = (-\sin\tfrac{s}{2}\cos s, -\sin\tfrac{s}{2}\sin s, \cos\tfrac{s}{2})^t \quad \text{für alle } s \in \mathbb{R}\,.$$

(b). Zeigen Sie, dass M nicht orientierbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld im Punkte $\Phi(0, \frac{s}{2}, s)$ gleich v_s sein muss (bis auf die Wahl eines festen Vorzeichens).

Aufgabe 13.2

(a). Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand, $B(x_0, \varepsilon) \subset K^\circ$ und $\omega \in \Omega^{n-1,1}(K \setminus x_0)$ geschlossen, d.h. $d\omega = 0$. Zeigen Sie mit dem Stokes'schen Integralsatz:

$$\int_{\partial K} \omega = \int_{\|x-x_0\|=\varepsilon} \omega \ .$$

(b). Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen, $K \subset U$ ein Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand, $w \in K^\circ$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. (Zur Erinnerung: Äquivalent zur Holomorphie von f ist, dass $f\,dz$ geschlossen ist.)

Zeigen Sie die *Cauchysche Integralformel*: Es gilt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-w}\, dz \ .$$

Anleitung:

- Wenden Sie (a) für $x_0 = w$ und kleines $\varepsilon > 0$ an.
- Zeigen Sie

$$d\big((\bar{z} - \bar{w}) f(z)\, dz\big) = f(z)\, d\bar{z} \wedge dz \quad \text{und} \quad d\bar{z} \wedge dz = 2i\, dx \wedge dy \ .$$

- Wenden Sie den Stokes'schen Integralsatz an und beweisen Sie

$$\frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{B(w,\varepsilon)} f\, dx \wedge dy \to f(w) \qquad (\varepsilon \to 0+).$$

Aufgabenblatt 14

Aufgabe 14.1
Seien $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph

(a). Zeigen Sie, dass für $w \in U$ und alle $\varepsilon > 0$ mit $B(w, \varepsilon) \subset U$ gilt

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2}\, dz \ .$$

Dabei ist die 'komplexe Ableitung' definiert als

$$f'(w) = \lim_{\mathbb{C} \setminus w \ni a \to w} \frac{f(a) - f(w)}{a - w} \ .$$

Hinweis: Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel aus der Übung und leiten Sie das Integral ab.

(b). Folgern Sie

$$|f'(w)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \cdot \sup_{|z-w|=\varepsilon} |f(z)| \ .$$

(c). Sei $U = \mathbb{C}$, also f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie den *Satz von Liouville*: Ist f beschränkt, so ist f konstant.

Hinweis: Für f holomorph ist

$$f' = \partial_x f = -i\partial_y f \ ,$$

wobei f' die komplexe Ableitung bezeichnet.

(d). Geben Sie mit Teil (c) einen neuen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra an.

Hinweis: Jede Polynomfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

Aufgabe 14.2
Sei

$$\omega = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j \, dx_1 \wedge \cdots \widehat{dx_j} \wedge \cdots dx_n \ .$$

(a). Zeigen Sie: ω ist als Differentialform auf $\mathbb{S}^{n-1}$ geschlossen, aber nicht als Differentialform auf $\mathbb{R}^n$.

(b). Berechnen Sie $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega$ und folgern Sie, dass ω nicht exakt ist.

(Bemerkung: Mit dieser Differentialform kann man nun den Brouwerschen Fixpunktsatz für die n-dimensionale Einheitskugel beweisen.)

Aufgabe 14.3
Sei $n \geqslant 3$ ungerade. Zeigen Sie den *Igelsatz von Jordan–Brouwer*: Es gibt kein $\mathcal{C}^2$-Einheitstangentenfeld $\tau : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$. (D.h., der Igel kann nicht glatt gekämmt werden.)

Dabei heißt es für τ Einheitstangentenfeld zu sein, dass

$$\|\tau(x)\| = 1 \quad \text{und} \quad \tau(x) \in T_x(\mathbb{S}^{n-1}) \quad \text{für alle } \ x \in \mathbb{S}^{n-1} \ .$$

Da $T_x(\mathbb{S}^{n-1}) = n_x^{\perp}$ und $n_x = x$ ist, bedeutet die letzte Bedingung einfach, dass $(\tau(x)|x) = 0$ gilt.

Anleitung:

- Beweisen Sie durch Widerspruch.
- Zeigen Sie $\deg \sigma^{\pm} = (\pm 1)^n$, wobei $\sigma^{\pm}(x) = \pm x$.
- Zeigen Sie $\tau \simeq \sigma^{+}$ und $\tau \simeq \sigma^{-}$.

Zusatz: Ein Folgerung aus dem Igelsatz ist, dass auf der Erdoberfläche immer mindestens ein Wirbelsturm stattfindet. (Warum?)

Aufgabenblatt 15

In den folgenden Übungen seien zeitabhängige Vektorfelder E, B, J und ein zeitabhängiges Skalar ϱ auf $\mathbb{R}^3$ und die zugehörigen Formen $F \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$ und $j \in \Omega^1(\mathbb{R}^4)$ gegeben.
Aufgabe 15.1

Sei $\varphi \in \mathcal{L}$ eine Lorentztransformation. Die Zeitrichtung nach dem Beobachterwechsel φ ist das konstante Vektorfeld $v = \varphi^* \partial_t$, gegeben durch $v(x, y, z, t) = \varphi^{-1}(e_4)$. Die Faraday-2-Form $F' = \varphi^* F$ determiniert via

$$E' = -i_{\varphi^*\partial_t} F' \quad \text{und} \quad B' = -i_{\varphi^*\partial_t} {*F'}$$

neue zeitabhängige Vektorfelder, die die nach dem Beobachterwechsel gemessene elektrische Feldstärke und magnetische Flussdichte darstellen.
Ein sich mit der konstanten Geschwindigkeit $0 \leqslant v < 1 = c$ entlang der x-Achse bewegender Beobachter ist gegeben durch die Lorentztransformation φ, die durch folgenden Gleichungen beschrieben wird:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \,,\; y' = y \,,\; z' = z \,,\; t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Berechnen Sie E' und B'. Warum ist es auf dem Hintergrund des Ergebnisses natürlicher, die Maxwellgleichungen mit den Differentialformen F und j zu formulieren, als mit den Vektorfeldern E, B, J und dem Skalar ϱ?

Aufgabe 15.2
Sei K ein Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand und $Q = \int_K \varrho \, dV$ die (zeitabhängige) Ladung im Inneren. Zeigen Sie: Erfüllen E, B, J, ϱ die inhomogene Maxwellgleichung (d.h. Gleichungen (a) und (d)), so gilt

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_{\partial K} (J|\nu) \, dS \,,$$

d.h. der durch die geschlossene Fläche ∂K hindurch fließende elektrische Strom ist gleich der Veränderungsrate der Ladung im Inneren.
Hinweis: Zeigen Sie, dass einerseits ${*d*j} = 0$ ist und andererseits ${*d*j} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \operatorname{div} J$.

4.2 Lösungen

Lösungsblatt 1

Lösung 1.1
Sei zunächst $Y = U \cap A$, wobei $U \subset X$ offen und $A \subset X$ abgeschlossen seien. Es gilt $B_r^Y(y) = B_r^X(y) \cap Y$ für alle $r > 0$ und $y \in Y$. Sei $y \in Y$. Es gibt $r_0 > 0$ mit $B_r^X(y)$ kompakt und in U enthalten für alle $0 < r \leqslant r_0$. Dann ist $B_r^Y(y) = A \cap B_r^X(y)$ als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums kompakt.
Umgekehrt sei $Y \subset X$ lokal kompakt. Setze $A = \overline{Y}$, der Abschluss von Y in X, qua Definition abgeschlossen in X. Sei $y \in Y$ und $r > 0$, so dass $B_{2r}^Y(y)$ kompakt ist.
Wir behaupten: $B_r^{Y\circ}(y) = A \cap B_r^{X\circ}(y)$. Die Inklusion $\subset$ ist klar; umgekehrt nehme man $x \in A \cap B_r^{X\circ}(y)$. Es gibt $x_k \in Y$ mit $x = \lim_k x_k$. O.b.d.A. gilt $d(x, x_k) \leqslant r$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt

$$d(y, x_k) \leqslant d(y, x) + d(x, x_k) \leqslant 2r \,,$$

also $x_k \in B_{2r}^Y(y)$. Da diese Kugel kompakt ist, kann man o.b.d.A. annehmen, dass $z = \lim_k x_k$ für ein $z \in B_{2r}^Y(y)$. Dann folgt $x = z \in Y$, also $x \in B_r^{Y\circ}(y)$.
Nun definiert man eine offene Teilmenge von X durch

$$U = \bigcup\nolimits_{y \in Y} B_{r_y}^{X\circ}(y) \,,$$

wobei für alle $y \in Y$ der Radius $r_y > 0$ derart sei, dass $B^Y_{2r_y}(y)$ kompakt ist. Nach der obigen Überlegung folgt $Y = A \cap U$, denn es gilt

$$Y = \bigcup\nolimits_{y \in Y} B^{Y\circ}_{r_y}(y) .$$

Lösung 1.2

(a). Seien $g_k \in \mathcal{C}_c(X)$, $g_k \geqslant 0$, gegeben mit $f \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} g_k$. Setze $K_k = \operatorname{supp} g_k$. Dann gilt $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} K_k$. Denn sei $f(x) > 0$. Dann gilt $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) > 0$, also gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $g_k(x) > 0$ und folglich ist $x \in K_k$. Damit ist $\{f > 0\}$ in einer σ-kompakten Menge enthalten.

Sei umgekehrt $\{f > 0\} \subset \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$ mit K_j kompakt. Es gibt $g_j \in \mathcal{C}_c(X)$, $g_j \geqslant 0$, $g_j = 1$ auf K_j. Sei $n_j = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid n \leqslant f \text{ auf } K_j\} \in \mathbb{N} \cup \infty$. Dann gilt

$$f \leqslant \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} \sum\nolimits_{k=0}^{n_j} g_j .$$

Durch Umordnung erhält man eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften.

(b). Falls $X = \varnothing$, ist X kompakt, insbesondere σ-kompakt. Andernfalls wähle ein beliebiges $x \in X$. Es gilt dann $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k(x)$.

(c). Für einen diskreten Raum sind die Kompakta gerade genau die endlichen Teilmengen.

(d). Die Teilmenge Y ist σ-kompakt, denn für $X = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$ gilt $Y = \bigcup_{j=0}^{\infty}(K_j \cap Y)$ mit $Y \cap K_j$ kompakt, da Y in X abgeschlossen ist.

(e). Der metrische Raum $\mathbb{R}$ ist σ-kompakt wegen (b). Jeder diskrete Teilraum Y ist abgeschlossen, also nach (d) σ-kompakt. Dann aber muss Y abzählbar sein, wegen (c).

(f). Zunächst einmal zeigen wir, dass U separabel ist. Dazu seien $(x_j) \subset X$ eine dichte Folge und $J = \{j \in \mathbb{N} \mid x_j \in U\}$. Sei $x \in U$ und $\varepsilon > 0$. O.b.d.A. ist $B_\varepsilon(x) \subset U$. Es gibt $j \in \mathbb{N}$ mit $x_j \in B_\varepsilon(x)$. Qua Voraussetzung an ε folgt $j \in J$. Damit ist $(x_j)_{j \in J}$ eine dichte Folge in U.

Da U lokal kompakt und separabel ist, reicht es also, den Fall $X = U$ zu betrachten. Es ist aber klar, dass die Kompakta $K_j = B_1(x_j)$ den Raum X überdecken; also ist X σ-kompakt.

Lösung 1.3

Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Es gibt eine Folge $(x_k) \subset \mathbb{Q}$ mit $x = \lim_k x_k$ in $\mathbb{R}$. Angenommen, $\mathbb{Q}$ wäre lokal kompakt. Weil die Abbildungen $x \mapsto \lambda \cdot x$ mit $\lambda > 0$ allemsamt stetige Bijektionen $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ sind, wären dann alle Kugeln $B^{\mathbb{Q}}_r(y)$ mit $r > 0$ und $y \in \mathbb{Q}$ kompakt. Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|x_k - x_\ell| \leqslant 1$ für alle $\ell, k \geqslant n$. Insbesondere gilt $x_k \in B^{\mathbb{Q}}_1(x_n)$ für alle $k \geqslant n$. Da $B^{\mathbb{Q}}_1(x_n)$ kompakt wäre, gäbe es eine in $B^{\mathbb{Q}}_1(x_n) \subset \mathbb{Q}$ konvergente Teilfolge von $(x_k)_{k \geqslant n}$. Diese müsste aber gegen x konvergieren und $x \notin \mathbb{Q}$, Widerspruch! Folglich ist $\mathbb{Q}$ nicht lokal kompakt.

Lösungsblatt 2

Lösung 2.1

(a). Sei $\chi(x) = \max(0, 1-|x|)$. Dann ist χ stetig mit $\operatorname{supp}\chi = [-1,1]$, also $\chi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Für $\varepsilon > 0$ und $y \in \mathbb{R}$ sei $\chi_{y,\varepsilon}(x) = \chi(\varepsilon \cdot (x-y))$. Dann gilt $\operatorname{supp}\chi_{\varepsilon,y} = [y-\varepsilon, y+\varepsilon]$ und $\chi_{\varepsilon,y}(y) = 1$. Weiterhin

$$0 \leqslant \lambda_\varrho(\chi_{y,\varepsilon}) = \int_{-1}^{1} \chi(\varepsilon \cdot (x-y))\varrho(x)\,dx \leqslant R \cdot \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} 1\,dx \leqslant 2R\varepsilon$$

für $R = \|\varrho\|_\infty$. Wenn $R = 0$ ist, ist nichts zu zeigen, also o.B.d.A. $R > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$ und definiere $g = \sum_k \chi_{x_k, \varepsilon/2^{k+2}R}$. Dann gilt für alle k:

$$g(x_k) \geqslant \chi_{x_k,\varepsilon/2^{k+2}R}(x_k) = 1 \geqslant f(x_k)\ .$$

Da $g \geqslant 0$ und f an allen anderen Punkten $= 0$ ist, ist somit $g \geqslant f$. Nach Definition von $\|\sqcup\|_1$ folgt

$$\|f\|_1 \leqslant \textstyle\sum_k \lambda_\varrho(\chi_{x_k,\varepsilon/2^{k+2}R}) \leqslant \sum_k \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon\ .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\|f\|_1 = 0$.

(b). Seien $\chi_{y,\varepsilon}$ die Funktionen aus (i). Definiere für $k \geqslant 1$

$$f_k = \min\bigl(1, k \cdot \chi_{(a+b)/2,(b-a)/2}\bigr) \quad \text{und} \quad g_k = \min\bigl(1, k\cdot \chi_{(a+b)/2,(b-a)/2+1/k}\bigr)\ .$$

Dann gilt $f_k, g_k \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} f_k = [a,b]\ ,\ f_k = 1 \text{ auf } [a+1/k, b-1/k]\ , \\ \operatorname{supp} g_k = [a-1/k, b+1/k]\ ,\ g_k = 1 \text{ auf } [a,b] \end{aligned}$$

und $g_k - f_k = \chi_{a,1/k} + \chi_{b,1/k}$. Weiterhin ist

$$f_k \leqslant 1_{[a,b]}, 1_{]a,b]}, 1_{[a,b[}, 1_{]a,b[} \leqslant g_k\ .$$

Es folgt für $f \in \{1_{[a,b]}, 1_{]a,b]}, 1_{[a,b[}, 1_{]a,b[}\}$

$$\|f - f_k\|_1 \leqslant \|g_k - f_k\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (\chi_{a,1/k}(x) + \chi_{b,1/k}(x))\varrho(x)\,dx \leqslant \frac{2R}{k}\ ,$$

so dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \lambda_\varrho)$ und

$$\begin{aligned} \int_a^b \varrho(x)\,dx - \frac{2R}{k} \leqslant \int_{a+1/k}^{b-1/k} \varrho(x)\,dx \leqslant \lambda_\varrho(f_k) \leqslant \int f\,d\lambda_\varrho \\ \leqslant \lambda_\varrho(g_k) \leqslant \int_{a-1/k}^{b+1/k} \varrho(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varrho(x)\,dx + \frac{2R}{k}\ . \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

Lösung 2.2
Es gilt für $0 < x < 1$

$$\frac{1}{x}\cdot\log\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = -\frac{\log(1-x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(-x)^k}{kx} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k}\,.$$

Sei $f_n(x) = 1_{]0,1[}(x)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}$ und $f = \sup_n f_n$. Da $]0,1[\subset \mathbb{R}$ offen ist und Polynomfunktionen stetig sind, ist f_n λ-integrierbar nach Satz 1.3.6. Es gilt

$$\int f_n\,d\lambda = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot\int_0^1 x^{k-1}\,dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\,.$$

Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergiert, folgt mit Satz 1.3.1, dass f integrierbar ist mit

$$\int f\,d\lambda = \sup_n\int f_n\,d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,.$$

Es gilt für $0 < x < 1$

$$\frac{\log(1+x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-x)^{k-1}}{k}\,.$$

Definiere $g_n(x) = 1_{]0,1[}(x)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(-x)^{k-1}}{k}$. Dann ist nach Satz 1.3.6 g_n integrierbar und $g = \lim_k g_k$ punktweise auf $\mathbb{R}$. Weiterhin gilt

$$|g_n(x)| \leqslant 1_{]0,1[}(x)\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k} = f_n(x) \leqslant f(x)\,.$$

Da f integrierbar ist, folgt mit Theorem 1.3.3, dass g integrierbar ist mit

$$\int g\,d\lambda = \lim_n\int g_n\,d\lambda = \lim_n\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot\int_0^1 x^{k-1}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\,.$$

Lösung 2.3
Nach Satz 1.3.6 sind die Funktionen f_k λ-integrierbar. Es gilt (aus der Analysis I): $f_k \leqslant f_{k+1}$ und $t^{x-1}e^{-t} = \sup_k f_k(t)$. Nun ist

$$\int f_k\,d\lambda = \int_0^k t^{x-1}(1-t/k)^k\,dt\,.$$

Behauptung: Es gilt

$$\int_0^k t^{x-1}(1-t/k)^k\,dt = \frac{k!\cdot k^x}{x(x+1)\cdots(x+k)}$$

Beweis durch Induktion nach k.
Für $k = 1$ gilt

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)\,dt = \int_0^1 t^{x-1}\,dt - \int_0^1 t^x\,dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}\,.$$

Die Formel sei für $k \geqslant 1$ bewiesen. Dann gilt mit der Substitution $s = \frac{k}{k+1} \cdot t$ und der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
\int f_{k+1}\, d\lambda &= \frac{k+1}{k} \cdot \int_0^k ((k+1)s/k)^{x-1}(1-s/k)^{k+1}\, ds \\
&= \Big(\frac{k+1}{k}\Big)^x \cdot \Big(\int_0^k s^{x-1}(1-s/k)^k\, ds - \frac{1}{k} \cdot \int_0^k s^x (1-s/k)^k\, ds\Big) \\
&= \Big(\frac{k+1}{k}\Big)^x \cdot \frac{k! \cdot ((x+k+1)\cdot k^x - x \cdot k^x)}{x(x+1)\cdots(x+k+1)} \\
&= \frac{(k+1)! \cdot (k+1)^{x-1} \cdot (x+k+1-x)}{x(x+1)\cdots(x+k+1)} = \frac{(k+1)!(k+1)^x}{x(x+1)\cdots(x+k+1)} \,.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung und mit Satz 1.3.1 folgt, dass für $x > 0$ die durch die Vorschrift $f(t) = 1_{]0,\infty[} \cdot t^{x-1}e^{-t}$ definierte Funktion f λ-integrierbar ist mit

$$\Gamma(x) = \int f\, d\lambda = \sup_k \int f_k\, d\lambda = \lim_k \frac{k!k^x}{x(x+1)\cdots(x+k)} \,.$$

Lösungsblatt 3

Lösung 3.1

(a). Definiere $g_t(x) = 1_{[0,t]}(x) \cdot e^{-x^2}$ und $h_t(x) = 1_{[0,1]}(x)\frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}$. Nach Satz 1.3.6 sind g_t und h_t λ-integrierbar. Es gilt

$$\frac{d}{dt}\, h_t(x) = -2te^{-t^2(x^2+1)} \,.$$

Damit ist $|\partial_t h_t(x)| \leqslant 1_{[0,1]}(x) \cdot 2|t|e^{-2t^2} \leqslant C \cdot 1_{[0,1]}(x)$, da $\lim_{t\to\infty} 2te^{-t^2} = 0$. Die rechte Seite dieser Ungleichung ist λ-integrierbar, also folgt mit Theorem 1.5.2 und der Substitutionsregel, dass

$$\partial_t \int_0^1 h_t(x)\, dx = -2 \cdot \int_0^1 2te^{-t^2(x^2+1)}\, dx = -2e^{-t^2} \cdot \int_0^1 e^{-(tx)^2}\, t\, dt = -2e^{-t^2} \cdot \int_0^t e^{-x^2}\, dx \,.$$

Aus der Analysis II ist bekannt, dass $\partial_t \int_0^t e^{-x^2}\, dx = e^{-t^2}$. Mit der Kettenregel folgt, dass F differenzierbar ist mit

$$F'(t) = 2e^{-t^2} \cdot \int_0^t e^{-x^2}\, dx - \partial_t \int_0^1 h_t(x)\, dx = 0 \,.$$

Folglich ist F konstant, so dass

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = F(0) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} \,.$$

Nun ist $0 \leqslant h_t(x) \leqslant e^{-t^2}$, so dass

$$0 \leqslant \int_0^1 h_t(x)\, dx \leqslant e^{-t^2} \to 0 \,.$$

Es folgt die Existenz von

$$\sup_k \Big(\int g_k \, d\lambda \Big)^2 = \lim_k \Big(\int_0^k e^{-x^2} \, dx \Big)^2 = \frac{\pi}{4} \, .$$

Die Folge g_k ist wachsend und es gilt $\sup_k g_k(x) = 1_{[0,\infty[}(x) \cdot e^{-x^2}$. Daher ist die Funktion $1_{[0,\infty[}(x) \cdot e^{-x^2}$ λ-integrierbar mit

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \, .$$

Da $e^{-(-x)^2} = e^{-x^2}$, folgt hieraus sofort die Behauptung.

(b). Es gilt $|f_t(x)| = e^{-\cos(2t)x^2}$ und für $-\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$ ist $\cos(2t) > 0$. Dann folgt mit $r = \sqrt{\cos(2t)}$.

$$\int_{-k}^k |f_t(x)| \, dx = \frac{1}{r} \cdot \int_{-rk}^{rk} e^{-x^2} \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx < \infty \, .$$

Mit Satz 1.3.1 folgt, dass f_t integrierbar ist. Für die Ableitung von f_t gilt

$$\partial_t f_t(x) = -2ie^{2it}x^2 e^{-e^{2it}x^2} = ix\partial_x f_t(x) \, .$$

Um zu zeigen, dass F an t differenzierbar ist, reicht es $\frac{\pi}{4} > s > 0$ mit $-s < t < s$ zu wählen und zu zeigen, dass F auf $]-s, s[$ differenzierbar ist. Dazu setzt man $R = \sqrt{\frac{\cos(2s)}{2}} > 0$. Es gilt für $-s < t < s$

$$|\partial_t f_t(x)| \leqslant 2x^2 \cdot e^{-2(Rx)^2} \, .$$

Da $\lim_{x \to \pm\infty} 2x^2 e^{-(Rx)^2} = 0$, gibt es $C > 0$ mit $2x^2 \leqslant C \cdot e^{(Rx)^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit

$$|\partial_t f_t(x)| \leqslant C \cdot e^{(Rx)^2 - 2(Rx)^2} = C \cdot e^{-(Rx)^2} \, .$$

Die rechte Seite ist eine integrierbare Funktion, wie aus dem Satz 1.3.6 folgt, denn für alle $k \geqslant 1$ gilt

$$\int_{-k}^k e^{-(Rx)^2} \, dx = \frac{1}{R} \cdot \int_{-Rk}^{Rk} e^{-x^2} \, dx \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{R} < \infty \, .$$

Folglich ist F differenzierbar mit

$$\begin{aligned} F'(t) &= i \int_{\mathbb{R}} x\partial_x f_t(x) \, dx = i \lim_{(a,b)\to(-\infty,\infty)} \int_a^b x\partial_x f_t(x) \, dx \\ &= i \lim_{(a,b)\to(-\infty,\infty)} (bf_t(b) - af_t(a) - \int_a^b f_t(x) \, dx = -i \int_{\mathbb{R}} f_t(x) \, dx = -iF(t) \, , \end{aligned}$$

wobei Satz 1.3.6 und partielle Integration benutzt wurden.

Weiterhin gilt mit (i)

$$F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi} \, ,$$

so dass F das AWP aus der Aufgabe löst. Da die DGL linear ist und $t \mapsto \sqrt{\pi} \cdot e^{-it}$ auch eine Lösung des AWP ist, folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf, dass $F(t) = \sqrt{\pi} \cdot e^{-it}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(c). Der Fall $a = 0$ ist klar, dann erhält man $\sqrt{\pi}$ bzw. 0. Sei $a \neq 0$. Da $\cos(ax^2) = \cos(-ax^2)$ und $\sin(ax^2) = -\sin(-ax^2)$, kann man o.B.d.A. annehmen, dass $a > 0$ ist. Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(ax^2)\, dx + i \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \sin(ax^2)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-(1-ia)x^2}\, dx\,.$$

Für $\vartheta = \frac{1}{2} \cdot \arctan a$ gilt $|\vartheta| < \frac{\pi}{4}$, denn $|\arctan a| < \frac{\pi}{2}$. Weiterhin

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{und} \quad \sin\vartheta = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\,,$$

wie aus der Analysis I bekannt ist. Mit $w = \sqrt[4]{1+a^2} \cdot e^{-i\vartheta}$ folgt dann $w^2 = 1 - ia$. Folglich ist

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(1-ia)x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt[4]{1+a^2}} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-(e^{-i\vartheta}x)^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+a^2}} \cdot e^{i\vartheta}\,.$$

Durch Übergang zu Real- und Imaginärteil folgt (für a beliebig)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \cos(ax^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+a^2}} \cdot \cos\Big(\frac{\arctan a}{2}\Big)$$

und

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \sin(ax^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{1+a^2}} \cdot \sin\Big(\frac{\arctan a}{2}\Big)\,.$$

Lösung 3.2
Es gilt (a) $\not\Rightarrow$ (b). Denn sei $f = \operatorname{sgn}$, d.h.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0\,, \\ 0 & x = 0\,, \\ -1 & x < 0\,. \end{cases}$$

Dann ist die Menge der Punkte, an denen f nicht stetig ist, gerade $\{0\}$, also eine Nullmenge. (Vgl. Aufgabe 1 auf Blatt 1.) Angenommen, es gäbe eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f = g$ λ-fast überall. Angenommen, $g(0) = \lim_{x\to 0+} g(x) \neq 1$. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und ein $y_0 > 0$, so dass für alle $0 < y \leqslant y_0$ $|g(y) - 1| > \varepsilon$. Dann wäre

$$0 < \varepsilon \cdot y_0 = \int_0^{y_0} \varepsilon\, d\lambda \leqslant \int_0^{y_0} |g - 1|\, d\lambda \leqslant \|g - f\|_1 = 0\,,$$

Widerspruch! Also gilt $g(0) = 1$. Genauso zeigt man aber $g(0) = -1$, Widerspruch! Damit kann es keine solches g geben.
Es gilt (b) $\not\Rightarrow$ (a). Denn sei $f = 1_{\mathbb{Q}}$. Es ist f eine Nullfunktion, also gilt $f = 0$ λ-fast überall. Aber f ist nirgends stetig, denn für alle $\delta > 0$ gibt es $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $y \in \mathbb{Q}$ mit $|x - y| \leqslant \delta$, aber $|f(x) - f(y)| = 1 - 0 = 1$.
Es gilt (b) $\Rightarrow$ (c). Denn sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f = g$ λ-f.ü. Sei $N = \{f \neq g\}$, qua Voraussetzung eine Nullmenge. Es gilt $f|(\mathbb{R} \setminus N) = g|(\mathbb{R} \setminus N)$, also ist diese Funktion stetig.
Es gilt (a) $\Rightarrow$ (c). Denn sei N die Menge der Unstetigkeitspunkte von f. Dann ist f stetig an jedem $x \in \mathbb{R} \setminus N$ und insbesondere $f|(\mathbb{R} \setminus N)$ überall stetig.

Es gilt (c) $\not\Rightarrow$ (b), wie aus (a) $\Rightarrow$ (b) und (a) $\not\Rightarrow$ (b) folgt.
Es gilt (c) $\not\Rightarrow$ (a), wie aus (b) $\Rightarrow$ (c) und (b) $\not\Rightarrow$ (a) folgt.

Lösung 3.3
Das Integral ist wohldefiniert, da $1_{a,b} \cdot f = \pm 1_{[c,d]} \cdot f$ λ-f.ü. für $\{a,b\} = \{c,d\}$.
Es gilt $1_{a,b} + 1_{b,c} + 1_{c,a} = 0$, denn $1_{d,e} = -1_{e,d}$, so dass die Gleichung trivial ist, falls $a = b$ oder $b = c$ und man sich andernfalls auf den ebenfalls trivialen Fall $a < b < c$ zurückführen kann. Daraus folgt

$$F(b) - F(a) = \int (1_{0,b} - 1_{0,a}) \cdot f \, d\lambda = \int 1_{a,b} \cdot f \, d\lambda \,.$$

Sei nun f in x stetig. Es gilt für alle $h \neq 0$

$$\Delta_h = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int 1_{x,x+h} \cdot f \, d\lambda \,.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt ein $\delta > 0$ mit $|f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ für alle $|y - x| \leqslant \delta$. Es folgt für $0 < |h| \leqslant \delta$

$$h \cdot (f(x) - \varepsilon) = \int 1_{x,x+h}(f(x) - \varepsilon) \, dy \leqslant \int 1_{x,x+h} f(y) \, dy = h \cdot \Delta_h \leqslant h \cdot (f(x) + \varepsilon) \,,$$

also ist F im Punkte x differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$.

Lösungsblatt 4

Lösung 4.1

(a). Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $y = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1]$ und $y \equiv x \pmod{\mathbb{Q}}$.

(b). Nach (a) sind für alle $x \in \mathbb{R}$ die Mengen $[x] \cap [0,1] \neq \varnothing$. Nach dem Auswahlaxiom ist

$$\prod_{[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}} ([x] \cap [0,1]) \neq \varnothing \,,$$

d.h., es gibt eine Abbildung $f : \mathbb{R}/\mathbb{Q} \to [0,1]$, so dass $f([x]) \in [x]$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nimmt man $R = f(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$, so ist $R \subset [0,1]$ und $\pi|[0,1]$ ist surjektiv. Da $\pi \circ f = \mathrm{id}$, ist π auch injektiv.

(c). Sicher ist $R + \mathbb{Q} \cap [-1,1] \subset [0,1] + [-1,1] = [-1,2]$. Sei $x \in [0,1]$. Dann ist $x \equiv y \pmod{\mathbb{Q}}$ für genau ein $y \in R$. Es gilt $x = y + x - y$ mit $x - y \in \mathbb{Q}$ und $x - y \in [0,1] - [0,1] = [-1,1]$.

(d). Angenommen, R sei integrierbar. Dann gilt $\lambda(R + q) = \lambda(R)$ für alle $q \in \mathbb{R}$. Die Mengen $R + q$ mit $q \in \mathbb{Q}$ sind paarweise disjunkt. Sei (q_k) eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$, wobei die q_k paarweise verschieden seien. Für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\ell} \lambda(R + q_k) = \lambda\Big(\bigcup\nolimits_{k=0}^{\ell} (R + q_k)\Big) \leqslant \lambda([-1,2]) = 3 < \infty \,,$$

ist also nach Satz 1.3.9 $R + \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ integrierbar mit

$$\infty > \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(R + q_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda(R) = \lambda(R + \mathbb{Q} \cap [-1,1]) \,.$$

Dann muss R und folglich $R + \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ eine Nullmenge sein. Aber es gilt

$$[0,1] \subset R + \mathbb{Q} \cap [-1,1] \quad \text{und} \quad \lambda([0,1]) = 1 > 0\,,$$

Widerspruch! Folglich ist R nicht integrierbar.

Lösung 4.2

Für $x, r > 0$ gilt

$$\int_0^r e^{-xy}\,dy = \frac{1 - e^{-rx}}{x} \to \frac{1}{x}(r \to \infty)\,,$$

so dass aus Satz 1.3.6 folgt, dass $y \mapsto 1_{[0,\infty[}(y) \cdot e^{-xy}$ integrierbar ist mit $\int_0^\infty e^{-xy}\,dy = \frac{1}{x}$. Da $f(x,y) = \sin x \cdot e^{-xy}$ stetig ist und für $f_r = 1_{[0,r] \times [0,\infty[} \cdot f$ gilt

$$\|f_r\|_1 \leqslant \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \int_1^r \int_0^\infty e^{-xy}\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx + \log r < \infty\,,$$

ist nach Satz 1.3.9 f_r integrierbar. Es gilt mit den Sätzen von Lebesgue und Fubini

$$\int_0^r \int_0^\infty \sin x \cdot e^{-xy}\,dy\,dx = \int_0^\infty \int_0^r \sin x e^{-xy}\,dx\,dy\,.$$

Nun ist $(\cos x + i \sin x) \cdot e^{-xy} = e^{(i-y)\cdot x}$ die Ableitung von

$$\frac{1}{i-y} \cdot e^{(i-y)\cdot x} = -\frac{i+y}{1+y^2} \cdot (\cos x + i \sin x) \cdot e^{-xy}\,,$$

also

$$\int_0^r \sin x \cdot e^{-xy}\,dx = -\frac{\cos x + y \sin x}{1+y^2} \cdot e^{-xy}\,\Big|_{x=0}^r = \frac{1 - (\cos r + y \sin r) \cdot e^{-ry}}{1+y^2}\,.$$

Es gilt für $r \geqslant 1$

$$\Big|\frac{(\cos r + y \sin r) \cdot e^{-ry}}{1+y^2}\Big| \leqslant e^{-ry} \leqslant e^{-y}$$

und $y \mapsto 1_{[0,\infty[}(y) \cdot e^{-y}$ ist integrierbar, da $\int_0^r e^{-y}\,dy = 1 - e^{-r} \to 1 < \infty$. Nach dem Satz von Lebesgue folgt

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \int_0^\infty \int_0^r e^{-xy} \sin x\,dx\,dy &= \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \\ &= \lim_{r\to\infty} \int_0^r \frac{dy}{1+y^2} = \lim_{r\to\infty} \arctan r = \frac{\pi}{2}\,, \end{aligned}$$

d.h., die Behauptung.

Lösung 4.3

Man beachte, dass $f(x,y) = f(x,y)$, also sind die sukzessiven Integrale unabhängig von der Integrationsreihenfolge gleich, sobald sie existieren. Für y fest ist $f(\sqcup, y)$ fast überall stetig, also existiert $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,d\lambda(x) = \int_{-1}^1 f(x,y)\,dx$.

Da $f(x,y) = -f(-x,y)$, gilt für alle y

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{0}^{1} f(x,y)\,dy - \int_{-1}^{0} f(-x,y)\,dx \\ &= \int_{0}^{1} f(x,y)\,dy - \int_{0}^{1} f(x,y)\,dy = 0\end{aligned}$$

Folglich existieren die sukzessiven Integrale und sind gleich.
Die Funktion f ist fast überall stetig, also messbar. Daher ist f genau dann λ^2-integrierbar, wenn das Integral von $|f|$ endlich ist. Wäre $|f|$ λ^2-integrierbar, so müssten die sukzessiven Integrale von $|f|$ existieren. Es gilt für $y > 0$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} \frac{xy\,dx}{(x^2+y^2)^2} &= \int_{0}^{1} \frac{\frac{x}{y}}{\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right)^2}\,dx = \frac{1}{y}\cdot\int_{0}^{1/y} \frac{u\,du}{(1+u^2)^2} \\ &= \frac{1}{2y}\cdot\left(1-\frac{y^2}{1+y^2}\right) = \frac{1}{2y\cdot(1+y^2)}\;.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |f(x,y)|\,dx\,dy \geqslant \int_{0}^{1}\int_{0}^{1} \frac{xy\,dx}{(x^2+y^2)^2} \geqslant \frac{1}{2}\cdot\int_{0}^{1}\frac{dy}{y}\;.$$

Aber $y \mapsto 1_{]0,1]}(y)\cdot\frac{1}{y}$ ist nicht integrierbar, denn

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dy}{y} = -\log\varepsilon \to \infty\ (\varepsilon \to 0+)\;.$$

Damit ist f nicht integrierbar.

Lösungsblatt 5

Lösung 5.1

Sei A die Matrix mit den Spalten $v_1,\ldots,v_n$. Dann gilt $Ae_j = v_j$ und folglich

$$A(t_1,\ldots,t_n) = \sum_{j=1}^{n} t_j\cdot v_j\;.$$

Damit ist $P = A([0,1]^n)$ und somit $1_P \circ A = 1_{[0,1]^n}$. Da $x \mapsto Ax$ ein Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist mit $DA(x) = A$, ist 1_P integrierbar mit

$$\lambda^n(P) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_P\,d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{[0,1]^n}|\det A|\,dx = |\det A|\;,$$

was zu zeigen war.

Lösung 5.2

(a). Es gilt $\|\varphi(r,t)\| = r$, also $\varphi(s,t) \in \mathbb{B}_r$ genau dann, wenn $s \in [0,r]$. Da

$$\mathbb{B}_r \setminus \varphi\big([0,r]\times]-\pi,\pi[\times]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[^{n-2}\big)$$

eine Nullmenge ist, folgt mit der Transformationsformel und dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned}\lambda^n(\mathbb{B}_r) &= \int_0^r \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^{n-1} \cos^{n-2} t_n \cdots \cos t_3 \, dt_n \cdots dt_2 \, dr \\ &= \frac{r^n}{n} \cdot 2\pi \cdot \prod_{j=1}^{n-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^j t \, dt \, .\end{aligned}$$

Weiterhin gilt mit der Substitution $s = t + \pi/2$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^j t \, dt = 2 \int_{-\pi/2}^{0} \cos^j t \, dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^j\left(s - \tfrac{\pi}{2}\right) ds = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^j s \, ds \, ,$$

so dass

$$\lambda^n(\mathbb{B}_r) = \frac{2^{n-1}\pi r^n}{n} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^j t \, dt \, .$$

(b). Es gilt

$$A_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} \, , \; A_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = \cos(0) - \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1 \, .$$

Weiterhin gilt mit partieller Integration und $\cos^2 = 1 - \sin^2$

$$\begin{aligned}A_{j+2} =& \cos(0) \sin^{j+1}(0) - \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \sin^{j+1}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \\ &+ (j+1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{/}2} \cos^2 t \sin^j t \, dt \\ &= (j+1)(A_j - A_{j+2}) \, ,\end{aligned}$$

also $(j+2)A_{j+2} = (j+1)A_{j+1}$. Daraus folgt die Behauptung.

(c). Offensichtlich ist die Lösung der Rekursionsgleichung eindeutig bestimmt. Es reicht also, $B_j = \frac{\Gamma(1/2)}{2} \cdot \frac{\Gamma((j+1)/2)}{\Gamma((j+2)/2)}$ zu definieren und zu zeigen, dass diese Zahlen der Rekursionsgleichung genügen. In der Tat gilt

$$B_0 = \frac{\Gamma(1/2)^2}{2\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2\Gamma(1)} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad B_1 = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1)}{2\Gamma(3/2)} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2)} = 1 \, .$$

Weiterhin

$$\frac{B_{j+2}}{B_j} = \frac{\Gamma(j/2 + 3/2) \cdot \Gamma(j/2 + 1)}{\Gamma(j/2 + 2) \cdot \Gamma(j/2 + 1/2)} = \frac{\frac{j+1}{2}}{\frac{j+2}{2}} \, ,$$

also folgt die Behauptung.

(d). Es folgt aus (i)-(iii)

$$\lambda^n(\mathbb{B}_r) = \frac{2^{n-1}\pi r^n}{n} \cdot \prod_{j=1}^{n-2} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{j+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{j+2}{2}\right)} = \frac{2\pi^{n/2}}{n \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \, .$$

Lösung 5.3
Es gilt für alle $0 < r < \infty$ und $-\pi < \theta < \pi$, dass

$$\det D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r > 0$$

Da φ injektiv ist, ist φ ein Diffeomorphismus auf sein Bild, welches gerade $\mathbb{R}^2 \setminus \big(]-\infty, 0] \times 0\big)$ ist. Das Komplement des Bildes ist eine Nullmenge, weil die Einpunktmenge $0 \subset \mathbb{R}$ eine Nullmenge ist.
Nach der Substitutionsregel gilt mit $r = \sqrt{t}$ $(2rdr = dt)$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = 2\int_0^\infty r^{2x-1}e^{-r^2}\,dr\,.$$

Ebenso mit $s = \sin^2\theta$ $(ds = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta)$

$$B(p,q) = \int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{q-1}\,ds = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}(\theta)\cos^{2q-1}(\theta)\,d\theta\,.$$

Es folgt mit dem Satz von Fubini und Transformationsformel

$$\begin{aligned} \frac{B(p,q)\Gamma(p+q)}{4} &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} (r\cos\theta)^{2q-1}(r\sin\theta)^{2p-1} \cdot re^{-r^2}\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty x^{2p-1}y^{2p-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{4} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

Lösungsblatt 6

Lösung 6.1
Weil K und das Lebesgueintegral unter orthogonalen Transformationen invariant sind, kann man annehmen, dass $x_0 = s \cdot e_3$, wobei $s \geqslant 0$. Bezeichnet φ räumliche Polarkoordinaten und ist $x = \varphi(\varrho, t_2, t_3)$, so gilt

$$\|x - x_0\|_2^2 = \varrho^2\cos^2 t_2 \cos 2t_3 + \varrho^2 \sin^2 t_2 \cos^2 t_3 + (\varrho \sin t_3 - s)^2 = \varrho^2 - 2\varrho s \sin t_3 + s^2$$

Damit ist

$$\begin{aligned} I_s = \int_K \frac{dx}{\|x - x_0\|} &= \int_r^R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varrho^2 \cos t_3\,dt_3\,dt_2\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho s \sin t_3 + s^2}} \\ &= 2\pi \int_r^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\varrho^2 \cos t\,dt\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho s \sin t + s^2}}\,. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $x = \sin t$ folgt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho s\sin t + s^2}} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho s x + s^2}} \\ &= -\frac{\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho s x + s^2}}{\varrho s}\Big|_{x=-1}^1 = \frac{\varrho + s - |\varrho - s|}{\varrho s} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\min(\varrho, s)}{\varrho s} = \frac{2}{\max(\varrho, s)} .$$

Damit ist

$$\begin{aligned} I_s &= 4\pi \int_r^R \frac{\varrho^2 \, d\varrho}{\max(\varrho, s)} \\ &= \begin{cases} 4\pi \int_r^R \varrho \, dr = 2\pi(R^2 - r^2) & s < r , \\ \frac{4\pi}{s} \cdot \int_r^s \varrho^2 \, d\varrho + 4\pi \int_s^R \varrho \, d\varrho = \frac{4\pi(s^3 - r^3)}{3s} + 2\pi(R^2 - s^2) & r \leqslant s \leqslant R , \\ \frac{4\pi}{s} \cdot \int_r^R \varrho^2 \, d\varrho = \frac{4\pi(R^3 - r^3)}{3s} & R < s . \end{cases} \end{aligned}$$

Lösung 6.2
Es gibt eine orthogonale Matrix $g \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $D = g^t A g$ eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen auf der Diagonalen ist. Offenbar gibt es eine ebensolche Matrix C, so dass $D = C^2$. Setze $B = gCg^t$. Dann ist $B^t = gC^t g^t = gCg^t = B$ symmetrisch und hat lauter positive Eigenwerte; also ist B positiv definit. Weiter gilt $B^2 = gCg^t gCg^t = gC^2 g^t = gDg^t = A$.
Es gilt $(x : Ax)_2 = \|Bx\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Mit der Transformationsformel folgt

$$\lambda^n(E) = \lambda^n(B(\mathbb{B}_1)) = \frac{1}{\det B} \cdot \lambda^n(\mathbb{B}_1) = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} ,$$

sowie mit der Formel für rotationssymmetrische Funktionen

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x:Ax)} \, dx = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} \, dx = \frac{2\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} \, dr$$

Mit der Substitution $t = r^2$, $dt = 2r \, dr$, folgt $\int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} \, dr = \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, also

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x:Ax)} \, dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}} .$$

Bemerkung: Da $e^{-\|x\|_2^2} = e^{-x_1^2} \cdots e^{-x_n^2} > 0$, kann man auch mit dem Satz von Tonelli rechnen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2} \, dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx \right)^n = \pi^{n/2} .$$

Lösung 6.3
Definiere für $\varrho > 0$ und $t_2, t_3 \in]-\pi, \pi[$

$$\phi(\varrho, t_2, t_3) = \big((R + \varrho \cos t_3) \cos t_2, (R + \varrho \cos t_3) \sin t_2, \varrho \sin t_3 \big) .$$

Es gilt

$$\det D\phi(\varrho, t_2, t_3) = \begin{vmatrix} \cos t_3 \cdot \cos t_2 & -(R + \varrho \cos t_3) \sin t_2 & -\varrho \sin t_3 \cos t_2 \\ \cos t_3 \sin t_2 & (R + \varrho \cos t_3) \cos t_2 & -\varrho \sin t_3 \sin t_2 \\ \sin t_3 & 0 & \varrho \cos t_3 \end{vmatrix}$$

$$= \varrho(R+\varrho\cos t_3)\big(\cos^2 t_3\cos^2 t_2+\sin^2 t_3\sin^2 t_2+\sin^2 t_3\cos^2 t_2+\cos^2 t_3\sin^2 t_2\big)$$
$$= \varrho(R+\varrho\cos t_3)\,.$$

Es folgt mit der Transformationsformel und dem Satz von Tonelli

$$\begin{aligned}\lambda^3(T) &= \int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1_K\big(R+\varrho\cos t_2,0,\varrho\sin t_2\big)\varrho(R+\varrho\cos t_3)\,dt_2\,dt_3\,d\varrho\\ &= 2\pi\int_0^r\int_{-\pi}^{\pi}\varrho(R+\varrho\cos t_3)\,d\varrho = 2\pi(\pi Rr^2+0) = 2\pi^2r^2R\,.\end{aligned}$$

Eine **Alternativlösung** besteht darin, den Torus zu einem Zylinder 'geradezubiegen': Sei

$$\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:(x,y,t)\mapsto k_t^2\cdot\begin{pmatrix}x\\0\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(R+x)\cos t\\(R+x)\sin t\\y\end{pmatrix}$$

Dann ist die Abbildung ψ auf einer Umgebung von $\mathbb{B}_r^2\times]-\pi,\pi[$ ein Diffeomorphismus auf ihr Bild und $T\setminus\psi(\mathbb{B}_r^2\times]-\pi,\pi[)$ ist eine Nullmenge. Weiter gilt

$$\det D\psi(x,y,t) = \begin{vmatrix}\cos t & 0 & -(R+x)\sin t\\ \sin t & 0 & (R+x)\cos t\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix} = -(R+x)\,.$$

Es folgt

$$\lambda^3(T) = \int_{\mathbb{B}_r^2}\int_0^{2\pi}(R+x)\,dt\,d(x,y) = 2\pi R\cdot\lambda^2(\mathbb{B}_r^2)+2\pi\int_{\mathbb{B}_r^2}x\,d(x,y) = 2\pi^2r^2R\,,$$

da

$$\int_{\mathbb{B}_r^2}x\,d(x,y) = \int_{\mathbb{B}_r^2,x>0}x\,d(x,y)+\int_{\mathbb{B}_r^2,x<0}x\,d(x,y) = \int_{\mathbb{B}_r^2,x>0}x\,d(x,y)-\int_{\mathbb{B}_r^2,x>0}x\,d(x,y) = 0\,.$$

Lösungsblatt 7

Lösung 7.1

Es gilt

$$(x,y,z)\in T \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2+(z-R)^2\leqslant r^2\,,$$

definiere also $k(x,y,z) = x^2+y^2+(z-R)^2-r^2$. Dann ist $k:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $T=\{k\leqslant 0\}$. Es gilt

$$\operatorname{grad} k(x,y,z) = 2\cdot(x,y,z-R)^t\,.$$

Falls $k(x,y,z)=0$, d.h. $x^2+y^2+(z-R)^2=r^2$, gilt $x\neq 0$, $y\neq 0$ oder $z\neq R$. Damit ist in diesem Fall $\operatorname{grad} k(x)\neq 0$, also linear unabhängig, und T ist eine UMF mit Rand der Dimension 3. Insbesondere ist $T_x(T)=\mathbb{R}^3$ für alle $x\in T$.

Für den Rand von T gilt

$$\partial T = \{k=0\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+(z-R)^2 = r^2\right\}$$

Für den Rand ist die Funktion k also eine Funktion h wie in Theorem 2.2.1. Es folgt für den Tangentialraum an $(x,y,z) \in \partial T$

$$\begin{aligned} T_{(x,y,z)}(\partial T) &= \ker Dk(x,y,z) = \left\{(u,v,w) \;\middle|\; ((u,v,w) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z-R)) = 0\right\} \\ &= \left\{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ux+vy+w(z-R) = 0\right\}. \end{aligned}$$

Etwa ist für $x \neq 0$ eine Basis des Tangentialraums von ∂T an (x,y,z) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -\frac{y}{x} \\ 1 \\ R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{z}{x} \\ 0 \\ R+1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 7.2

Man definiert $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch $h(x,y,z) = \big(f(x,y,z), g(x,y,z)\big)$. Dann gilt $C = \{h=0\}$ und

$$Dh(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y & x-1 & -1 \\ 4x+3y & 3x-2 & -3 \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Es zu zeigen, dass h bei C eine Submersion ist, d.h., dass $\operatorname{rk} Dh(x,y,z) = 2$ für alle (x,y,z) in einer Umgebung von C. Es gilt

$$\operatorname{rk} Dh(x,y,z) = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 2x & -1 & 0 \\ 4x+3y & 3x-2 & -3 \end{pmatrix} = 2 \quad \text{für alle } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Es folgt, dass C eine UMF (ohne Rand) der Dimension $3-2=1$ ist.
Nun betrachte man $\phi(t) = (t,t^2,t^3)$. Es gilt

$$f(\phi(t)) = t^2 + t \cdot t^2 - t^2 - t^3 = 0 \quad \text{und} \quad g(\phi(t)) = 2t^2 + 3t \cdot t^2 - 2t^2 - 3t^3 = 0,$$

also gilt $\phi(\mathbb{R}) \subset C$. Umgekehrt gilt $(g-2f)(x,y,z) = xy - z$, also für $(x,y,z) \in C : xy = z$. Für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit $xy = z$ gilt $f(x,y,z) = x^2 - y$. Daher gilt für $(x,y,z) \in C$ auch $y = x^2$. Damit ist ϕ surjektiv. Da $\mathrm{pr}_1 \circ \phi = \mathrm{id}$, ist ϕ auch injektiv.
Bleibt zu zeigen, dass die Ableitung von ϕ überall Rang 1 hat. Aber es gilt $D\phi(t) = \phi'(t) = (1,2t,3t^2) \neq 0$, also die Behauptung.

Lösung 7.3

(a). Dies sieht man leicht ein, vgl. das Beispiel in der Vorlesung zur Einheitskugel.

(b). Definiere

$$\phi(x,y,z) = \left(\sqrt{r}^{-1} \cdot \sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{r}^{-1} \cdot (z-R), \sqrt{r^2-(z-R)^2}^{-1} \cdot x, \sqrt{r^2-(z-R)^2}^{-1} \cdot y\right).$$

Dann gilt für $(x,y,z) \in \partial T$ und $(a,b,c,d) = \phi(x,y,z)$

$$a^2 + b^2 = \frac{x^2 + y^2 + (z-R)^2}{r^2} = 1 \quad \text{und} \quad c^2 + d^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2 - (z-R)^2} = 1\,,$$

ist $\phi : \partial T \to \mathbb{T}^2$ wohldefiniert. ϕ ist in einer offenen Umgebung von ∂T stetig differenzierbar. Definiert man

$$\psi(x,y,z,w) = \left(\sqrt{r^2 - r \cdot y^2} \cdot z, \sqrt{r^2 - r \cdot y^2} \cdot w, \sqrt{\cdot} y + R\right)\,,$$

so gilt $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\partial T}$ und $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathbb{T}^2}$, also ist ϕ bijektiv.

Lösungsblatt 8

Lösung 8.1

Sei $(x,y) \in X \times Y$. Es gibt reguläre $\mathcal{C}^q$-Parametrisierungen $\phi_1 : U_1 \to X$ an x und $\phi_2 : U_2 \to Y$ an y, wobei $U_1 \subset [-\infty, 0[\times \mathbb{R}^{m_1-1}$ eine offene Menge mit Rand ist und $U_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ eine offene Menge. Dann ist $U = U_1 \times U_2 \subset [-\infty, 0[\times \mathbb{R}^{m_1+m_2-1}$ eine offene Menge mit Rand $\partial U = U \cap (0 \times \mathbb{R}^{m_1+m_2-1}) = \partial U_1 \times U_2$. Weiterhin ist $\phi : U \to X \times Y$, $\phi(u_1,u_2) = (\phi_1(u_1), \phi_2(u_2))$ eine injektive $\mathcal{C}^q$-Abbildung mit Ableitung

$$D\phi(u_1,u_2) = \begin{pmatrix} D\phi_1(u_1) & 0 \\ 0 & D\phi_2(u_2) \end{pmatrix}\,,$$

also

$$\operatorname{rk} D\phi(u_1,u_2) = \operatorname{rk} D\phi_1(u_1) + \operatorname{rk} D\phi_2(u_2) = m_1 + m_2\,.$$

Es folgt, dass ϕ eine reguläre Parametrisierung von $X \times Y$ an (x,y) ist, denn $(x,y) \in \phi(U)$ und $\phi(U) = \phi_1(U_1) \times \phi_2(U_2)$ ist offen in $X \times Y$, da $\phi_1(U_1)$ offen in X und $\phi_2(U_2)$ offen in Y ist. Insbesondere ist $X \times Y$ eine Untermannigfaltigkeit mit Rand der Dimension $m_1 + m_2$.

Weiterhin ist qua Definition

$$\partial(X \times Y) \cap \phi(U) = \phi(\partial U) = \phi(\partial U_1 \times U_2) = \phi_1(\partial U_1) \times \phi_2(U_2) = (\partial X \times Y) \cap \phi(U)\,,$$

also $\partial(X \times Y) = \partial X \times Y$.

Es gilt für den Tangentialraum, wenn $x = \phi_1(u_1)$ und $y = \phi_2(u_2)$, dass

$$\begin{aligned} T_{(x,y)}(X \times Y) &= D\phi(u_1,u_2)(\mathbb{R}^{m_1} \oplus \mathbb{R}^{m_2}) \\ &= D\phi_1(u_1)(\mathbb{R}^{m_1}) \oplus D\phi_2(u_2)(\mathbb{R}^{m_2}) = T_x(X) \oplus T_y(Y)\,. \end{aligned}$$

Lösung 8.2

Seien $U = \mathbb{R}^2 \times]0,1[\cup \mathbb{R}^2 \times]-1,0[$ und $h : U \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$. Dann gilt $K = \{h =$

$0\}$. Da h $\mathcal{C}^\infty$ ist und

$$\operatorname{grad} h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{für alle } \ 0 < z^2 < 1\,,$$

folgt, dass K eine Untermannigfaltigkeit (ohne Rand) der Dimension $2 = 3 - 1$ ist.
Wir geben eine lokale reguläre Parametrisierung von K an, deren Bild K bis auf eine Nullmenge überdeckt. Sei dazu

$$\phi : V = \big(]-1,1[\setminus 0\big)\times]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^3 : (r,t) \mapsto (r\cos t, r\sin t, r)\,.$$

Dann gilt: ϕ ist injektiv, unendlich oft differenzierbar, $\phi(V) \subset K$, $K \setminus \phi(V) \subset \mathbb{R}\cdot(-1,0,1)$.
Folglich ist ϕ eine reguläre Parametrisierung und $K\setminus\phi(V)$ ist eine λ_K-Nullmenge.
Nun berechnen wir die Gramsche Determinante bezüglich ϕ . Es gilt

$$D\phi(r,t) = \begin{pmatrix} \cos t & -r\sin t \\ \sin t & r\cos t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

also

$$g(r,t) = \begin{vmatrix} \cos^2 + \sin^2 t + 1 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t \end{vmatrix} = 2r^2\,.$$

Es folgt

$$\operatorname{vol}_2(K) = \sqrt{2}\cdot \int_{-1}^{1}\int_{-\pi}^{\pi} |r|\,dt\,dr = 2\sqrt{2}\pi\,.$$

D.h., die Doppelkegeloberfläche berechnet sich wie der Flächeninhalt zweier gleichschenkliger Dreiecke: Ein gleichschenkliges Dreieck der Höhe h und der Breite b hat den Flächeninhalt $\frac{h\cdot b}{2}$.
In unserem Fall hat die Basis Breite 2π und die Höhe des Dreiecks ist (nach Pythagoras) gerade $\sqrt{2}$.

Lösung 8.3

(a). Eine reguläre Parametrisierung von ∂T ist gegeben durch

$$\phi : U =]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[: (s,t) \mapsto \big((R + r\cos t)\cos s, (R + r\cos t)\sin s, r\sin t\big)$$

Es ist

$$\partial T \setminus \phi(U) \subset \big\{(R+x,0,y) \bigm| (x-R)^2 + y^2 = r^2\big\} \cup \big\{((R+r)x,(R+r)y,0) \bigm| x^2+y^2 = 1\big\}\,,$$

wobei die rechte Seite die Vereinigung von zwei Untermannigfaltigkeiten der Dimension 1 ist, also eine $\lambda_{\partial T}$-Nullmenge.

Es gilt

$$D\phi(s,t) = \begin{pmatrix} -(R + r\cos t)\sin s & -r\sin t\cos s \\ (R + r\cos t)\cos s & -r\sin t\sin s \\ 0 & r\cos t \end{pmatrix}$$

Die Gramsche Determinante bzgl. ϕ ist somit

$$g(s,t) = \begin{vmatrix} (R + r\cos t)2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^2(R + r\cos t)^2 \,.$$

Es folgt $\sqrt{g(s,t)} = r \cdot (R + r\cos t)$, da $0 < r < R$ und $-1 \leqslant \cos t \leqslant 1$. Somit

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(\partial T) &= r \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (R + r\cos t)\, ds\, dt = 2\pi r \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} R\, dt + r \int_{-\pi}^{\pi} \cos t\, dt \right) \\ &= 4\pi^2 rR + 0 = (2\pi r) \cdot (2\pi R) \,. \end{aligned}$$

(b). Die Abbildung $\varphi : \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \partial T$ hat die $\mathcal{C}^1$-Fortsetzung

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : (u,v,x,y) \mapsto ((R + rx)u, (R + rx)v, ry) \,.$$

Insbesondere ist die Tangentialabbildung von φ durch Einschränkung der Ableitung von $\tilde{\varphi}$ gegeben. Es gilt für $(u,v,x,y) \in \mathbb{T}^2$

$$D\tilde{\varphi}(u,v,x,y) = \begin{pmatrix} R & 0 & ru & 0 \\ 0 & R & rv & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix} \,,\; T = (D\tilde{\varphi}^t D\tilde{\varphi})(u,v,x,y) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 & rRu & 0 \\ 0 & R^2 & rRv & \\ rRu & rRv & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix} .$$

Der Tangentialraum $T_{(x,y,u,v)}(\mathbb{T}^2)$ hat die Orthonormalbasis

$$b_1 = \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y \\ x \end{pmatrix} .$$

Es gilt

$$Tb_1 = R^2 \cdot b_1 \quad \text{und} \quad Tb_2 = R^2 \cdot b_2 \,,$$

also die Determinante von $T_{(u,v,x,y)}(\phi)^t T_{(u,v,x,y)}(\phi) = T$ gerade das Produkt der beiden Eigenwerte R^2 und r^2 , d.h. gleich $r^2 R^2$.

Es folgt

$$\mathrm{vol}_2(\partial T) = \int_{\mathbb{T}^2} \sqrt{\det T}\, d\lambda_{\mathbb{T}^2} = rR \cdot \mathrm{vol}_1(\mathbb{S}^1)^2 = 4\pi^2 rR \,.$$

Man kann **alternativ** mit der Umkehrabbildung von φ rechnen, aber dies ist viel aufwändiger: Der Diffeomorphismus $\psi = \varphi^{-1} : \partial T \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ ist gegeben durch

$$\psi(xu, xv, y) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{x-R}{r} \\ \frac{y}{r} \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (xu, xv, y) \in \partial T \,,\; (x-R)^2 + y^2 = r^2 \,,\; u^2 + v^2 = 1 \,.$$

Insbesondere gilt

$$(\varphi \circ \phi)(s,t) = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad D(\varphi \circ \phi)(s,t) = \begin{pmatrix} -\sin s & 0 \\ \cos s & 0 \\ 0 & -\sin t \\ 0 & \cos t \end{pmatrix}.$$

Für die Gramsche Determinante $\tilde{g}$ bezüglich $\psi \circ \phi$ gilt

$$\tilde{g}(s,t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\,,$$

also für $(xu, xv, y) = \phi(s,t)$, d.h. $(u,v,x,y) = (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t)$

$$\det T_{(x,y,z)}(\psi)^t T_{(x,y,z)}(\phi) = \frac{\tilde{g}(s,t)}{g(s,t)} = \frac{1}{r^2(R + r\cos t)^2} = \frac{1}{r^2(R + r\cdot x)^2}\,.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(\partial T) &= r \int_{\mathbb{S}^1}\int_{\mathbb{S}^1} (R + rx)\, d\lambda_{\mathbb{S}^1}(u,v)\, d\lambda_{\mathbb{S}^1}(x,y) = r\,\mathrm{vol}_1(\mathbb{S}^1)\cdot \int (R+rx)\, d\lambda_{\mathbb{S}^1}(x,y) \\ &= Rr\,\mathrm{vol}_1(\mathbb{S}^1)^2 = 4\pi^2 rR\,. \end{aligned}$$

Lösungsblatt 9

Lösung 9.1

(a). Mit $r = \|x\|$ gilt $E(x) = f(r)\cdot r^{-1}\cdot x$ und für $r \leqslant R - \varepsilon$

$$\begin{aligned} 0 = Q(r) &= \int_{\mathbb{B}^3_r(0)} \varrho\, d\lambda^3 = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{B}^3_r(0)} \mathrm{div}\, E\, d\lambda^3 \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{S}^2_r(0)} (E(x) : n_x)\, d\lambda_{\mathbb{S}^2_r(0)}(x) = f(r)\cdot \mathrm{vol}_2(\mathbb{S}^2_r(0)) = 4\pi r^2 f(r)\,, \end{aligned}$$

also $E(x) = f(r)\cdot \frac{x}{r} = 0$.

(b). Dies folgt mit der gleichen Rechnung wie in (i), da für alle $r \geqslant R + \varepsilon$ gilt $Q(r) = Q$.

Lösung 9.2

(a). Es gilt $\gamma^*(df) = d(f\circ\gamma) = (f\circ\gamma)'\,dt$, also

$$\int_\gamma df = \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)\,dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,.$$

(b). Es gilt

$$\gamma_n^*(dx) = d(r\cdot\cos(2\pi nt)) = -2\pi rn\sin(2\pi nt)\,dt \quad \text{und} \quad \gamma_n^*(dy) = 2\pi rn\cos(2\pi nt)\,dt\,,$$

also

$$\gamma_n^*\omega = \frac{2\pi r^2 n\cos^2(2\pi nt)\,dt + 2\pi r^2 n\sin^2(2\pi nt)\,dt}{r^2} = 2\pi n\,dt\,.$$

Es folgt

$$\int_{\gamma_n}\omega = 2\pi n\int_0^1 dt = 2\pi n\,.$$

(c). Da $\gamma_n(0) = \gamma_n(1)$ ist, gilt $\int_{\gamma_n} df = 0$ für alle $\mathcal{C}^1$-Funktionen $f : \mathbb{R}^2\setminus 0 \to \mathbb{R}$. Andererseits ist $\int_{\gamma_n}\omega \neq 0$ für alle $n \neq 0$. Es folgt die Behauptung.

Lösung 9.3
Es gilt

$$\dot\alpha(t) = \big((\sin t + t\cos t)e^{t\sin t}, 2t - 2\pi, -\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{t}{2}\big)\,,$$

also

$$\alpha^*(dx) = (\sin t + t\cos t)e^{t\sin t}\,dt\,,\ \alpha^*(dy) = (2t-2\pi)\,dt\,,\ \alpha^*(dz) = -\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{t}{2}\,dt\,,$$

wobei t die identische Funktion von $\mathbb{R}$ bezeichne. Es folgt

$$\alpha^*(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = \big((\sin t + t\cos t)e^{2t\sin t} + (t^2 - 2\pi t)(2t-2\pi) - \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{t}{2}\big)\,dt$$

Somit

$$\int_\alpha x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}e^{2t\sin t}\,\Big|_{t=0}^{2\pi} + 2\cdot\Big(\frac{t^4}{4} - \pi t^3 + \pi^2 t^2\Big)\,\Big|_{t=0}^{2\pi} - \int_0^\pi \cos t\sin t\,dt = 0\,.$$

Ähnlich gilt

$$\alpha^*(z\,dy) = 2\cos\tfrac{t}{2}\cdot(t-\pi)\,dt\,,$$

also mit der Substitution $s = 2\pi - t$, $ds = -dt$,

$$\begin{aligned}\int_\alpha z\,dy &= 2\int_0^\pi \cos\tfrac{t}{2}\cdot(t-\pi)\,dt - 2\int_0^\pi \cos\big(\pi - \tfrac{s}{2}\big)\cdot(\pi - s)\,ds\\ &= 2\int_0^\pi \cos\tfrac{t}{2}\cdot(t-\pi)\,dt - 2\int_0^\pi \cos\tfrac{s}{2}\cdot(s-\pi)\,ds = 0\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: Wir werden später sehen, dass man die Integrale auf sehr viel einfachere Weise berechnen kann, da die Kurve α durch eine beliebige andere ersetzt werden kann, die die gleichen Anfangs- und Endpunkte (also $(0,0,1)$ und $(0,0,-1)$) besitzt.

Lösungsblatt 10

Lösung 10.1
Sei zunächst γ eine geschlossene $\mathcal{C}^1$-Kurve. Es gilt mit partieller Integration und Kettenregel

$$\int_0^1 f_i(\gamma(t))\dot\gamma_i(t)\,dt = f_i(\gamma(t))\gamma_i(t)\,\Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 (f_i\circ\gamma)'(t)\gamma_i(t)\,dt$$

$$= -\sum_{j=1}^{m}\int_0^1 \frac{\partial f_i(\gamma(t))}{\partial x_j}\cdot \dot\gamma_j(t)\gamma_i(t)\,dt\,.$$

Setze $\gamma_s(t) = s\gamma(t)$. Dann folgt mit $\int_{\gamma_s}\omega = \sum_{j=1}^m \int_0^1 f_j(s\gamma(t))\cdot s\dot\gamma_j(t)\,dt$ und Produktregel

$$\frac{d}{ds}\int_{\gamma_s}\omega = \sum_{i,j=1}^{m}\int_0^1 \frac{\partial f_j(s\gamma(t))}{\partial x_i}\gamma_i(t)\dot\gamma_j(t) + \sum_{i=1}^{m}\int_0^1 f_i(s\gamma(t))\gamma_i(t)\,dt\,.$$

Da $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ist, ist dies mit der obigen Gleichung, angewandt auf γ_s, gleich Null. Da man sich auf Teilintervalle einschränken kann, ist das gleiche Argument für stückweise $\mathcal{C}^1$-Kurven richtig. Daher ist die Funktion $s \mapsto \int_{\gamma_s}\omega$ in jedem Fall konstant. Es folgt

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_0}\omega = 0\,.$$

Aus dem Satz in der Vorlesung folgt nun, dass es eine $\mathcal{C}^1$-Funktion f mit $df = \omega$ gibt, d.h., ω ist exakt.

Lösung 10.2

(a). Es gilt

$$df = \partial_x f\,dx + \partial_y f\,dy \quad \text{und} \quad g\,dz = g\,dx + ig\,dy\,,$$

also ist $df = g\,dz$ für ein g genau dann, wenn $\partial_x f = -i\partial_y f$, d.h., genau dann, wenn f holomorph ist.

Es ist $f\,dz = f\,dx + if\,dy$ geschlossen genau dann, wenn $\partial_x(if) = \partial_y f$, d.h., genau dann, wenn f holomorph ist.

(b). Gelte $df_j = g_j\,dz$, $j = 1,2$. Dann folgt $d(f_1\cdot f_2) = f_1\,df_2 + f_2\,df_1 = (f_1g_2 + g_1f_2)\,dz$, also ist $f_1\cdot f_2$ holomorph.

Es gilt für $df = g\,dz$

$$d\left(\tfrac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\cdot\left(\partial_x f\,dx + \partial_y f\,dy\right) = -\frac{1}{f^2}\cdot df = -\frac{g}{f^2}\,dz\,,$$

also ist $\frac{1}{f}$ holomorph.

(c). Es ist $f\,dz$ geschlossen, also folgt die Aussage aus Aufgabe 1.

Lösung 10.3

Sei $p(z) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$. Man nehme an, dass $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Einerseits ist $f(z) = \frac{z^{n-1}}{p(z)}$ holomorph, also $\int_\gamma f\,dz = 0$ für alle geschlossenen Kurven γ. Andererseits gilt für die Kurve $\gamma_1(t) = re^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$,

$$\int_{\gamma_1}\frac{z^{n-1}\,dz}{p(z)} = 2\pi i\int_0^1 \frac{(re^{2\pi i t})^n\,dt}{p(re^{2\pi i t})}\,.$$

Mit $u = e^{2\pi i t}$ gilt

$$\frac{(ru)^n}{(ru)^n + a_{n-1}(ru)^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{1}{1 + a_{n-1}(ru)^{-1} + \cdots + a_0(ru)^{-n}} \to 1\,.$$

Mit dem Satz von Lebesgue folgt $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_1} f\,fz = 2\pi i$, Widerspruch! Folglich hat p eine Nullstelle.

Hier kurz die Begründung für die Formel $\int_\gamma f\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt$: Es gilt mit $f = g + ih$ und $\gamma = \alpha + i\beta$: $f\,dz = g\,dx - h\,dy + i(g\,dy + h\,dx)$, also

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\,dz &= \int_\gamma g\,dx - h\,dy + i\int_\gamma g\,dy + h\,dx \\
&= \int_0^1 (g\circ\gamma\cdot\dot\alpha - h\circ\gamma\cdot\dot\beta)\,d\lambda + i\int_0^1 (g\circ\gamma\cdot\dot\beta + h\circ\gamma\cdot\dot\alpha)\,d\lambda \\
&= \int_0^1 (g\circ\gamma\cdot\dot\gamma + ih\circ\gamma\cdot\dot\gamma)\,d\lambda = \int_0^1 f\circ\gamma\cdot\dot\gamma\,d\lambda\,.
\end{aligned}$$

Lösungsblatt 11

Lösung 11.1

(a). Es gilt

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz = \operatorname{grad} f \bullet (dx, dy, dz) = \operatorname{grad} f \bullet d\vec{s}\,.$$

Weiterhin

$$\begin{aligned}
d(v\bullet d\vec{s}) &= d\big(v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz\big) = dv_1\wedge dx + dv_2\wedge dy + dv_3\wedge dz \\
&= \operatorname{grad} v_1 \bullet (dx\wedge dx, dy\wedge dx, dz\wedge dx) + \operatorname{grad} v_2 \bullet (dx\wedge dy, dy\wedge dy, dz\wedge dy) \\
&\quad + \operatorname{grad} v_3 \bullet (dx\wedge dz, dy\wedge dz, dz\wedge dz) \\
&= (\partial_x v_2 - \partial_y v_1)\cdot dx\wedge dy + (\partial_z v_1 - \partial_x v_3)\cdot dz\wedge dx + (\partial_y v_3 - \partial_z v_2)\cdot dy\wedge dz \\
&= \operatorname{rot} v \bullet d\vec{S}\,.
\end{aligned}$$

Schließlich

$$\begin{aligned}
d(v\bullet d\vec{S}) &= d\big(v_1\,dy\wedge dz + v_2\,dz\wedge dx + v_3\,dx\wedge dy\big) \\
&= dv_1\wedge dy\wedge dz + dv_2\wedge dz\wedge dx + dv_3\wedge dx\wedge dy \\
&= \partial_x v_1\,dx\wedge dy\wedge dz + \partial_y v_2\,dy\wedge dz\wedge dx + \partial_z v_3\,dz\wedge dx\wedge dy = \operatorname{div} v\cdot dV\,.
\end{aligned}$$

(b). Es gilt

$$\begin{aligned}
(u\bullet d\vec{s})\wedge(v\bullet d\vec{s}) &= (u_1\,dx + u_2\,dy + u_3\,dz)\wedge(v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz) \\
&= u_1v_2\,dx\wedge dy + u_1v_3\,dx\wedge dz + u_2v_1\,dy\wedge dx \\
&\quad + u_2v_3\,dy\wedge dz + u_3v_1\,dz\wedge dx + u_3v_2\,dz\wedge dy \\
&= (u_2v_3 - u_3v_2)\,dy\wedge dz + (u_3v_1 - u_1v_3)\,dz\wedge dx + (u_1v_2 - u_2v_1)\,dx\wedge dy
\end{aligned}$$

$$= (u \times v) \bullet d\vec{S} \,.$$

Weiter

$$\begin{aligned}(u \bullet d\vec{S}) \wedge (v \bullet d\vec{S}) &= (u_1\,dx + u_2\,dy + u_3\,dz) \wedge (v_1\,dy \wedge dz + v_2\,dz \wedge dx + v_3\,dx \wedge dy) \\ &= u_1v_1\,dx \wedge dy \wedge dz + u_2v_2\,dy \wedge dz \wedge dx + u_3v_3\,dz \wedge dx \wedge dy = (u \bullet v)\,dV \,.\end{aligned}$$

Schließlich

$$(u \bullet d\vec{s}) \wedge (v \bullet d\vec{s}) \wedge (w \bullet d\vec{s}) = (u \bullet d\vec{s}) \wedge ((v \times w) \bullet d\vec{S}) = (u \bullet (v \times w))\,dV \,.$$

Es gilt

$$u \bullet (v \times w) = u_1v_2w_3 - u_1w_2v_3 + w_1u_2v_3 - v_1u_2w_3 + v_1w_2u_3 - w_1v_2u_3 = \det(u, v, w)$$

nach der Regel von Sarrus.

Lösung 11.2
Es gilt

$$d\omega = \operatorname{div}(2xz, 1, -(z^2 + e^x))\,dV = \big(2z - 2z\big)\,dV = 0\,.$$

Man macht den Ansatz $\eta = u \bullet d\vec{s}$. Dann gilt $d\eta = \operatorname{rot} u \bullet d\vec{S}$. Man muss also die folgenden Differentialgleichungen lösen:

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z} = 2xz\,,\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} = 1\,,\ \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = -z^2 - e^x\,.$$

Macht man den Ansatz $u_2 = e^x$, so reduziert sich dies auf

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = 2xyz\,,\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x} = 1\,,\ \frac{\partial u_1}{\partial y} = -yz^2$$

Setzt man $u_1 = -yz^2$, so ergibt sich $u_3 = -x + 2xyz$ bis auf Konstanten. Mit diesen Wahlen sind die Gleichungen aber erfüllt, d.h., man kann

$$\eta = -yz^2\,dx + e^x\,dy - x(1 - 2yz)\,dz$$

nehmen.

Lösung 11.3
Man nehme an, dass $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathbb{B}$. Es gilt $H(1, x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{B}$. Folglich ist $\beta = H_1^*\omega \in \Omega^1(\mathbb{B})$ wohldefiniert. β ist geschlossen, also exakt, da $\mathbb{B}$ kontrahierbar ist. Weiter ist $H : [0, 1] \times (\mathbb{R}^2 \setminus 0) \to (\mathbb{R}^2 \setminus 0)$ eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{id}$ nach H_1. Nach Vorlesung ist $\beta - \omega = H_1^*\omega - H_0^*\omega$ exakt. Da β exakt ist, ist auch ω exakt. Widerspruch!
Ist f lediglich stetig, so nimmt man an, dass $f(x) \neq x$ für alle $x \in \mathbb{B}$. Sei $\frac{1}{2} \geqslant \varepsilon > 0$ gegeben durch $0 < 2\varepsilon < \inf\big\{\|x - f(x)\|_2 \bigm| x \in \mathbb{B}\big\}$. Dann definiert man

$$\tilde{f}(x) = (1 - \varepsilon) f\Big(\frac{x}{\|x\|_2}\Big)\,.$$

Dann ist $\tilde{f}$ stetig auf $\mathbb{R}^2$ und $\|\tilde{f}(x)\|_2 \leqslant 1-\varepsilon$. Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar mit $\|\tilde{f}-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Dann gilt $g(\mathbb{B}) \subset \mathbb{B}$ und $\|f-g\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$. Wäre $g(x) = x$ für ein $x \in \mathbb{B}$, so würde $\|f(x)-g(x)\|_2 = \|f(x)-x\|_2 \leqslant 2\varepsilon$ folgen, ein Widerspruch! Also hat g keinen Fixpunkt, was wir aber bereits ausgeschlossen haben.

Lösungsblatt 12

Lösung 12.1

(a). Definiere $H : [0,1] \times X \times \mathbb{R}^n \to X \times \mathbb{R}^n$ durch $H(t,x,y) = (x,ty)$. Dann gilt

$$H_0(x,y) = (x,0) = (g \circ f)(x,y) \quad \text{und} \quad H_1(x,y) = (x,y)$$

für alle $(x,y) \in X \times \mathbb{R}^n$. Da H offensichtlich $\mathcal{C}^\infty$ ist, folgt $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{X\times\mathbb{R}^n}$.

(b). Umgekehrt gilt $f \circ g = \mathrm{id}_X$, also folgt

$$\mathrm{H}^k(f) \circ \mathrm{H}^k(g) = \mathrm{id} \quad \text{und} \quad \mathrm{H}^k(g) \circ \mathrm{H}^k(f) = \mathrm{id}\ .$$

Somit sind $H^k(f)$ und $H^k(g)$ zu einander inverse lineare Isomorphismen. Es folgt die Behauptung.

Lösung 12.2

(a). ϕ ist injektiv: Sei $0 = \phi(\omega) = (\omega|U_1, \omega|U_2)$. Da $U_1 \cup U_2 = X$, ist damit $\omega = 0$.

ψ ist surjektiv: Sei $\omega \in \Omega^k(U_1 \cap U_2)$. Sei φ_j, $j = 1,2$, eine (U_1,U_2) untergeordnete $\mathcal{C}^\infty$-Teilung der Eins, d.h. $\operatorname{supp}\varphi_j \subset U_j$ und $1 = \varphi_1 + \varphi_2$. Die Differentialformen $\varphi_j \cdot \omega$, für $j = 1,2$, sind außerhalb einer in $U_1 \cap U_2$ enthaltenen abgeschlossenen Menge gleich Null. Ist α die Fortsetzung von $\varphi_1 \cdot \omega$ durch Null auf U_1 und β die Fortsetzung von $-\varphi_2 \cdot \omega$ durch Null auf U_2, so sind α, β der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ und $\psi(\alpha,\beta) = (\varphi_1+\varphi_2)\cdot\omega = \omega$.

$\ker\psi = \operatorname{bild}\phi$: Es gilt $\psi \circ \phi = 0$, also $\ker\psi \supset \operatorname{bild}\phi$. Sei umgekehrt $\psi(\alpha,\beta) = 0$, d.h. $\alpha|U_1 \cap U_2 = \beta|U_1 \cap U_2$. Definiere $\omega \in \Omega^k(X)$ durch

$$\omega(x) = \begin{cases} \alpha(x) & x \in U_1\ , \\ \beta(x) & x \in U_2\ . \end{cases}$$

Dann gibt es für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ von x, so dass $\omega|U = \alpha|U$ oder $\omega|U = \beta|U$. Da α und β der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ sind, ist ω der Klasse $\mathcal{C}^\infty$. Es gilt $\phi(\omega) = (\alpha,\beta)$.

(b). Zunächst ist klar, dass

$$\phi(\mathrm{Z}^k(X)) \subset \mathrm{Z}^k(U_1) \times \mathrm{Z}^k(U_2) \quad \text{und} \quad \psi(\mathrm{Z}^k(U_1) \times \mathrm{Z}^k(U_2)) \subset \mathrm{Z}^k(U_1 \cap U_2)$$

ist. Der Fall $k = 0$ ist somit klar aus (i), da $B^0(\cdots) = 0$ ist. Folglich kann man $k \geqslant 1$ annehmen.

Ist $\omega \in B^k(X)$, d.h. $\omega = d\alpha$, so folgt $\phi(\omega) = (d(\alpha|U_1), d(\alpha|U_2))$, also

$$\phi(B^k(X)) \subset B^k(U_1) \times B^k(U_2) .$$

Ähnlich folgt

$$\psi(B^k(U_1) \times B^k(U_2)) \subset B^k(U_1 \cap U_2)$$

und ebenso die Invarianz von Z^k. Somit sind ϕ_k und ψ_k wohldefiniert und linear.

Da $\psi_k \circ \phi_k = 0$, wie aus $\psi \circ \phi = 0$ folgt, gilt $\operatorname{bild} \phi_k \subset \ker \psi_k$. Sei $\psi_k([\alpha], [\beta]) = 0$, d.h. $\alpha|U_1 \cap U_2 - \beta|U_1 \cap U_2$ ist exakt. Dann gibt es also $\gamma \in \Omega^{k-1,\infty}(U_1 \cap U_2)$ mit

$$d\gamma = \alpha|U_1 \cap U_2 - \beta|U_1 \cap U_2 .$$

Aus (a) folgt, dass es $\tilde{\alpha} \in \Omega^{k-1,\infty}(U_1)$, $\tilde{\beta} \in \Omega^{k-1,\infty}(U_2)$ gibt mit $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} = \gamma$. Es folgt

$$\psi(\alpha - d\tilde{\alpha}, \beta - d\tilde{\beta}) = \alpha|U_1 \cap U_2 - \beta|U_1 \cap U_2 - d\gamma = 0 .$$

Aus (a) folgt, dass es $\omega \in \Omega^{k,\infty}(X)$ mit $\phi(\omega) = (\alpha - d\tilde{\alpha}, \beta - d\tilde{\beta})$ gibt. Somit

$$\phi_k([\omega]) = ([\alpha - d\tilde{\alpha}], [\beta - d\tilde{\beta}]) = ([\alpha], [\beta]) .$$

Damit ist $\operatorname{bild} \phi_k = \ker \psi_k$.

(c). Zunächst zeigen wir, dass zu $\alpha \in Z^{k-1}(U_1 \cap U_2)$ Formen $\alpha_j \in \Omega^{k-1,\infty}(U_j)$, $j = 1, 2$, und $\beta \in Z^k(X)$ existieren, so dass

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha \quad \text{und} \quad \phi(\beta) = (d\alpha_1, d\alpha_2) .$$

Die Existenz von α_1, α_2 folgt aus der Surjektivität von ψ. Dann ist $d\alpha = 0$, also

$$\psi(d\alpha_1, d\alpha_2) = d\alpha_1|U_1 \cap U_2 - d\alpha_2|U_1 \cap U_2 = d\alpha = 0 .$$

Aus (i) folgt die Existenz von $\beta \in \Omega^k(X)$ mit $\beta|U_1 = d\alpha_1$ und $\beta|U_2 = d\alpha_2$. Es folgt insbesondere $d\beta|U_j = d(d\alpha_j) = 0$. Da $X = U_1 \cup U_2$ ist, ist $d\beta = 0$, also $\beta \in Z^k(X)$.

Zur Wohldefiniertheit von δ_{k-1}: Der Fall $k = 1$ ist klar, man kann $k \geqslant 2$ annehmen. Zunächst ist einzusehen, dass $[\beta]$ von der Wahl von (α_1, α_2) unabhängig ist. Es ist β aufgrund der Injektivität von ϕ durch $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ eindeutig bestimmt. Ist α_1', α_2' eine andere Wahl, so ist $(\alpha_1' - \alpha_1, \alpha_2' - \alpha_2) = \phi(\beta')$ für ein $\beta' \in \Omega^{k-1,\infty}(X)$. Demzufolge ist (α_1', α_2') dann $\beta + d\beta'$ zugeordnet, denn

$$\phi(\beta + d\beta) = (d\alpha_1 + d(\alpha_1' - \alpha_1), d\alpha_2 + d(\alpha_2' - \alpha_2)) = (d\alpha_1', d\alpha_2') .$$

Es gilt $[\beta] = [\beta + d\beta']$, also ist $[\beta]$ von der Wahl von (α_1, α_2) unabhängig.

Als nächstes ist zu zeigen, dass $[\beta]$ von der Wahl des Repräsentanten α von $[\alpha]$ unabhängig ist. Sei $[\alpha] = 0$, also α exakt. Es gibt $\gamma \in \Omega^{k-2,\infty}(X)$ mit $d\gamma = \alpha$, sowie $\gamma_j \in \Omega^{k-2.\infty}(U_j)$ mit $\phi(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma$. Man kann folglich $\alpha_j = d\gamma_j$ wählen. Es folgt $\phi(\beta) = (0, 0)$. Da ϕ injektiv ist, ist $\beta = 0$. Somit ist δ_{n-1} wohldefiniert.

Die Linearität von δ_{n-1} ist sofort aus der Definition klar, da ϕ und ψ linear sind. Gilt, dass $[\alpha] \in \operatorname{bild} \psi_{k-1}$, so können die $\alpha_j \in Z^{k-1}(U_j)$ gewählt werden und es folgt $\beta \in B^k(X)$, also gilt $\delta_{k-1}([\alpha]) = 0$. Ist umgekehrt $\delta_{k-1}([\alpha]) = 0$, so gilt $d\alpha_j = 0$, d.h., $\alpha_j \in Z^{k-1}(U_j)$ und $\psi_{k-1}([\alpha_1], [\alpha_2]) = [\alpha]$. Somit ist gezeigt, dass $\ker \delta_{k-1} = \operatorname{bild} \phi_{k-1}$.

Ist $[\beta] = \delta_{k-1}([\alpha])$, so folgt $\phi_k([\beta]) = ([d\alpha_1], [d\alpha_2]) = 0$. Ist umgekehrt $\phi_k([\beta]) = 0$, so gibt es $\tilde{\alpha}_j \in \Omega^{k-1,\infty}(U_j)$ mit $\phi(\beta) = (d\tilde{\alpha}_1, d\tilde{\alpha}_2)$. Es folgt

$$d(\tilde{\alpha}_1 | U_1 \cap U_2 - \tilde{\alpha}_2 | U_1 \cap U_2) = \psi(\phi(\beta)) = 0\,,$$

also $\alpha = \phi(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \in Z^{k-1}(U_1 \cap U_2)$. Nach Definition folgt $\delta_{k-1}([\alpha] = [\beta]$. Damit ist $\operatorname{bild} \delta_{k-1} = \ker \phi_k$.

(d). Die Mengen U_j sind beide diffeomorph zu der offenen n-dimensionalen Einheitskugel, also kontrahierbar. Es folgt $\mathrm{H}^k_{dR}(U_1) \times \mathrm{H}^k_{dR}(U_2) = 0$, falls $k > 0$. Da $U_1 \cap U_2$ diffeomorph zu $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ ist, folgt $\mathrm{H}^k_{dR}(U_1 \cap U_2) \cong \mathrm{H}^k(\mathbb{S}^{n-1})$ aus Aufgabe 1.

Für $k \geqslant 2$ bekommt man

$$0 \xrightarrow{\psi_{k-1}} \mathrm{H}^{k-1}_{dR}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\delta_{k-1}} \mathrm{H}^k_{dR}(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\psi_k} 0$$

Es folgt $\ker \delta_{k-1} = 0$ und $\operatorname{bild} \delta_{k-1} = \mathrm{H}^k_{dR}(\mathbb{S}^n)$. Damit ist δ_{n-1} ein Isomorphismus und $\mathrm{H}^k_{dR}(\mathbb{S}^n) \cong \mathrm{H}^1_{dR}(\mathbb{S}^{n-k+1})$ für alle $2 \leqslant k \leqslant n$.

Für $k = 1$ beachte man, dass $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 1$, und U_j wegzusammenhängend sind. Dann folgt

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\phi_0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\psi_0} \mathrm{H}^0_{dR}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{H}^1_{dR}(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\phi_1} 0\,.$$

Da $\ker \phi_1 = \mathrm{H}^1_{dR}(\mathbb{S}^n)$, ist δ_0 surjektiv. Da $\phi_0 = \phi$ injektiv ist, ist folglich $\dim \operatorname{bild} \phi_0 = 1$ und somit $\dim \ker \delta_0 = \dim \operatorname{bild} \psi_0 = 2 - 1 = 1$. Für $n \geqslant 2$ ist $\mathbb{S}^{n-1}$ wegzusammenhängend, also $\mathrm{H}^0_{dR}(\mathbb{S}^{n-1}) = \mathbb{R}$. Es folgt $\delta_0 = 0$ und $\mathrm{H}^1_{dR}(\mathbb{S}^n) = 0$ für alle $n \geqslant 2$. Somit ist

$$\mathrm{H}^k_{dR}(\mathbb{S}^n) = 0 \quad \text{für alle } 2 \leqslant k < n\,.$$

Für $n = 1$ ist $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$. Es ist klar, dass $\mathrm{H}^0_{dR}(\mathbb{S}^0) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Damit ist

$$\dim \mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1) = \dim \operatorname{bild} \delta_0 = 2 - \dim \ker \delta_0 = 1\,,$$

also $\mathrm{H}^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$. Es folgt $\mathrm{H}^n_{dR}(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$ für alle $n \geqslant 1$. Dies zeigt die Behauptung.

Lösungsblatt 13

Lösung 13.1

(a). Die Abbildung

$$\phi :]-r, r[\times \mathbb{R} \to \left((R + \varrho \cos \tfrac{s}{2}) \cos s, (R + \varrho \cos \tfrac{s}{2}) \sin s, \varrho \sin \tfrac{s}{2}\right)$$

ist lokal eine reguläre Parametrisierung von M. Es gilt

$$D\phi(0,s) = \begin{pmatrix} \cos\frac{s}{2}\cos s & -R\sin s \\ \cos\frac{s}{2}\sin s & R\sin s \\ \sin\frac{s}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

und mit

$$v_s = \begin{pmatrix} -\sin\frac{s}{2}\cos s \\ -\sin\frac{s}{2}\sin s \\ \cos\frac{s}{2} \end{pmatrix}$$

gilt $v_s^t D\phi(0,s) = 0$, also ist $T_{\phi(0,s)}(M)^\perp = \mathbb{R}\cdot v_s$.

(b). Angenommen, es gibt ein stetiges Einheitsnormalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^3$. Dann gilt

$$\nu(\phi(0,\pi)) = \pm v_\pi$$

und man kann $\nu(\phi(0,\pi)) = v_\pi = (1,0,0)^t$ annehmen. Für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt $\nu(\phi(0,s)) = \pm v_s$, wobei das Vorzeichen von s abhängt. Sei also $f(s) = (\nu(\phi(0,s)) : v_s)$. Nach Voraussetzung ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $f(\pi) = 1$ und $f(s)^2 = 1$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt $f(s) = 1$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Damit ist $\nu(\phi(0,-\pi)) = v_{-\pi} = (-1,0,0)$. Aber es gilt $\phi(0,\pi) = \phi(0,-\pi)$, Widerspruch! Damit gibt es kein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld auf M und M ist nicht orientierbar.

Lösung 13.2

(a). Die Menge $C = K \setminus B(x_0,\varepsilon)^\circ$ ist ein Kompaktum mit $\mathcal{C}^2$-Rand $\partial K \cup \mathbb{S}_\varepsilon^{n-1}(x_0)$. Die Sphäre erhält als Randstück von C die der üblichen entgegengesetzte Orientierung. Es folgt

$$\int_{\partial K}\omega - \int_{\|x-x_0\|=\varepsilon}\omega = \int_{\partial C}\omega = \int_C d\omega = 0\,.$$

(b). Es gilt nach (a) und dem Stokes'schen Integralsatz für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(z)}{z-w}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=\varepsilon}\frac{f(z)}{z-w}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i\varepsilon^2}\int_{|z-w|=\varepsilon}\overline{z-w}\cdot f(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i\varepsilon^2}\int_{|z-w|\leqslant\varepsilon} d\big((\bar z-\bar w)\cdot f(z)\,dz\big) \end{aligned}$$

Es gilt, da $d(f\,dz) = 0$ ist und w konstant,

$$\begin{aligned} d\big((\bar z - \bar w)\cdot f(z)\,dz\big) &= f\,d\bar z \wedge dz = f\,(dx - idy)\wedge(dx + idy) \\ &= f\cdot(i\,dx\wedge dy - idy\wedge dx) = 2if\,dx\wedge dy\,, \end{aligned}$$

also folgt weiter

$$= \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{\mathbb{B}(w,\varepsilon)} f(z)\,d\lambda^2(z)\,.$$

Da f stetig ist, gibt es für jedes $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$ mit $|f(z) - f(w)| \leqslant \delta$ für alle $z \in B(w,\varepsilon)$. Da $\mathrm{vol}_2(B(x,\varepsilon)) = \pi\varepsilon^2$, folgt

$$\left| f(w) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K}\frac{f(z)}{z-w}\,dz\right| \leqslant \frac{1}{\pi\varepsilon^2}\cdot\int_{\mathbb{B}(w,\varepsilon)} |f(w) - f(z)|\,d\lambda^2(z) \leqslant \delta\,.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

Lösungsblatt 14

Lösung 14.1

(a). Mit der Cauchyschen Integralformel folgt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz\,.$$

Es gilt

$$\frac{1}{a-w}\cdot\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-w}\right) = \frac{1}{(z-a)(z-w)} \to \frac{1}{(z-w)^2} \qquad (a \to w)\,,$$

also mit dem Satz von Lebesgue

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz\,.$$

(b). Sei

$$\gamma : [0,1] \to U : t \mapsto w + \varepsilon\cdot e^{2\pi i t}$$

eine Parametrisierung der Menge $\big\{z \in \mathbb{C} \;\big|\; |z-w| = \varepsilon\big\}$. Dann gilt $\dot\gamma(t) = 2\pi i\varepsilon e^{2\pi i t}$. Somit

$$f'(w) = \int_0^1 \frac{f\big(w + \varepsilon e^{2\pi i t}\big)}{\varepsilon^2 e^{4\pi i t}}\cdot\varepsilon e^{2\pi i t}\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_0^1 f\big(w + \varepsilon e^{2\pi i t}\big)e^{-2\pi i t}\,dt\,.$$

Es folgt

$$|f'(w)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 |f(w + \varepsilon e^{2\pi i t})|\,dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\cdot\sup\nolimits_{|z-w|=\varepsilon}|f(z)|\,.$$

(c). Es gilt $|f(z)| \leqslant C$ für ein $C > 0$ und alle $z \in \mathbb{C}$. Es folgt $|f'(w)| \leqslant \frac{C}{R}$ für alle $R > 0$. Lässt man $R \to \infty$ gehen, folgt $f' = 0$ auf $\mathbb{C}$. Da $\partial_x f = -i\partial_y f = f'$, ist $Df = 0$ auf $\mathbb{C}$. Aus der Analysis II ist nun bekannt, dass f konstant ist.

(d). Sei p ein Polynom ohne Nullstelle. Dann ist $f = 1/p$ holomorph. Es gibt $\varepsilon, R > 0$, so dass $|p(z)| \geqslant \varepsilon$ ist für alle $|z| \geqslant R$. Damit ist $|f(z)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Da weiter f auf $B(0, R)$ beschränkt ist, da stetig, ist f beschränkt. Aus (c) folgt, dass f und somit auch p konstant ist.

Lösung 14.2

(a). ω ist eine $(n-1)$-Form und $\dim \mathbb{S}^{n-1} = n-1$, also ist $d\omega = 0$ auf $\mathbb{S}^n$. Andererseits ist

$$d\omega = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \partial_j x_j \, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = dx_1 \wedge \cdots dx_n \neq 0\,,$$

also ist ω auf $\mathbb{R}^n$ nicht geschlossen.

(b). Es gilt

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = \int_{\mathbb{B}^n} dx_1 \wedge \cdots dx_n = \mathrm{vol}_n(\mathbb{B}^n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \neq 0\,.$$

Wäre $\omega = d\alpha$ für eine Differentialform auf $\mathbb{S}^{n-1}$, so würde $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega = 0$ folgen, da $\mathbb{S}^{n-1}$ randlos ist. Somit ist ω nicht exakt.

Lösung 14.3

Angenommen, es gebe doch so ein τ. Sei $h_t^{\pm}(x) = (1-t)\tau(x) \pm tx$ für alle $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Dann gilt, da $\tau(x) \perp \pm x$,

$$\left\|h_t^{\pm}(x)\right\|^2 = (1-t)^2\|\tau(x)\|^2 + t^2\|x\|^2 = (1-t)^2 + t^2 > 0\,,$$

also ist

$$H_t^{\pm}(x) = \|h_t^{\pm}(x)\|^{-1} \cdot h_t^{\pm}(x)$$

wohldefiniert und eine Homotopie von Abbildungen $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$. Es folgt

$$\deg \sigma^+ = \deg \tau = \deg \sigma^-\,.$$

Andererseits ist e_1 ein regulärer Wert von $\sigma^{\pm}$ und $(\sigma^{\pm})^{-1}(e_1) = \pm e_1$ hat ein Element. Weiter ist $\operatorname{sgn}\det D\sigma^{\pm} = \operatorname{sgn}\det \operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1) = (\pm 1)^n$. Es folgt $\deg \sigma^{\pm} = (-1)^n$. Für n ungerade ist aber $(-1)^n = -1 \neq 1 = 1^n$, Widerspruch! Folglich gibt es kein solches τ.

Zu dem Zusatz: Die Erdoberfläche ist (diffeomorph zu) $\mathbb{S}^2$. Die Strömung der Erdatmossphäre wird durch ein $\mathcal{C}^2$-Tangentenfeld τ beschrieben. Dieses muss eine Nullstelle besitzen, da sonst $f = \|\tau\|^{-1} \cdot \tau$ ein $\mathcal{C}^2$-Einheitstangentenfeld wäre, was es nicht geben kann. Die Nullstelle entspricht dem Auge des Sturms.

Lösungsblatt 15

Lösung 15.1

Es gilt

$$D\varphi = \varphi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

also

$$\varphi^* dx = \frac{dx' - v\,dt'}{\sqrt{1-v^2}} \;,\; \varphi^* dy = dy' \;,\; \varphi^* dz = dz' \;,\; \varphi^* dt = \frac{-v\,dx' + dt'}{\sqrt{1-v^2}} \;.$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi^*(dy \wedge dz) = dy' \wedge dz' \;,\; \varphi^*(dz' \wedge dx') &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\, dz' \wedge dx' - \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\, dz' \wedge dt' \;, \\ \varphi^*(dx \wedge dy) &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\, dx' \wedge dy' + \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\, dy' \wedge dt' \;, \\ \varphi^*(dx \wedge dt) &= \frac{1}{1-v^2}(dx' - v\,dt') \wedge (-v\,dx' + dt') = dx' \wedge dt' \;, \\ \varphi^*(dy \wedge dt) &= \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\, dx' \wedge dy' + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\, dy' \wedge dt' \;, \\ \varphi^*(dz \wedge dt) &= -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\, dz' \wedge dx' + \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\, dz' \wedge dt' \;. \end{aligned}$$

Mit $F = \langle B, d\vec{S}\rangle + \langle E, d\vec{s}\rangle \wedge dt$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ folgt also

$$\begin{aligned} \varphi^* F = &B_1 \circ \varphi\, dy' \wedge dz' + \gamma(B_2 - vE_3) \circ \varphi\, dz' \wedge dx' + \gamma(B_3 + vE_2) \circ \varphi\, dx' \wedge dy' \\ &+ E_1 \circ \varphi\, dx' \wedge dt' + \gamma(vB_3 + E_2) \circ \varphi\, dy' \wedge dt' + \gamma(-vB_2 + E_3) \circ \varphi\, dz' \wedge dt' \;. \end{aligned}$$

Das konstante Vektorfeld

$$\varphi^* \partial_t = \frac{-v\partial_x + \partial_t}{\sqrt{1-v^2}} = \partial_{t'}$$

ist dual zu dt':

$$i_{\varphi^*\partial_t} dx' = i_{\varphi^*\partial_t} dy' = i_{\varphi^*\partial_t} dz' = 0 \;,\; i_{\varphi^*\partial_t} dt' = 1 \;.$$

Damit folgt

$$E' = \left(E_1, \frac{vB_3 + E_2}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{-vB_2 + E_3}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

und

$$B' = \left(B_1, \frac{B_2 - vE_3}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{B_3 + vE_2}{\sqrt{1-v^2}}\right) .$$

D.h., für einen bewegten Beobachter wird das elektrische Feld teilweise in ein magnetisches Feld transformiert (und umgekehrt). Die Formulierung der Maxwellgleichungen mit Differentialformen ist also vorteilhaft, weil in der klassischen Formulierung mit Vektorfeldern die Aufteilung der vier Gleichungen, in denen jeweils nur elektrisches oder magnetisches Feld vorkommen, von der Wahl des Inertialsystems abhängt. Die Betrachtungweise mit der Faraday-2-Form, die elektrisches und magnetisches Feld vereint, ist aus physikalischer Sicht auf Grund deren Vermischung bei Wechsel des Inertialsystems natürlich.

Lösung 15.2
Es gilt $** = 1$ auf 3-Formen und folglich $*d*j = *d**d*F = *dd*F = 0$. Andererseits ist mit $j = \langle J, d\vec{s}, -\rangle \varrho\, dt$

$$*d*j = *d(\langle J, d\vec{S}, \wedge\rangle dt - \varrho\, dV) = *(\operatorname{div} J\, dV \wedge dt + \partial_t \varrho\, dV \wedge dt) = -\operatorname{div} J - \partial_t \varrho\,.$$

Es folgt $\operatorname{div} J = -\partial_t \varrho$ und mit dem Satz von Gauß und dem Differenzierbarkeitssatz von Lebesgue:

$$-\int_{\partial K} \langle J, n\rangle\, dS = -\int_K \operatorname{div} J\, dV = \int_K \partial_t \varrho\, dV = \frac{\partial Q}{dt}\,.$$

Auf die folgende Literatur wurde bei der Konzipierung der Vorlesung und Übungen zurückgegriffen.

Literatur

[1] R. Abraham; J. E. Marsden; T. Ratiu: *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. 2. Auflage. Applied Mathematical Sciences. Springer–Verlag, New York, 1988.

[2] I. Agricola; T. Friedrich: *Globale Analysis*. Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik. Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2004.

[3] V. Guillemin; S. Pollack: *Differential Topology*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974.

[4] O. Forster: *Analysis 3*. Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen. Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1981.

[5] O. Loos: *Analysis III*. Institut für Mathematik, Universität Innsbruck, 1999.

[6] R. Penrose: *The Road to Reality*. A Complete Guide to the Laws of the Universe. Alfred A. Knopf, Inc., New York, 2005.

[7] C. Portenier: *Analyse*. Fachbereich Mathematik und Informatik, Philipps-Universität Marburg, 2006.

[8] A. van Daele: The Teaching of Mathematics: The Lebesgue Integral Without Measure Theory. *Amer. Math. Monthly* 97 (1990), no. 10, 912–915.

Index